

4EK212 - Kvantitativní management

9. Modely hromadné obsluhy

9. Modely hromadné obsluhy

- ▶ Systém, ve kterém dochází k realizaci obsluhy příchozích požadavků = systém hromadné obsluhy
- ▶ Vědní disciplína zkoumající tyto systémy = teorie hromadné obsluhy
- ▶ Požadavky se mohou hromadit a čekat ve frontě na obsluhu ... modely front, teorie front

9.1 Základní pojmy

▶ Požadavek

- ▶ = jednotka, která přichází do systému
- ▶ za účelem obsluhy
- ▶ postupně systémem prochází
- ▶ a nakonec systém opustí
- ▶ může jím být: člověk, stroj, událost, informace

▶ Příklad:

- ▶ Pacient (u lékaře), auto (v servisu či na benzínce), hovor (v telef. ústředně), cestující (na nádraží), tisková úloha (tiskárna), packet (PC)

9.1 Základní pojmy

▶ Zdroj požadavků

▶ Může být konečný

- ▶ auta v půjčovně, prasklé žárovky v budově, ...

▶ Může být nekonečný

- ▶ dopravní nehody, hosté v restauraci, pacienti, ...
- ▶ i v těchto případech je počet konečný, ale nepředpokládáme opakovaný vstup požadavku do systému

9.1 Základní pojmy

▶ Příchod požadavků do systému

▶ 1. Počet požadavků, které přijdou do systému

▶ Deterministický nebo stochastický

▶ Ve většině případů diskrétní (celočíselný)

▶ Průměrný počet požadavků, které přijdou do systému za časovou jednotku se nazývá

Intenzita příchodů (λ)

▶ Často $\lambda \sim Po(\lambda)$

9.1 Základní pojmy

- ▶ **Příklad: Příchod požadavků do systému**
 - ▶ Ke studijní referentce přichází v průměru 5 studentů za hodinu.
 - ▶ **Jaká je intenzita příchodů?**
 - ▶ Intenzita příchodů = Průměrný počet požadavků, které přijdou do systému za časovou jednotku
 - ▶ $\lambda = 5$ [*st/hod*]

9.1 Základní pojmy

- ▶ **Příchod požadavků do systému**
 - ▶ 2. Interval mezi dvěma po sobě přicházejícími jednotkami
 - ▶ Deterministický nebo stochastický
 - ▶ Spojitá veličina
 - ▶ Často má exponenciální rozdělení $Exp(\lambda)$
 - ▶ Průměrná doba mezi příchody dvou po sobě přicházejících požadavků je

$$EV = \frac{1}{\lambda}$$

9.1 Základní pojmy

▶ Příklad: Příchod požadavků do systému

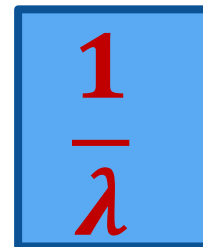
▶ Ke studijní referentce přichází v průměru 5 studentů za hodinu.

▶ $\lambda = 5 [st/hod]$

▶ **Jaká je průměrná doba mezi příchody?**

▶ $\lambda = \frac{5 st}{hod} = \frac{5 st}{60 min} = \frac{1 st}{12 min}$

▶ 12 minut = $\frac{1}{5}$ hod.


$$\frac{1}{\lambda}$$

9.1 Základní pojmy

- ▶ **Obslužné zařízení (obslužná linka)**
 - ▶ = jednotka, která v systému zajišťuje obsluhu
 - ▶ Jsou-li všechna obslužná zařízení obsazena
 - ▶ další požadavky čekají ve **frontě**
 - ▶ dokud se některé zařízení neuvolní
- ▶ **Příklad:**
 - ▶ Lékař, mechanik, operátor, pokladna, prodavač

9.1 Základní pojmy

- ▶ **Obsluha požadavků v systému**
 - ▶ 1. Počet požadavků, které jsou obslouženy systémem
 - ▶ Deterministický nebo stochastický
 - ▶ Ve většině případů diskrétní (celočíselný)
 - ▶ Průměrný počet požadavků, které jsou obslouženy za časovou jednotku se nazývá
Intenzita obsluhy (μ)
 - ▶ Často $\mu \sim Po(\mu)$

9.1 Základní pojmy

- ▶ **Příklad: Obsluha požadavků v systému**
 - ▶ Studijní referentka vyřídí v průměru 6 studentů za hodinu.
 - ▶ **Jaká je intenzita obsluhy?**
 - ▶ Intenzita obsluhy = Průměrný počet požadavků, které jsou obslouženy za časovou jednotku
 - ▶ $\mu = 6 [st/hod]$

9.1 Základní pojmy

- ▶ **Obsluha požadavků v systému**
 - ▶ 2. Doba obsluhy jedné jednotky
 - ▶ Deterministický nebo stochastický
 - ▶ Spojitá veličina
 - ▶ Často má exponenciální rozdělení $Exp(\mu)$
 - ▶ Průměrná doba obsluhy je

$$EV = \frac{1}{\mu}$$

9.1 Základní pojmy

- ▶ **Příklad: Obsluha požadavků v systému**
 - ▶ Studijní referentka vyřídí v průměru 6 studentů za hodinu.
 - ▶ $\mu = 6 [st/hod]$
 - ▶ **Jaká je průměrná doba obsluhy?**
 - ▶ $\mu = \frac{6 st}{hod} = \frac{6 st}{60 min} = \frac{1 st}{10 min}$
 - ▶ 10 minut = $\frac{1}{6}$ hod.

$$\frac{1}{\mu}$$

9.1 Základní pojmy

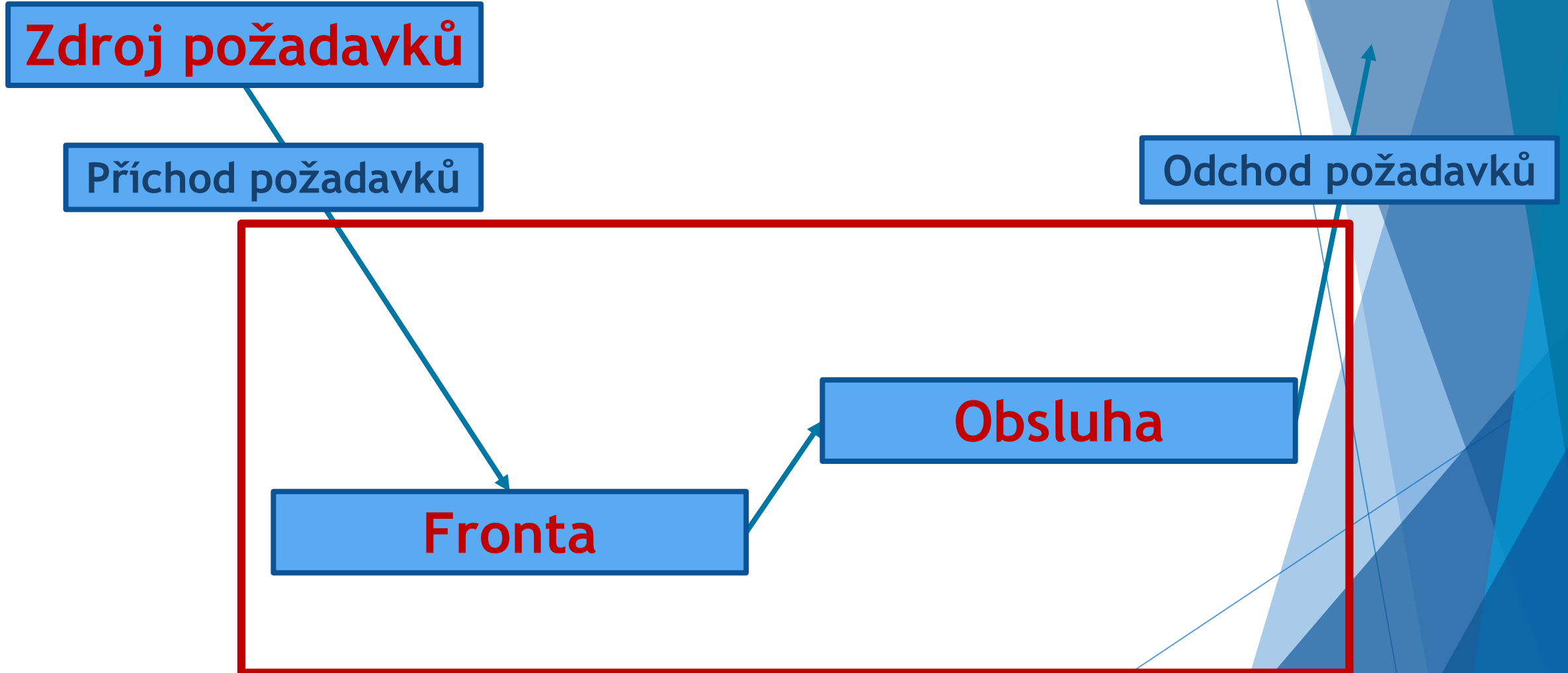
▶ Příklad:

- ▶ Stanice záchranné služby vysílá sanitky k dopravním nehodám
- ▶ **Co jsou v tomto systému požadavky?**
 - ▶ Dopravní nehody (statické)
- ▶ **Co jsou v tomto systému obslužná zařízení?**
 - ▶ Sanitky (dynamické)
- ▶ Ne vždy se tedy fyzicky pohybují požadavky (návštěvy lékaře u pacientů, výměna prasklých žárovek apod.)

9.1 Základní pojmy

System hromadné obsluhy	Požadavek	Obslužné zařízení
Lékařská ordinace	Pacient	Lékař
Benzínová stanice	Auto	Čerpací stojan
Obchod	Zákazník	Prodavač (pokladna)
Servis (autoservis)	Zařízení (auto)	Mechanik
Kadeřnictví	Zákazník (host)	Křeslo, sedadlo, kadeřník
Síťová tiskárna	Tisková úloha	Řídicí jednotka
Telefonní ústředna	Hovor	Operátor
Nádraží (letišťe)	Cestující	Pokladna (pasová kontrola)

9.1 Základní pojmy - schéma



9.1 Základní pojmy

- ▶ **System je závislý na**
 - ▶ Počtu obslužných zařízení
 - ▶ Jedno
 - ▶ Více
 - ▶ Typu obslužných zařízení
 - ▶ Identické obslužné linky
 - ▶ Neidentické obslužné linky
 - ▶ Uspořádání obslužných zařízení
 - ▶ Paralelní
 - ▶ Sériové

9.1 Základní pojmy

- ▶ **Jednoduchý systém hromadné obsluhy**
 - ▶ Jedna obslužná linka
 - ▶ Jedna fronta
 - ▶ **Příklad:**
 - ▶ bankomat
 - ▶ stánek s hotdogy

9.1 Základní pojmy

- ▶ **Paralelní systém hromadné obsluhy s jednou frontou**
 - ▶ Několik identických obslužných linek
 - ▶ Jedna fronta
 - ▶ Příklad:
 - ▶ pošta (lístky s čísly)
 - ▶ zkoušení oblečení v kabinkách

9.1 Základní pojmy

- ▶ **Paralelní systém hromadné obsluhy s vlastními frontami**
 - ▶ Několik identických obslužných linek
 - ▶ Každá linka má vlastní frontu
 - ▶ **Příklad:**
 - ▶ pokladny v supermarketech
 - ▶ odbavení zavazadel na letišti

9.1 Základní pojmy

- ▶ **Paralelní systém hromadné obsluhy s různými obslužnými linkami**
 - ▶ Několik neidentických obslužných linek
 - ▶ Každá linka má vlastní frontu
 - ▶ **Příklad:**
 - ▶ přepážky na poště (listovní, balíkové, peněžní)
 - ▶ automaty (nápojové, jídelní)

9.1 Základní pojmy

- ▶ **Sériový systém hromadné obsluhy**
 - ▶ Několik neidentických obslužných linek
 - ▶ Každá linka má vlastní frontu
 - ▶ Příklad:
 - ▶ montážní linka

9.1 Základní pojmy

- ▶ **Kombinovaný systém hromadné obsluhy**
 - ▶ Kombinace paralelního a sériového uspořádání linek
 - ▶ Složitý systém
 - ▶ Příklad:
 - ▶ nemocnice
 - ▶ letiště

9.1 Základní pojmy - Fronta

▶ Fronta

- ▶ Omezená nebo neomezená kapacita
- ▶ Režim fronty
 - ▶ FIFO - First In, First Out - klasická fronta
 - ▶ LIFO - Last In, First Out - zásobník (palety, bedny)
 - ▶ PRI - Priority - těhotné, objednaní, urgentní případy
 - ▶ SIRO - Selection In Random Order - východ z kina, součástky (naházené do bedny)

9.2 Klasifikace modelů hromadné obsluhy

▶ Systém hromadné obsluhy

A / B / C / D / E / F

- ▶ **A**: Typ rozdělení intervalu mezi příchody požadavků do systému
 - ▶ *M* - *exponenciální rozdělení*
 - ▶ *U* - *rovnoměrné rozdělení*
 - ▶ *N* - *normální rozdělení*
 - ▶ *D* - *deterministická hodnota (konstanta)*
 - ▶ *G* - *nespecifikované rozdělení ($EX, varX$)*

**David G.
Kendall
(1953)**

9.2 Klasifikace modelů hromadné obsluhy

▶ **System hromadné obsluhy**

A / B / C / D / E / F

▶ ***B***: Typ rozdělení doby obsluhy

▶ *M* - *exponenciální rozdělení*

▶ *U* - *rovnorné rozdělení*

▶ *N* - *normální rozdělení*

▶ *D* - *deterministická hodnota (konstanta)*

▶ *G* - *nespecifikované rozdělení (se EX a $varX$)*

9.2 Klasifikace modelů hromadné obsluhy

Kendallova notace

► Systém hromadné obsluhy

$A / B / C / D / E / F$

- C : Počet paralelně uspořádaných linek
- D : Kapacita systému (fronty) - pro neomezenou „ ∞ “
- E : Kapacita zdroje požadavků - pro neomezený zdroj „ ∞ “
- F : Režim fronty - FIFO, LIFO, PRI, SIRO

- $D/E/F \rightarrow \infty/\infty/FIFO \dots$ používá se pouze kód $A/B/C$

9.2 Klasifikace modelů hromadné obsluhy

▶ Příklad 1: Lyžařské středisko

- ▶ V zimním středisku fungují vleky a vyváží lyžaře na svah.
- ▶ Identifikujte model s notací: $M/D/5/4000/\infty/FIFO$

▶ Příklad 2: Výrobní dílna

- ▶ Stroj lisuje součástky a sype je do krabice. Zaměstnanci si z krabice součástky berou a montují je na výrobky.
- ▶ Identifikujte model s notací: $D/N/20/300/\infty/SIRO$

9.3 Analýza modelů hromadné obsluhy

▶ Časové charakteristiky

- ▶ Průměrná doba čekání ve frontě T_f
- ▶ Průměrná doba, kterou stráví požadavek v systému T

▶ Charakteristiky počtu požadavků

- ▶ Průměrná délka fronty N_f
- ▶ Průměrný počet požadavků v systému N

9.3 Analýza modelů hromadné obsluhy

- ▶ **Pravděpodobnostní charakteristiky**
 - ▶ Pravděpodobnost, že obslužné zařízení nepracuje (v systému není žádný požadavek) či pracuje
 - ▶ Pravděpodobnost, že všechna obslužná zařízení pracují (další požadavek bude muset čekat ve frontě)
 - ▶ Pravděpodobnost, že v systému (či ve frontě) se nachází přesně n požadavků
 - ▶ Pravděpodobnost, že v systému je více než n požadavků
 - ▶ Pravděpodobnost, že požadavek bude muset čekat ve frontě déle než t časových jednotek

9.4 M/M/1 model

▶ Systém hromadné obsluhy

M/M/1/∞/∞/FIFO

- ▶ *A*: Intervaly mezi příchody mají exponenciální rozdělení s parametrem λ
- ▶ *B*: Doba obsluhy má exponenciální rozdělení s parametrem μ
- ▶ *C*: Jedna (paralelní) obslužná linka
- ▶ *D*: Neomezená kapacita systému (fronty)
- ▶ *E*: Neomezený zdroj požadavků
- ▶ *F*: Fronta typu FIFO

9.4 M/M/1 - Příklad

- ▶ Banka provozuje v obchodním centru s otvírací dobou 9:00 - 21:00 bankomat.
- ▶ Vzhledem ke skutečnosti, že se u bankomatu tvoří nepřiměřeně velké fronty, zákazníci často odchází bez obslužení.
- ▶ Banka tak přichází nejen o klienty, ale také o ušlý zisk z neprovedených operací.
- ▶ Zvažuje proto výměnu bankomatu za novější a také rychlejší typ.

9.4 M/M/1 - Příklad

- ▶ Na základě pozorování bylo zjištěno, že k bankomatu přijde v průměru 240 zákazníků za den a zákazník u bankomatu stráví v průměru 2,5 minuty.
- ▶ **Intenzita příchodů:**

$$\lambda = \frac{240}{\text{den}} = \frac{240}{12 \text{ hod}} = \frac{20}{\text{hod}} = \frac{20}{60 \text{ min}} = \frac{1}{3 \text{ min}}$$

- ▶ **Intenzita obsluhy:**

$$\mu = \frac{1}{2,5 \text{ min}} = \frac{2}{5 \text{ min}} = \frac{24}{60 \text{ min}} = \frac{24}{\text{hod}} = \frac{288}{12 \text{ hod}} = \frac{288}{\text{den}}$$

9.4 M/M/1 model

Podmínka
stabilizace systému:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

► Intenzita provozu

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

► $\rho \geq 1$, pak $\frac{\lambda}{\mu} \geq 1$ a tedy $\lambda \geq \mu$

- Za časovou jednotku přijde alespoň tolik požadavků, kolik jich je obslouženo
- Délka fronty s časem roste nad všechny meze

► $\rho < 1$, pak $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ a tedy $\lambda < \mu$

- Požadavky jsou v průměru obsluhováni rychleji než přichází
- Systém je stabilní

9.4 M/M/1 model

► Intenzita provozu

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Pravděpodobnost, že obslužná linka je vytížená (pracuje)
- Pravděpodobnost, že v systému je alespoň jeden požadavek

► Pro příklad:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{240}{288} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} = 0,8\bar{3}$$

- S pravděpodobností 83 % je zákazník u bankomatu

9.4 M/M/1 model

- ▶ Pravděpodobnost, že obslužná linka nepracuje
 - ▶ Pravděpodobnost, že v systému není žádný požadavek

$$P(N = 0) = p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

- ▶ Pro příklad:

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{240}{288} = 1 - \frac{20}{24} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} = 0,1\bar{7}$$

- ▶ S pravděpodobností 17 % nikdo u bankomatu není a zákazník, který přichází, nemusí čekat

9.4 M/M/1 model

- ▶ Průměrná doba strávená v systému
 - ▶ Doba samotné obsluhy (strávená vlastní obsluhou) a
 - ▶ Doba strávená ve frontě

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

- ▶ Pro příklad:

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{288 - 240} = \frac{1}{48} \text{ dne} = \frac{12}{48} \text{ hod} = \frac{1}{4} \text{ hod} = 15 \text{ min}$$

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{24 - 20} = \frac{1}{4} \text{ hod} = 15 \text{ min}$$

- ▶ Zákazník stráví v systému v průměru 15 minut

9.4 M/M/1 model

▶ Průměrná doba strávená ve frontě

- ▶ Rozdíl mezi dobou strávenou v systému a dobou strávenou obsluhou

$$T_f = T - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - (\mu - \lambda)}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

▶ Pro příklad:

$$T_f = \frac{1}{48} - \frac{1}{288} = \frac{6 - 1}{288} = \frac{5}{288} \text{ dne} = \frac{60}{288} \text{ hod} = 0,208 \text{ hod} = 12,5 \text{ min}$$

$$T_f = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{6 - 1}{24} = \frac{5}{24} \text{ hod} = 0,208 \text{ hod} = 12,5 \text{ min}$$

- ▶ Zákazník stráví ve frontě v průměru 12,5 minuty
- ▶ Logické: 15 minut stráví v systému a 2,5 minuty trvá obsluha

9.4 M/M/1 model

- ▶ Průměrná doba strávená v systému T
- ▶ Průměrný počet požadavků v systému $N = \lambda \cdot T$

- ▶ Pro příklad:

$$T = \frac{1}{48} \text{ dne} \rightarrow N = \lambda \cdot T = 240 \cdot \frac{1}{48} = 5$$

$$T = \frac{1}{4} \text{ hod} \rightarrow N = \lambda \cdot T = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5$$

- ▶ V systému je v průměru 5 zákazníků

9.4 M/M/1 model

- ▶ Průměrná doba strávená ve frontě T_f
- ▶ Průměrný počet požadavků ve frontě $N_f = \lambda \cdot T_f$

- ▶ Pro příklad:

$$T_f = \frac{5}{288} \text{ dne} \rightarrow N_f = \lambda \cdot T_f = 240 \cdot \frac{5}{288} = 4,1\bar{6}$$

$$T_f = \frac{5}{24} \text{ hod} \rightarrow N_f = \lambda \cdot T_f = 20 \cdot \frac{5}{24} = 4,1\bar{6}$$

- ▶ Ve frontě je v průměru 4,17 zákazníků

9.4 M/M/1 model

- ▶ Průměrný počet požadavků v systému

$$N = \lambda \cdot T$$

- ▶ Průměrný počet požadavků ve frontě

$$N_f = \lambda \cdot T_f$$

**John D. C.
Little (1961)**

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 13

KONEC