# 4EK201 – Matematické modelování

10. Vícekriteriální rozhodování

# 10. Rozhodování

- Rozhodování = proces výběru nějaké možnosti (varianty)
  - podle stanoveného kritéria
  - za účelem dosažení stanovených cílů
- Rozhodovatel = subjekt, který provádí rozhodnutí
- Teorie rozhodování = vědní disciplína zabývající se tímto procesem

# 10. Rozhodování

- Ve své podstatě sem patří všechny již probrané modely
  - Lineární programování:
    - Varianty = řešení
    - Kritérium = účelová funkce
    - Cíl = maximalizace zisku
  - Zásoby:
    - Varianty = objednané množství
    - Kritérium = náklady
    - Cíl = minimalizace nákladů

# 10. Vícekriteriální rozhodování

- Jeden rozhodovatel
- Více kritérií
  - Maximalizační (vyšší = lepší)
  - Minimalizační (nižší = lepší)
- Více možných variant
  - Diskrétní množina – vícekriteriální hodnocení variant
  - Spojitá množina – vícekriteriální programování

# 10. Vícekriteriální rozhodování

- Varianta A
  - může být podle jednoho kritéria lepší než varianta B
  - a podle jiného horší
- Hledáme tzv. kompromisní variantu (diskrétní)
  - nebo kompromisní řešení (spojité)

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- Každé variantě odpovídá vektor kriteriálních hodnot
- Na základě těchto hodnot můžeme varianty vzájemně porovnávat

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- Cíl:
  1. Najít nejlepší variantu
  2. Uspořádat varianty
  3. Rozdělit varianty do několika skupin, v rámci nichž jsou stejně dobré

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| Jméno | Požadovaný plat | Výsledek pohovoru | Vzdělání |
|---|---|---|---|
| Adámek | 32 000 Kč | 74 bodů | VŠ |
| Budka | 16 000 Kč | 46 bodů | SŠ |
| Cibulka | 20 000 Kč | 32 bodů | SŠ |

- Požaduji: plat max. 25 tisíc Kč, alespoň 50 bodů, alespoň SŠ

**Aspirační úrovně**

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| Jméno | Požadovaný plat | Výsledek pohovoru | Vzdělání |
|---|---|---|---|
| Adámek | 32 000 Kč | 74 bodů | VŠ |
| Budka | 16 000 Kč | 46 bodů | SŠ |
| Cibulka | 20 000 Kč | 32 bodů | SŠ |

- Požaduji: plat max. 25 tisíc Kč, alespoň 50 bodů, alespoň SŠ

**Disjunktivní**

**Konjunktivní**

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| Jméno | Požadovaný plat | Výsledek pohovoru | Vzdělání |
|---|---|---|---|
| Adámek | 32 000 Kč | 74 bodů | VŠ |
| Budka | 16 000 Kč | 46 bodů | SŠ |
| Cibulka | 20 000 Kč | 32 bodů | SŠ |

- Požaduji: plat max. 25 tisíc Kč, alespoň 45 bodů, alespoň SŠ

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| Jméno | Požadovaný plat | Výsledek pohovoru | Vzdělání |
|---|---|---|---|
| Adámek | 32 000 Kč | 74 bodů | VŠ |
| Budka | 16 000 Kč | 46 bodů | SŠ |
| Cibulka | 20 000 Kč | 32 bodů | SŠ |

- Jak vypadá vektor kriteriálních hodnot pro pana Budku?

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- Úloha vícekriteriálního hodnocení variant (VHV) je dána:
  - Seznamem kritérií a jejich extrémy (min/max): $f_1, f_2, \dots, f_k$
  - Seznamem variant: $a_1, a_2, \dots, a_n$
  - Maticí kriteriálních hodnot: $\mathbf{Y} = (y_{ij})$,
    - $i = 1, 2, \dots, n$
    - $j = 1, 2, \dots, k$

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

**Úloha vícekriteriální hodnocení variant (VHV):**

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f_1 & \cdots & f_k \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array} & \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nk} \end{bmatrix} \end{array}$$

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| Jméno | Požadovaný plat | Výsledek pohovoru | Vzdělání |
|---|---|---|---|
| Adámek | 32 000 Kč | 74 bodů | VŠ |
| Budka | 16 000 Kč | 46 bodů | SŠ |
| Cibulka | 20 000 Kč | 32 bodů | SŠ |

- Kolik má úloha variant a kolik kritérií?
- Jaké jsou hledané extrémy?
- Jak vypadá kriteriální matice?

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| Jméno | Požadovaný plat | Výsledek pohovoru | Vzdělání |
|---|---|---|---|
| Adámek | 32 000 Kč | 74 bodů | VŠ |
| Budka | 16 000 Kč | 46 bodů | SŠ |
| Cibulka | 20 000 Kč | 32 bodů | SŠ |

- Koho rozhodně nepřijmete?
- Dominovaná varianta (dominované řešení)

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- Dominovaná varianta (dominované řešení)
  - Je taková varianta, ke které existuje jiná,
    - která podle žádného kritéria <u>není hodnocena hůře</u>,
    - a alespoň podle jednoho je <u>hodnocena lépe</u>
- Tato „jiná“ varianta se nazývá dominující
- Varianta, která není dominována žádnou jinou variantou = nedominovaná

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| Jméno | Požadovaný plat | Výsledek pohovoru | Vzdělání |
|---|---|---|---|
| Adámek | 32 000 Kč | 74 bodů | VŠ |
| Budka | 16 000 Kč | 46 bodů | SŠ |
| Cibulka | 20 000 Kč | 32 bodů | SŠ |

- Které varianty jsou nedominované?
- Dominovaná varianta by nikdy neměla skončit lépe než varianta, která ji dominuje

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- Ideální varianta = varianta, která dosahuje ve všech kritériích nejlepších hodnot
  - Může být pouze hypotetická
  - Pokud existuje v souboru variant, pak je (jedinou) nedominovanou variantou
- Bazální varianta = varianta, která dosahuje ve všech kritériích nejhorších možných hodnot
  - Může být pouze hypotetická
  - Pokud existuje v souboru variant, pak je dominovanou variantou (všemi ostatními)

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| Jméno | Požadovaný plat | Výsledek pohovoru | Vzdělání |
|---|---|---|---|
| Adámek | 32 000 Kč | 74 bodů | VŠ |
| Budka | 16 000 Kč | 46 bodů | SŠ |
| Cibulka | 20 000 Kč | 32 bodů | SŠ |

- Určete ideální a bazální variantu.

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- Ideální varianta $\mathbf{H} = (h_1, h_2, \dots, h_k)$
  - $h_j = \max\limits_i y_{ij}$ pro maximalizační kritérium $f_j$
  - $h_j = \min\limits_i y_{ij}$ pro minimalizační kritérium $f_j$
- Bazální varianta $\mathbf{D} = (d_1, d_2, \dots, d_k)$
  - $d_j = \min\limits_i y_{ij}$ pro maximalizační kritérium $f_j$
  - $d_j = \max\limits_i y_{ij}$ pro minimalizační kritérium $f_j$

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| Jméno | Požadovaný plat | Výsledek pohovoru | Vzdělání |
|---|---|---|---|
| Adámek | 32 000 Kč | 74 bodů | VŠ |
| Budka | 16 000 Kč | 46 bodů | SŠ |
| Cibulka | 20 000 Kč | 32 bodů | SŠ |

- Jak vybrat nejlepšího?
- Jak sečíst výsledky?

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

## Metoda WSA - Weighted Sum Approach

- Předpokládejme, že všechna kritéria jsou maximalizační
- Co když nejsou?

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f_1 & \cdots & f_k \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array} & \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nk} \end{bmatrix} \end{array}$$

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| Jméno | Požadovaný plat | Výsledek pohovoru | Vzdělání |
|---|---|---|---|
| Adámek | 32 000 Kč | 74 bodů | VŠ |
| Budka | 16 000 Kč | 46 bodů | SŠ |
| Cibulka | 20 000 Kč | 32 bodů | SŠ |

- Jak udělat z platu maximalizační kritérium?

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

## Převod minimalizačního kritéria $f_j$ na maximalizační

- Vyberme nejhorší možnost $d_j = \max_i y_{ij}$
- Všechny kriteriální hodnoty kritéria $f_j$ nahradíme úsporou vůči této nejhorší možnosti, tj.

$$\widetilde{y_{ij}} = d_j - y_{ij}$$

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| Y | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|---|---|---|---|
| Adámek | 0 | 74 | VŠ |
| Budka | 16 000 | 46 | SŠ |
| Cibulka | 12 000 | 32 | SŠ |

| Y | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|---|---|---|---|
| Adámek | 0 | 74 | 3 |
| Budka | 16 000 | 46 | 2 |
| Cibulka | 12 000 | 32 | 2 |

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 74 & 3 \\ 16000 & 46 & 2 \\ 12000 & 32 & 2 \end{bmatrix}$$

Jak sečíst výsledky?

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

## Metoda WSA - Weighted Sum Approach

- Krok 1: Určení bazální a ideální varianty

$$d_j = \min_{i=1,\dots,n} y_{ij}$$

$$h_j = \max_{i=1,\dots,n} y_{ij}$$

- Krok 2: Normalizace kriteriálních hodnot

$$r_{ij} = \frac{y_{ij} - d_j}{h_j - d_j}$$

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| Y | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|---|---|---|---|
| Adámek | 0 | 74 | 3 |
| Budka | 16 000 | 46 | 2 |
| Cibulka | 12 000 | 32 | 2 |
| **D** | 0 | 32 | 2 |
| **H** | 16000 | 74 | 3 |

| R | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|---|---|---|---|
| Adámek | 0 | 1 | 1 |
| Budka | 1 | 1/3 | 0 |
| Cibulka | 3/4 | 0 | 0 |

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

**Metoda WSA - Weighted Sum Approach**

- Krok 3: Výpočet celkového užitku

$$u_i = \sum_{j=1}^{k} v_j \cdot r_{ij}$$

- Krok 4: Uspořádání variant

$$u_i \quad \rightarrow \quad max$$

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| R | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|
| Adámek | 0 | 1 | 1 | 0,6 |
| Budka | 1 | 1/3 | 0 | 0,5 |
| Cibulka | 3/4 | 0 | 0 | 0,3 |
| $v_j$ | 0,4 | 0,3 | 0,3 | |

Jak zvolit váhy, pokud $f_2$ a $f_3$ jsou stejně důležitá a $f_1$ je nepatrně důležitější?

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

- *Příklad:*

| **R** | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|
| Adámek | 0 | 1 | 1 | 0,67 |
| Budka | 1 | 1/3 | 0 | 0,44 |
| Cibulka | 3/4 | 0 | 0 | 0,25 |
| $v_j$ | 1/3 | 1/3 | 1/3 | |

# 10.1 Vícekriteriální hodnocení variant

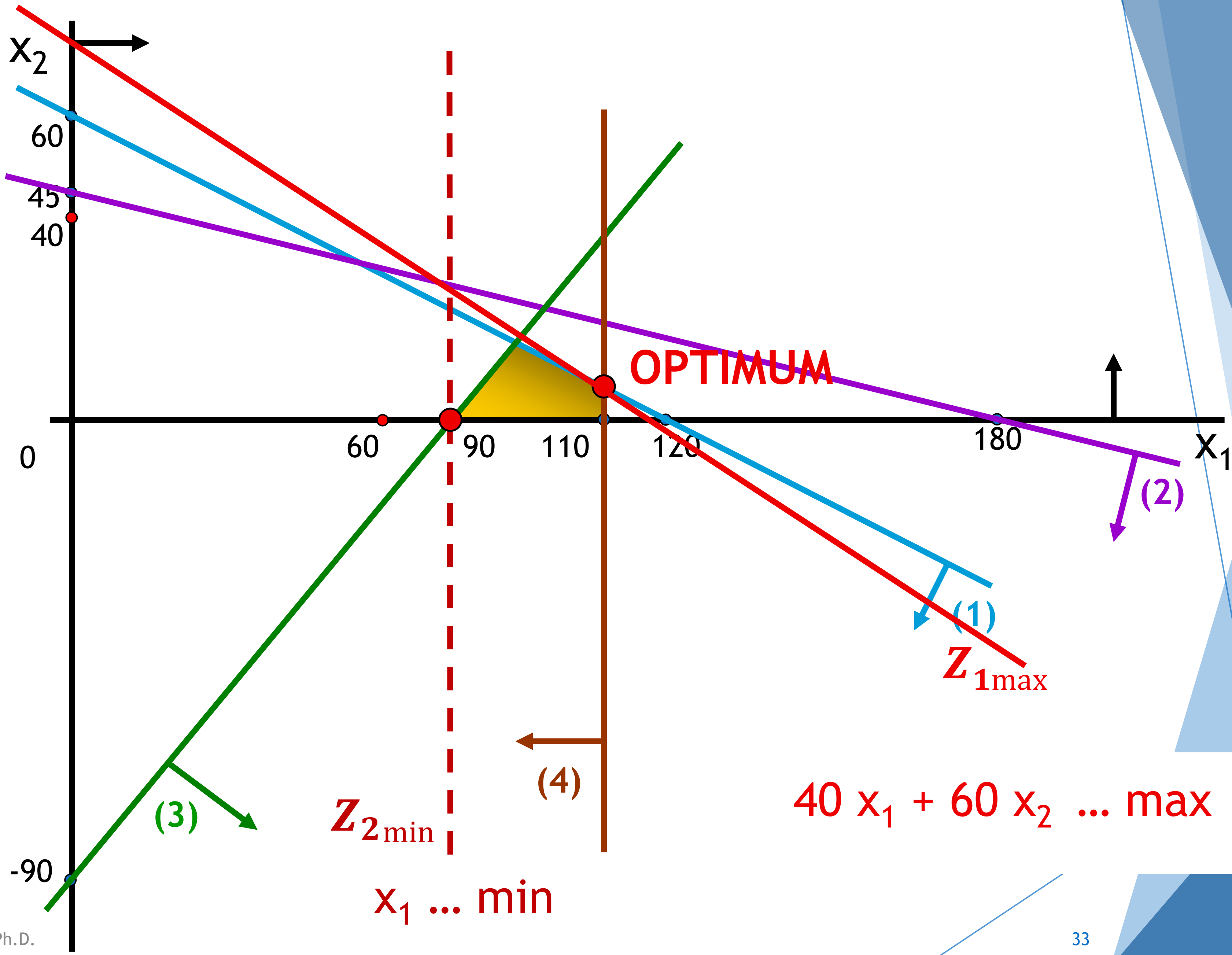
- *Příklad:*

| R | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $u_i$ |
|---|---|---|---|---|
| Adámek | 0 | 1 | 1 | 0,2 |
| Budka | 1 | 1/3 | 0 | 0,83 |
| Cibulka | 3/4 | 0 | 0 | 0,6 |
| $v_j$ | 0,8 | 0,1 | 0,1 | |

# 10.2 Vícekriteriální programování

- *Příklad:*

| | |
|---|---|
| Lis: | $1\,x_1 + 2\,x_2 \le 120$ [min] |
| Balení: | $1\,x_1 + 4\,x_2 \le 180$ [min] |
| Poptávka: | $1\,x_1 - 1\,x_2 \ge 90$ [krabiček] |
| Šroubky: | $1\,x_1 + 0\,x_2 \le 110$ [krabiček] |
| Nezápornost: | $x_1, x_2 \ge 0$ [krabiček] |
| | |
| Zisk: | $z_1 = 40\,x_1 + 60\,x_2$ ... max [Kč] |
| Šroubky: | $z_2 = x_1$ ... min [krab.] |




$40\ x_1 + 60\ x_2$ … max

$x_1$ … min

# 10.2 Vícekriteriální programování

- Úloha vícekriteriálního programování (VP) je dána:
  - Množinou kriteriálních (účelových) funkcí jejich extrémy (min/max): $z_1, z_2, \dots, z_k$
  - Množinou přípustných řešení: $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$

# 10.2 Vícekriteriální programování

- *Příklad:*

| | |
|---|---|
| Lis: | $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min] |
| Balení: | $1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min] |
| Poptávka: | $1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček] |
| Šroubky: | $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček] |
| Nezápornost: | $x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček] |
| Zisk: | $z_1 = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč] |
| Šroubky: | $z_2 = x_1 \ldots \min$ [krab.] |

- Jak vypadá vektor kriteriálních hodnot pro $\mathbf{x} = (100, 10)^{\mathrm{T}}$ a pro $\mathbf{x} = (110, 5)^{\mathrm{T}}$?

# Úloha matematického programování

- Matematický model úlohy matematického programování

maximalizovat (minimalizovat)

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

za podmínek

$$\begin{gathered} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \end{gathered}$$

# 10.2 Vícekriteriální programování

## Úloha vícekriteriálního programování:

"maximalizovat (minimalizovat)"

$$z_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$z_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$z_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

za podmínek

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0,$$
$$g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0,$$
$$\vdots$$
$$g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0,$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}$$

# 10.2 Vícekriteriální programování

- *Příklad:*

| | |
|---|---|
| Lis: | $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min] |
| Balení: | $1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min] |
| Poptávka: | $1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček] |
| Šroubky: | $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček] |
| Nezápornost: | $x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček] |
| | |
| Zisk: | $z_1 = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč] |
| Šroubky: | $z_2 = x_1 \ldots \min$ [krab.] |

- Kolik má úloha řešení a kolik kritérií?
- Jaké jsou hledané extrémy?

# 10.2 Vícekriteriální programování

- *Příklad:*

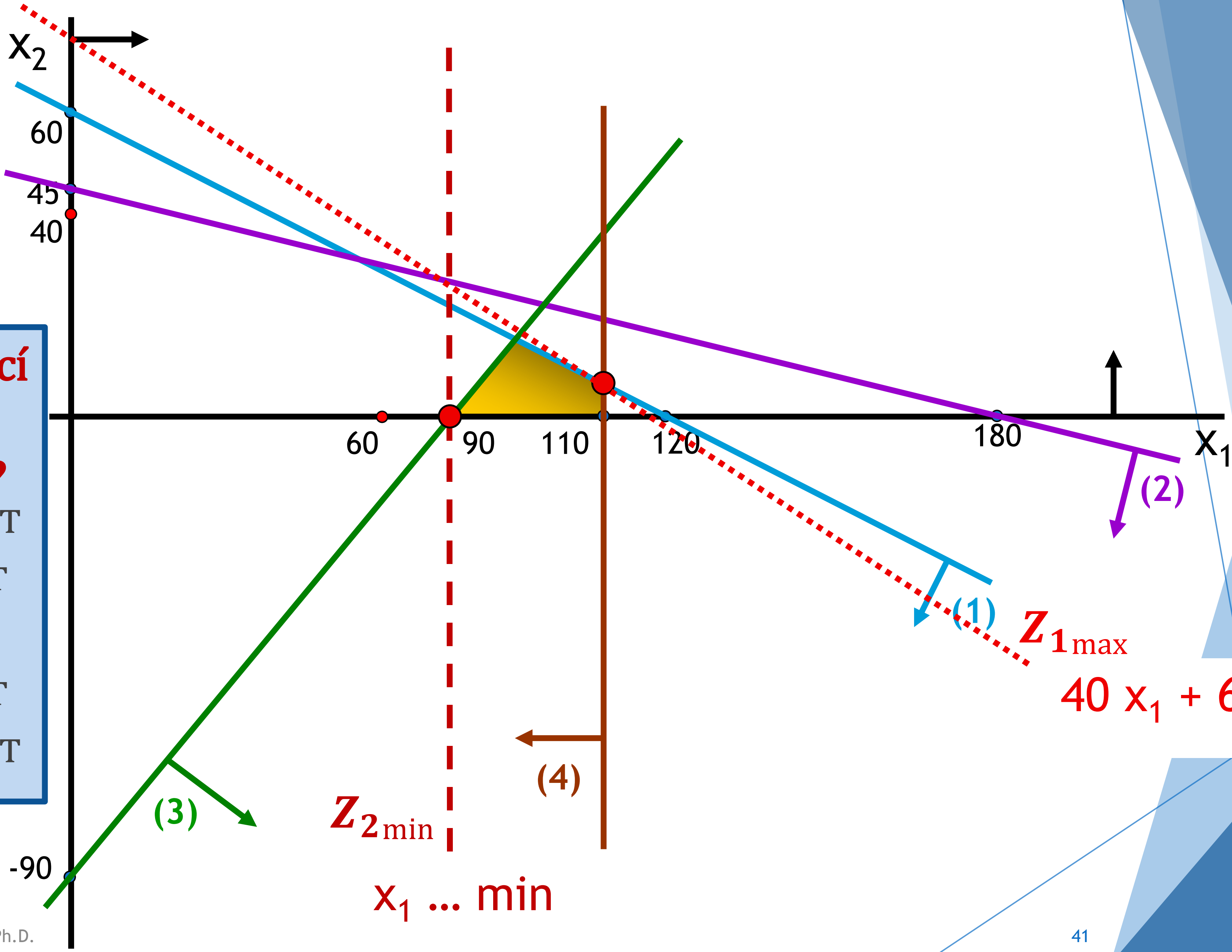
$$\mathbf{x} = (90, 0)^{\mathrm{T}} \rightarrow z = (3600, \; 90)$$
$$\mathbf{x} = (110, 0)^{\mathrm{T}} \rightarrow z = (4400, 110)$$
$$\mathbf{x} = (100, 10)^{\mathrm{T}} \rightarrow z = (4600, 100)$$
$$\mathbf{x} = (110, 5)^{\mathrm{T}} \rightarrow z = (4700, 110)$$

| | |
|---|---|
| Lis: | $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min] |
| Balení: | $1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min] |
| Poptávka: | $1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček] |
| Šroubky: | $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček] |
| Nezápornost: | $x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček] |
| Zisk: | $z_1 = 40\,x_1 + 60\,x_2$ … max [Kč] |
| Šroubky: | $z_2 = x_1$ … min [krab.] |

- Které řešení nevybereme?
- Dominované řešení

# 10.2 Vícekriteriální programování

- Dominované řešení
  - Je takové řešení, ke kterému existuje jiné <u>přípustné</u> řešení,
    - které podle žádné účelové funkce <u>není horší</u>,
    - a alespoň podle jedné je <u>hodnoceno lépe</u>
- Toto „jiné“ řešení se nazývá dominující
- Řešení, které není dominováno žádným jiným přípustným řešením = nedominované




**Jsou následující řešení dominovaná?**

$\mathbf{x} = (100, 10)^T$

$\mathbf{x} = (110, 5)^T$

$\mathbf{x} = (90, 0)^T$

$\mathbf{x} = (100, 5)^T$

$\mathbf{x} = (110, 40)^T$

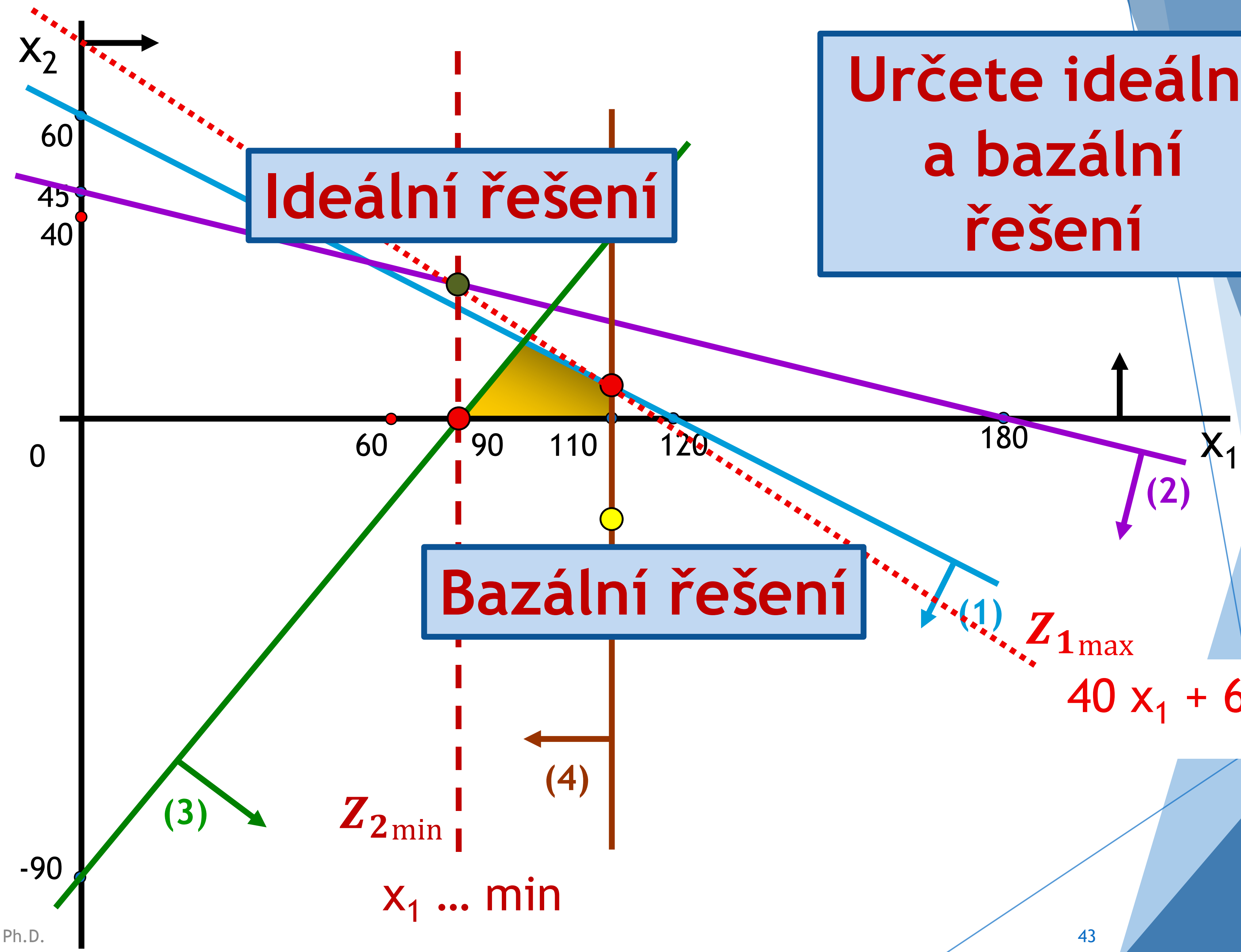
$40\ x_1 + 60\ x_2$ … max

$x_1$ … min

# 10.2 Vícekriteriální programování

- Ideální řešení = řešení, které dosahuje ve všech kritériích nejlepších hodnot
- Bazální řešení = řešení, které dosahuje ve všech kritériích nejhorších možných hodnot

# Určete ideální a bazální řešení




$40\ x_1 + 60\ x_2$ … max

# 10.2 Vícekriteriální programování

**Metoda váženého součtu**

- Předpokládejme, že všechny účelové funkce jsou maximalizační
- Co když nejsou?

# 10.2 Vícekriteriální programování

## Převod minimalizační účelové funkce $z_j$ na maximalizační

- Vyberme nejhorší možnost $d_j = \max_x z_j$
- Všechny kriteriální hodnoty kritéria $z_j$ nahradíme úsporou vůči této nejhorší možnosti, tj.

$$\tilde{z}_j = d_j - z_j$$

# 10.2 Vícekriteriální programování

## <u>Metoda váženého součtu</u>

- Krok 1: Určení bazální a ideální varianty

$$d_j = \min_x z_j$$

$$h_j = \max_x z_j$$

- Krok 2: Normalizace kriteriálních hodnot

$$r_j = \frac{z_j - d_j}{h_j - d_j}$$

# 10.2 Vícekriteriální programování

## Metoda váženého součtu

- Krok 3: Výpočet celkového užitku

$$u = \sum_{j=1}^{k} v_j \cdot r_j$$

- Krok 4: Maximalizace užitku

$$u \rightarrow max$$

# Detaily k přednášce: skripta, kapitola 13

# KONEC