4EK212 – Kvantitativní management

5. Celočíselné programování - opakování

5.1 Matematický model úlohy ILP

- Nalézt **extrém účelové funkce**

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots + c_nx_n$$

na soustavě vlastních omezení

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ \dots + a_{1n}x_n \mathbf{R}\ b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ \dots + a_{2n}x_n \mathbf{R}\ b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ \dots + a_{3n}x_n \mathbf{R}\ b_3$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ \dots + a_{mn}x_n \mathbf{R}\ b_m$$

za podmínek nezápornosti

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Úloha LP

5.1 Matematický model úlohy ILP

- Nalézt **extrém účelové funkce**

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots + c_nx_n$$

na soustavě vlastních omezení

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ \dots + a_{1n}x_n \mathbf{R}\, b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ \dots + a_{2n}x_n \mathbf{R}\, b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ \dots + a_{3n}x_n \mathbf{R}\, b_3$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ \dots + a_{mn}x_n \mathbf{R}\, b_m$$

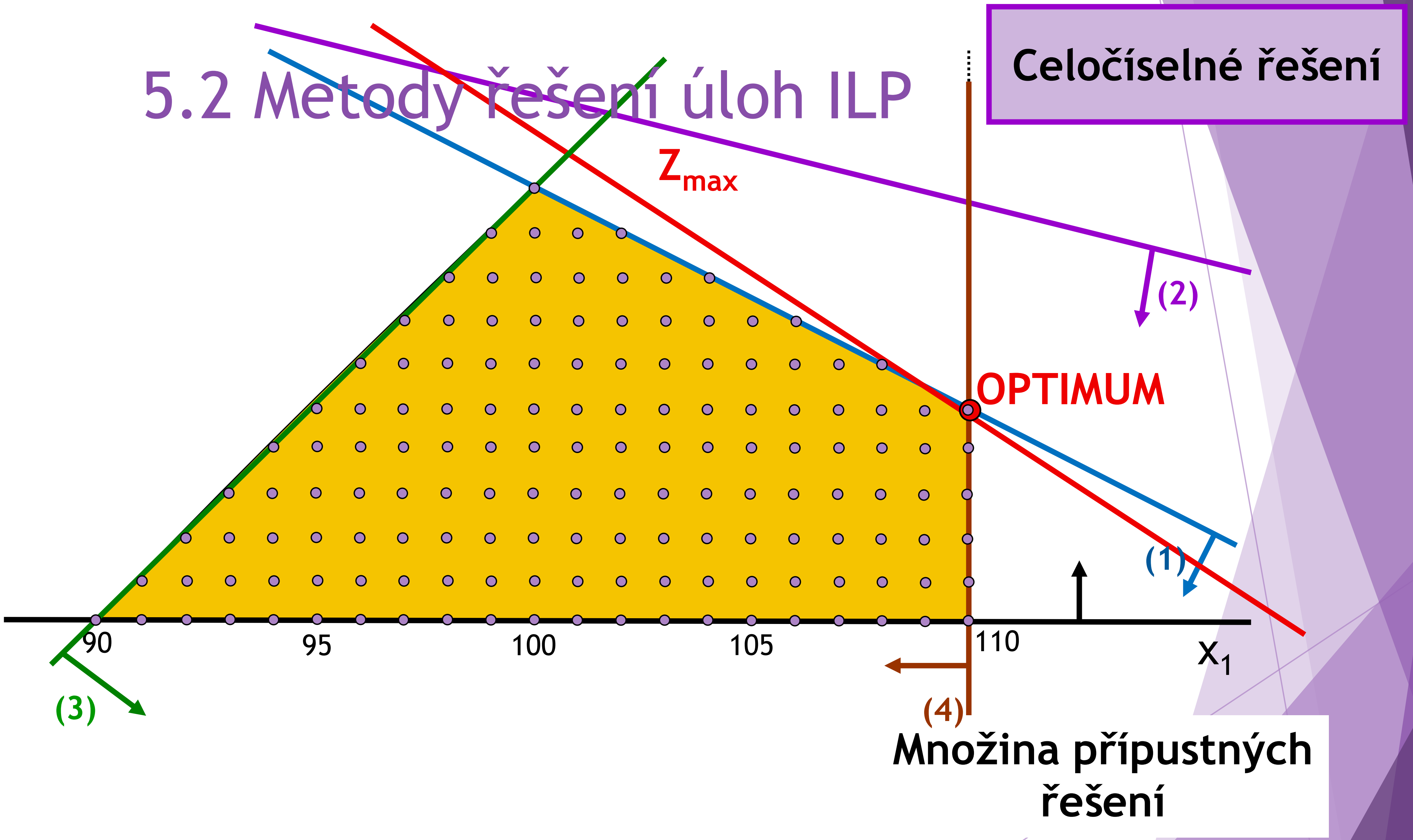
za podmínek nezápornosti

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\boldsymbol{x_j} \ \mathbf{- \text{celé}}, \boldsymbol{j} \mathbf{= 1, 2, \dots, n}$$

Úloha ILP

5.2 Metody řešení úloh ILP



5.2 Metody řešení úloh ILP

- **Metody pro řešení úloh LP**
  - Pokud je nalezené OŘ úlohy LP celočíselné, je zároveň OŘ úlohy ILP
  - Pokud celočíselné není, musíme použít některou metodu pro ILP

Můžeme výsledek zaokrouhlit?

5.2 Metody řešení úloh ILP

- **Metody pro řešení úloh LP**
  - Pokud je nalezené OŘ úlohy LP celočíselné, je zároveň OŘ úlohy ILP
- **Metody pro řešení úloh ILP**
  - Grafické řešení
  - Metody řezných nadrovin (Gomoryho metoda)
  - Kombinatorické metody (metoda větvení a mezí)
  - Dekompoziční metody
  - Heuristické metody

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - větve a meze**

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\
x_1 \phantom{{}+5x_2} &\le 3 \\
x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0&\ \text{, celé} \\
z = 9x_1 + 10x_2 &\ \ldots \text{ max.}
\end{aligned}
$$

- **Označme tuto úlohu LP$^{(0)}$**

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - větve a meze**
  - Řešení úlohy LP$^{(0)}$ simplexovou metodou
  - Např. pomocí LINGO či graficky
  - Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (3, 9/5)^{\mathrm{T}}, z^{(0)} = 45$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 &\le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0&,\ \text{celé} \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \max. \end{aligned}$$

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - meze**
  - Optimální řešení

$$\mathbf{x}^{(0)} = (3, 9/5)^{\mathrm{T}}, z^{(0)} = 45$$

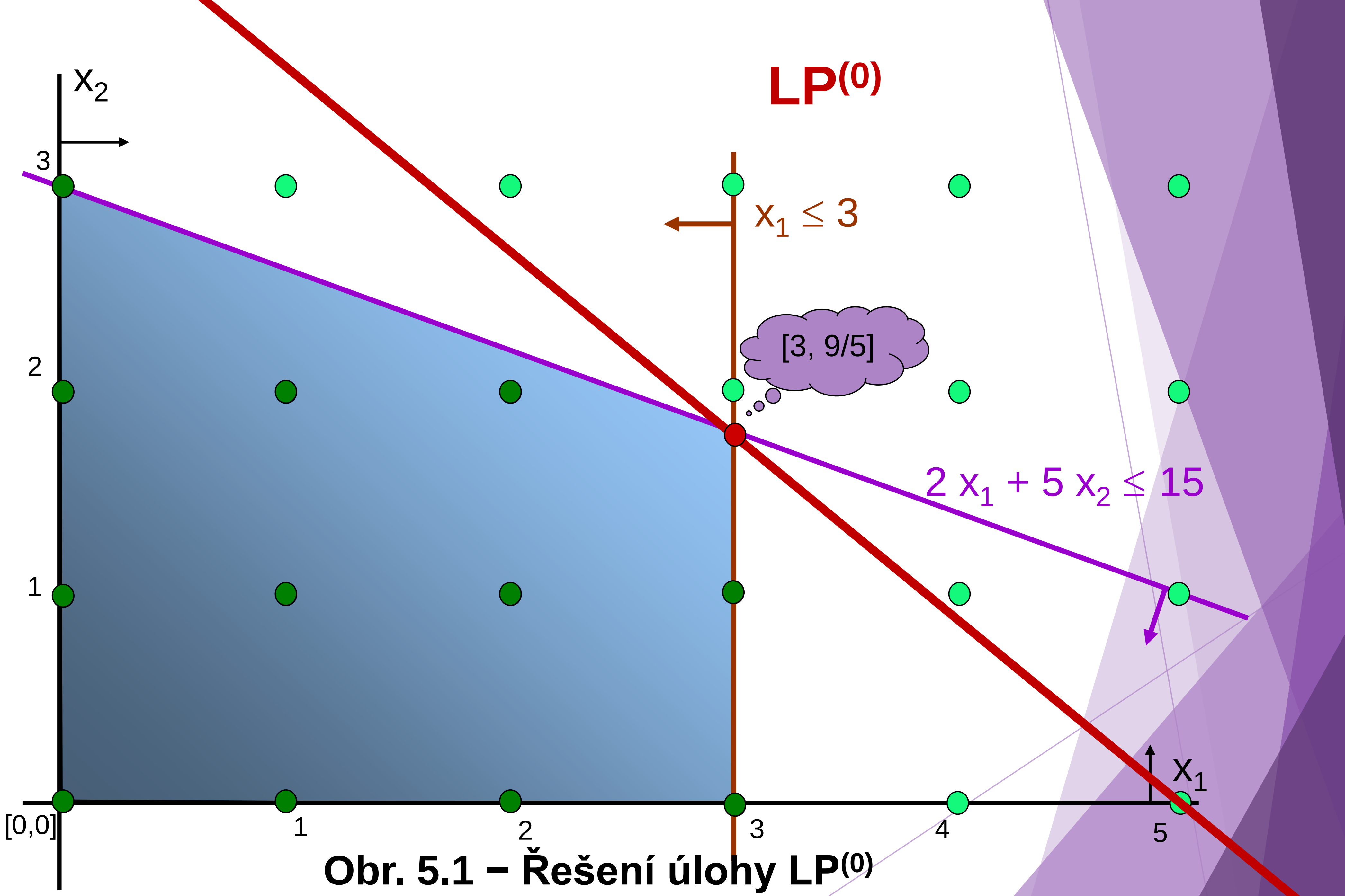
není celočíselné

  - Hodnota účelové funkce

$$z^{(0)} = h^{(0)} = [45]$$

je **horní mezí** hodnoty účelové funkce celočíselné úlohy

  - Řešení úlohy znázorníme graficky



Obr. 5.1 – Řešení úlohy LP$^{(0)}$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \text{, celé}$$
$$z = 9x_1 + 10x_2 \ldots \max.$$

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - větvení**
  - $\mathbf{x}^{(0)} = (3, 9/5)^{\mathrm{T}}, z^{(0)} = 45$
  - Proměnná x_2 porušuje podmínku celočíselnosti, vybereme ji jako **větvící proměnnou**
  - Vytvoříme **levou větev:** $x_2 \leq [x_2]$**, tj.**

    $$x_2 \leq 1$$
  - a **pravou větev:** $x_2 \geq [x_2] + 1$**, tj.**

    $$x_2 \geq 2$$
- Formulujeme úlohy $\mathrm{LP}^{(1)}$ a $\mathrm{LP}^{(2)}$

5.3 Metoda větvení a mezí

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 &\le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0\text{, celé} \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \max. \end{aligned}$$

- **Příklad - větvení úlohy LP$^{(0)}$**

Levá větev: LP$^{(1)}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 &\le 3 \\ \boldsymbol{x_2} &\le \mathbf{1} \\ x_j &\ge 0 \\ j &= 1,2 \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \max. \end{aligned}$$

Pravá větev: LP$^{(2)}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 &\le 3 \\ \boldsymbol{x_2} &\ge \mathbf{2} \\ x_j &\ge 0 \\ j &= 1,2 \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \max. \end{aligned}$$

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(1)}$**
- Optimální řešení úlohy **LP$^{(1)}$** je celočíselné:

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{3}, \mathbf{1})^{\mathrm{T}},\ z^{(1)} = 37$$

- Dosadíme $z^* = \mathbf{37}$

Je to OŘ?

KONEC VĚTVE

$LP^{(0)}$

$\mathbf{x}^{(0)} = (3;\ \mathbf{9/5})$

$z^{(0)} = 45$

Mez = 45

$x_2 \leq 1$

$x_2 \geq 2$

$LP^{(1)}$

$\mathbf{x}^{(1)} = (3;\ 1)$

$z^{(1)} = 37$

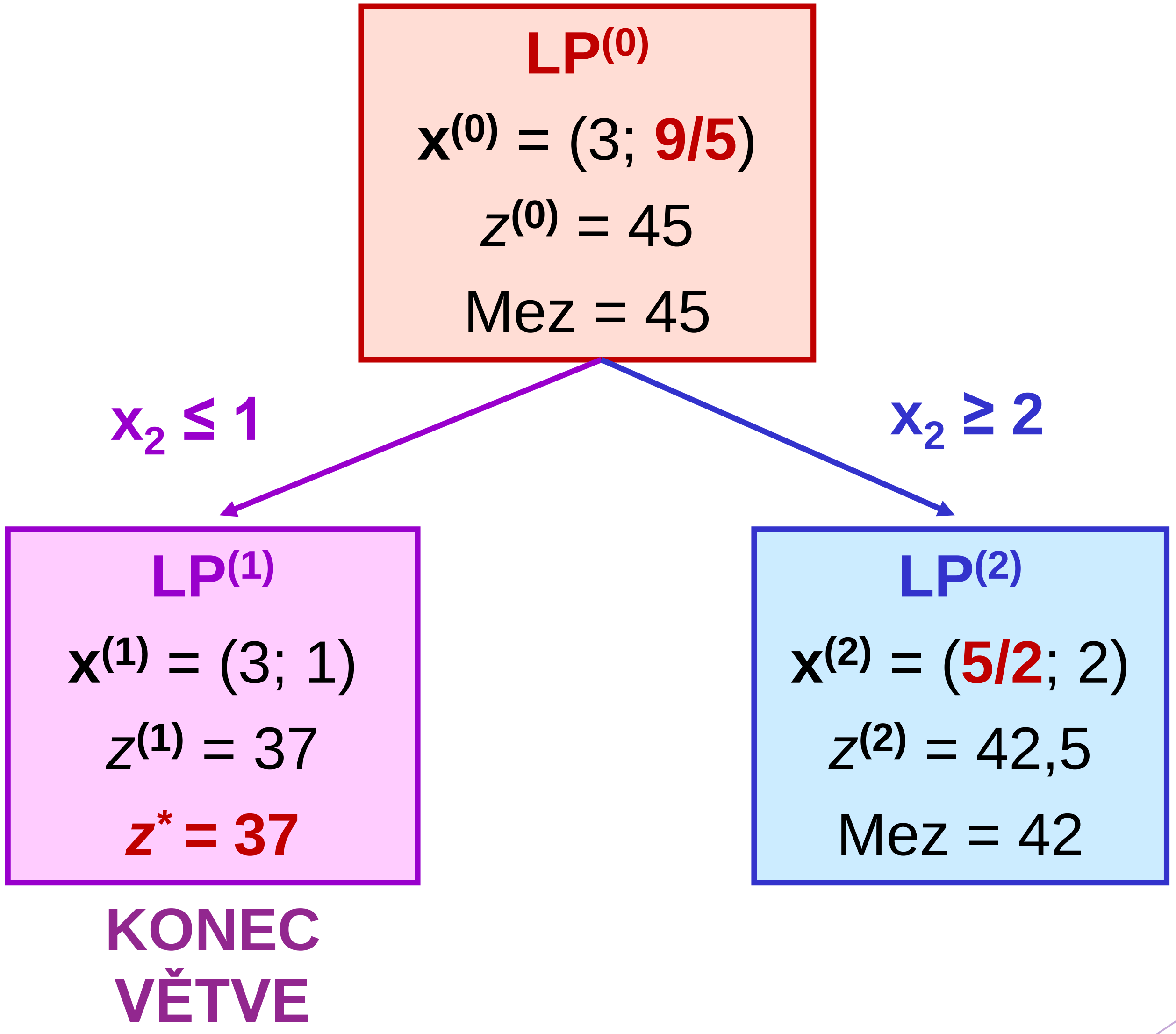
$\boldsymbol{z^{*} = 37}$

KONEC VĚTVE

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(2)}$**
- Optimální řešení úlohy **LP$^{(2)}$** není celočíselné:

$$\mathbf{x}^{(2)} = (5/2,\ 2),\ \mathbf{z}^{(2)} = 85/2 = 42{,}5$$



$LP^{(0)}$
$\mathbf{x}^{(0)} = (3;\ 9/5)$
$z^{(0)} = 45$
Mez = 45
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
$LP^{(1)}$
$\mathbf{x}^{(1)} = (3;\ 1)$
$z^{(1)} = 37$
$z^{*} = 37$
KONEC VĚTVE
$LP^{(2)}$
$\mathbf{x}^{(2)} = (5/2;\ 2)$
$z^{(2)} = 42{,}5$
Mez = 42

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(3)}$**
- Optimální řešení úlohy **LP$^{(3)}$** není celočíselné:

$$x^{(3)}=(2, 11/5),\ z^{(3)} = 40$$

$LP^{(0)}$

$x^{(0)} = (3; 9/5)$

$z^{(0)} = 45$

Mez = 45

$x_2 \leq 1$

$LP^{(1)}$

$x^{(1)} = (3; 1)$

$z^{(1)} = 37$

$z^* = 37$

KONEC VĚTVE

$x_2 \geq 2$

$LP^{(2)}$

$x^{(2)} = (5/2; 2)$

$z^{(2)} = 42{,}5$

Mez = 42

$x_1 \leq 2$

$LP^{(3)}$

$x^{(3)} = (2; 11/5)$

$z^{(3)} = 40$

Mez = 40

Kudy dál?

5.3 Metoda větvení a mezí

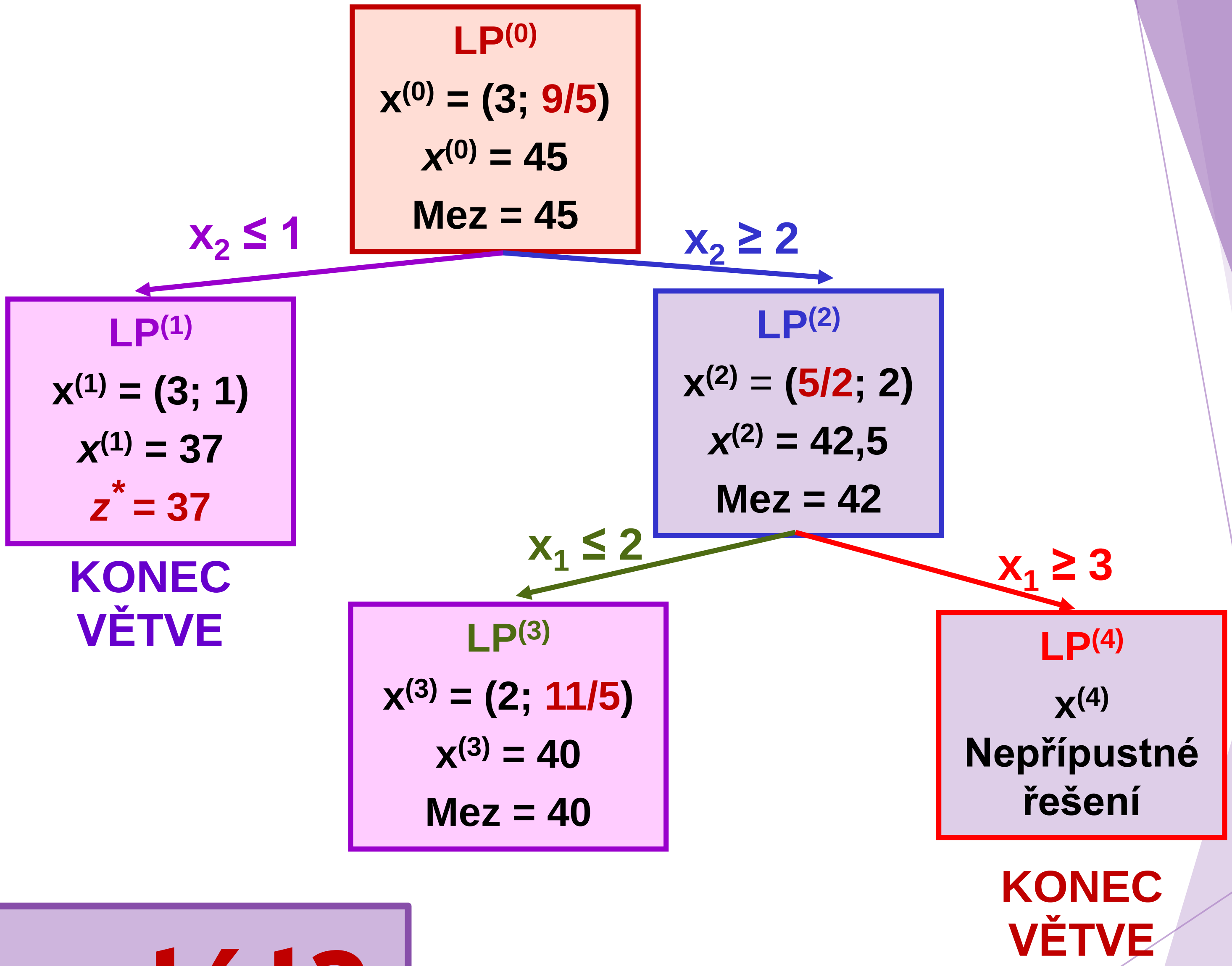
- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(4)}$**
- Úloha LP$^{(4)}$ **má vyšší horní mez** než úlohy vzniklé větvením LP$^{(3)}$

11.2 Metoda větví a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(4)}$**
- K OŘ úlohy **LP$^{(2)}$** přidáme omezení $x_1 \geq 3$

Úloha LP$^{(4)}$ nemá žádné přípustné (ani optimální) řešení

KONEC VĚTVE



LP(0)
x(0) = (3; 9/5)
x(0) = 45
Mez = 45
x2 ≤ 1
x2 ≥ 2
LP(1)
x(1) = (3; 1)
x(1) = 37
z* = 37
KONEC VĚTVE
LP(2)
x(2) = (5/2; 2)
x(2) = 42,5
Mez = 42
x1 ≤ 2
x1 ≥ 3
LP(3)
x(3) = (2; 11/5)
x(3) = 40
Mez = 40
LP(4)
x(4)
Nepřípustné řešení
KONEC VĚTVE

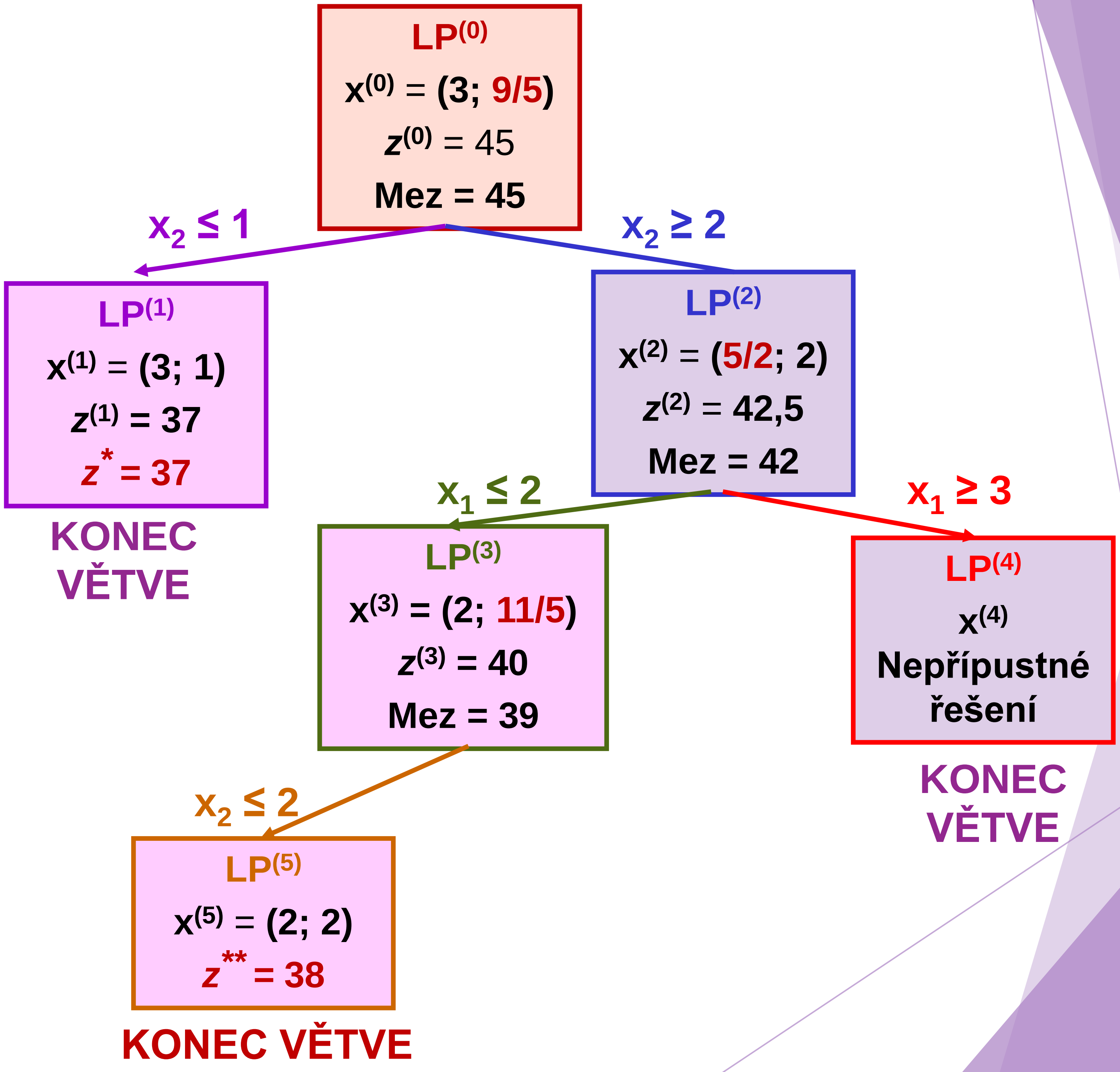
Kudy dál?

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(5)}$**
- K OŘ úlohy **LP$^{(3)}$** přidáme omezení $x_2 \leq 2$
- Optimální řešení úlohy **LP$^{(5)}$** je celočíselné:

$$x^{(5)} = (2, 2),\ z^{(5)} = 38$$

KONEC VĚTVE


$LP^{(0)}$
$x^{(0)} = (3; 9/5)$
$z^{(0)} = 45$
Mez = 45
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
$LP^{(1)}$
$x^{(1)} = (3; 1)$
$z^{(1)} = 37$
$z^{*} = 37$
KONEC VĚTVE
$LP^{(2)}$
$x^{(2)} = (5/2; 2)$
$z^{(2)} = 42{,}5$
Mez = 42
$x_1 \leq 2$
$x_1 \geq 3$
$LP^{(3)}$
$x^{(3)} = (2; 11/5)$
$z^{(3)} = 40$
Mez = 39
$LP^{(4)}$
$x^{(4)}$
Nepřípustné řešení
KONEC VĚTVE
$x_2 \leq 2$
$LP^{(5)}$
$x^{(5)} = (2; 2)$
$z^{**} = 38$
KONEC VĚTVE

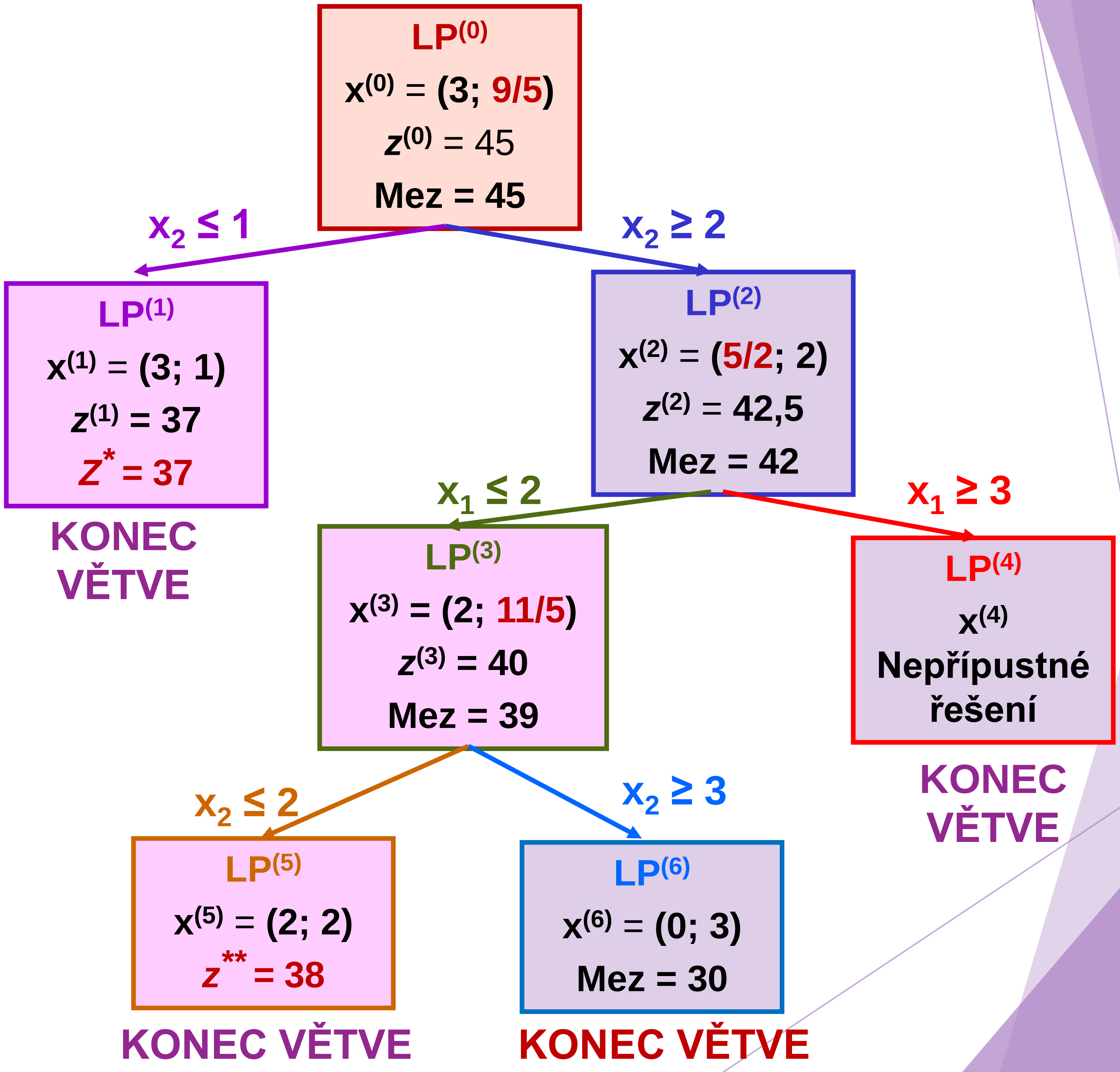
5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(6)}$**
- K OŘ úlohy LP$^{(3)}$ přidáme omezení $x_2 \geq 3$
- Optimální řešení úlohy LP$^{(6)}$ je celočíselné:

$$x^{(6)} = (0, 3),\ z^{(6)} = 30$$

- $h^{(6)} = 30 < z^{**} = 38$

KONEC VĚTVE


LP(0)
x(0) = (3; 9/5)
z(0) = 45
Mez = 45
x2 ≤ 1
x2 ≥ 2
LP(1)
x(1) = (3; 1)
z(1) = 37
Z* = 37
KONEC VĚTVE
LP(2)
x(2) = (5/2; 2)
z(2) = 42,5
Mez = 42
x1 ≤ 2
x1 ≥ 3
LP(3)
x(3) = (2; 11/5)
z(3) = 40
Mez = 39
LP(4)
x(4)
Nepřípustné řešení
KONEC VĚTVE
x2 ≤ 2
x2 ≥ 3
LP(5)
x(5) = (2; 2)
z** = 38
LP(6)
x(6) = (0; 3)
Mez = 30
KONEC VĚTVE
KONEC VĚTVE

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - zakončení výpočtu**
- Všechny větve jsou ukončeny
- Optimální hodnota účelové funkce celočíselné úlohy

$$z^{**} = 38$$

- Optimálním řešením úlohy ILP je

$$x^{(5)} = (2, 2),\ z^{(5)} = 38$$

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Zakončení větve**
- Nalezeno celočíselné (tedy přípustné) řešení
- Neexistuje žádné přípustné řešení
- Řešení je neceločíselné a má příliš nízkou (max) hodnotu a tedy i mez případného přípustného řešení

Detaily k přednášce: skripta

KONEC

4EK212 – Kvantitativní management

6. Teorie grafů a úvod k řízení projektů

6. Teorie grafů – definice grafu

- Graf G = uspořádaná dvojice (V, E), kde
  - V označuje množinu n uzlů $u_1, u_2, \dots, u_n$ $(u_i, i = 1, 2, \dots, n)$ a
  - E označuje množinu hran h_{ij}, kde h_{ij} je hrana mezi uzlem u_i a u_j

- Příklad:
  - G - Distribuční síť (V - centra, E - spojnic mezi centry)
  - G - Silniční síť (V – křižovatky, E - silnice)
  - G - Říční, kanalizační síť (V - soutoky, E - řeky)

6. Teorie grafů - hrana

- **Neorientovaná hrana** h_{ij} = pohyb, průtok hranou je povolen oběma směry

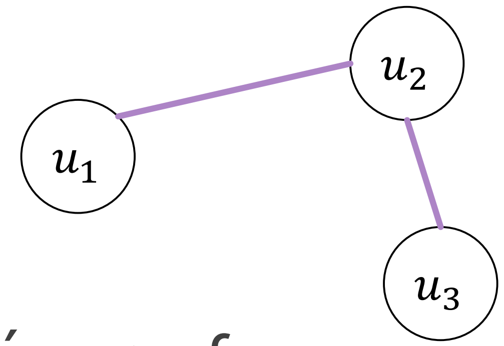
  - Neorientovaný graf = obsahuje pouze neorientované hrany

- **Orientovaná hrana** h_{ij} = pohyb, průtok hranou je povolen jen v jednom směru

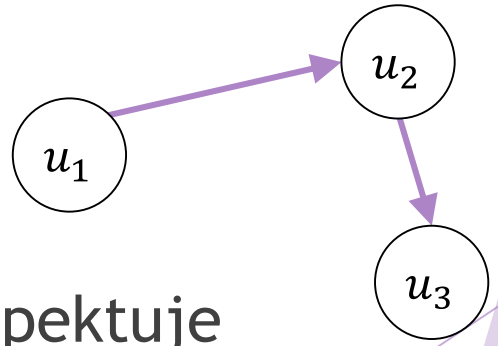
  - Orientovaný graf = obsahuje alespoň jednu orientovanou hranu

6. Teorie grafů - cesta

- **Cesta** z uzlu u_i do uzlu u_j = posloupnost hran
  - Hrany na sebe navzájem navazují
  - Posloupnost začíná v uzlu u_i
  - Posloupnost končí v uzlu u_j

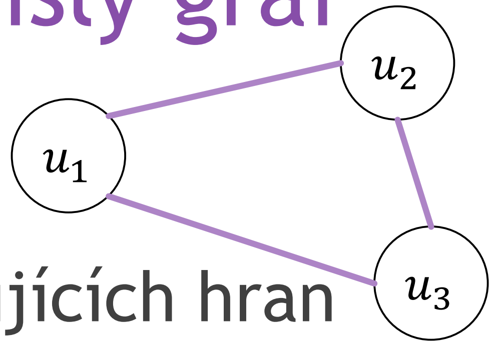


- **Orientovaná cesta** = cesta v orientovaném grafu, která respektuje povolenou orientaci



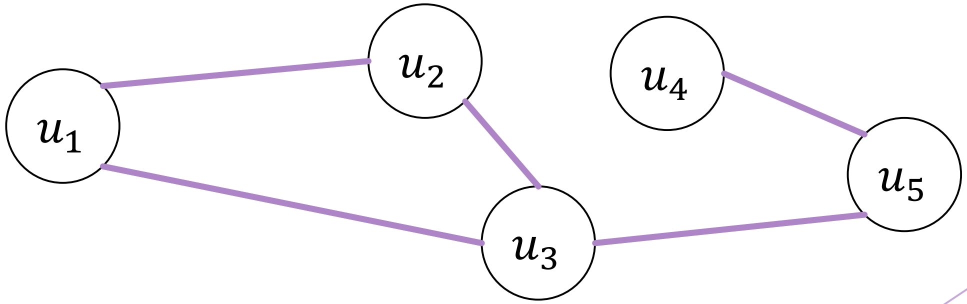
- **Neorientovaná cesta**
  - = cesta v neorientovaném grafu nebo
  - = cesta v orientovaném grafu, která nerespektuje povolenou orientaci

6. Teorie grafů – cyklus, souvislý graf



- **Cyklus** = speciální případ cesty
  - Posloupnost na sebe navzájem navazujících hran
  - Posloupnost začíná v uzlu u_i
  - Posloupnost končí ve stejném uzlu u_i, kde začala

- **Souvislý graf** = graf, ve kterém mezi každou dvojicí uzlů existuje nějaká neorientovaná cesta



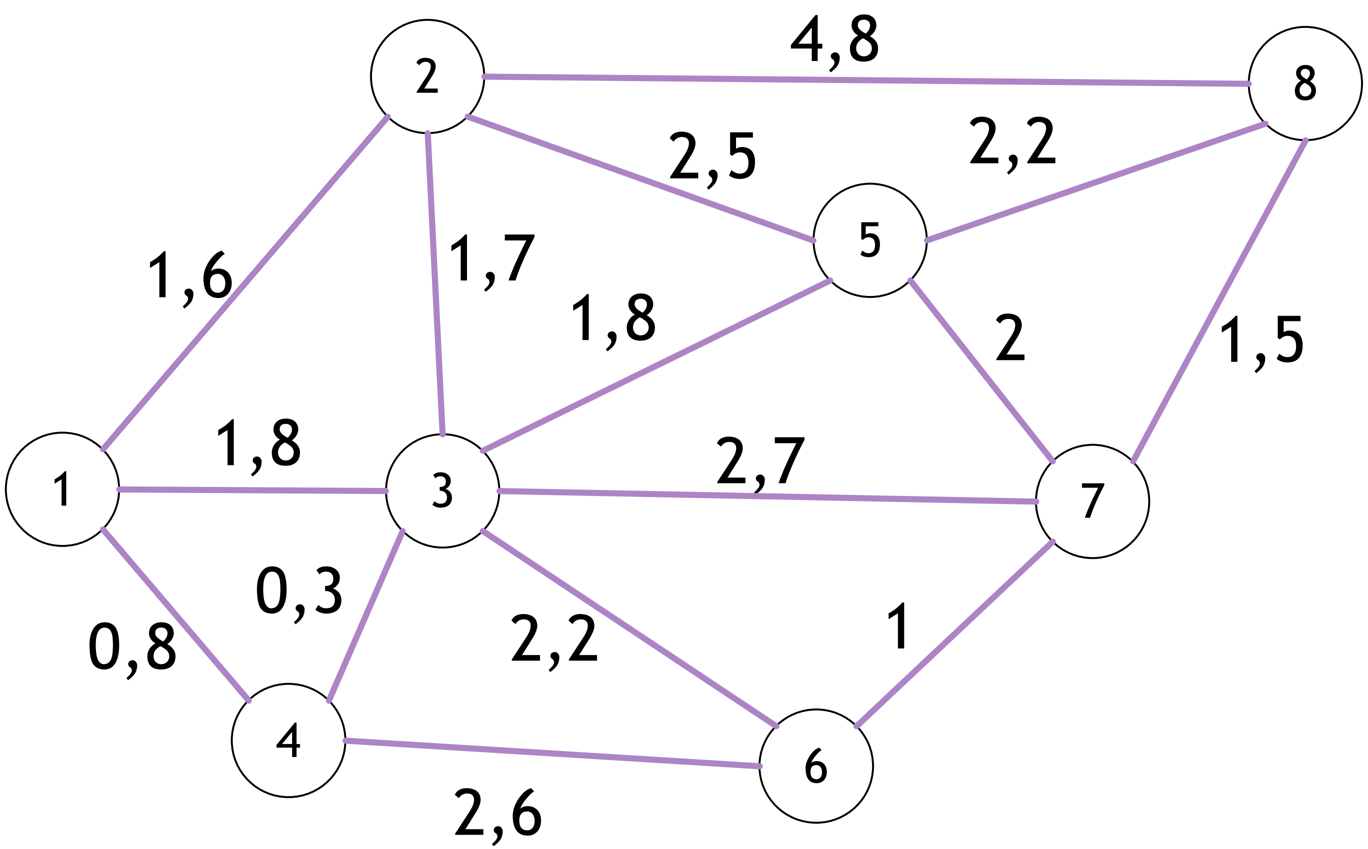
6. Teorie grafů – ohodnocení

- Hrana h_{ij} je grafickým zobrazením pro spojení uzlů
  - Např. silnice, řeka, kanalizace, el. vedení apod.
  - Činnost (řízení projektů)

- Hranu můžeme ohodnotit
  - Např. délka, průtok, doba trvání, náklady, apod.
- Takovou charakteristiku nazveme ohodnocení hrany
- Hranově ohodnocený graf = graf, ve kterém jsou všechny hrany ohodnoceny

- Podobně můžeme ohodnotit uzly
- Uzlově ohodnocený graf = graf, ve kterém jsou všechny uzly ohodnoceny

6.1 Nejkratší cesta



Nejkratší cesta	? km

6.1 Nejkratší cesta [100 m]

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i								
$j\ (y_{ij})$	2 (16)	1 (16)	1 (18)	1 (8)	2 (25)	3 (22)	3 (27)	2 (48)
	3 (18)	3 (17)	2 (17)	3 (3)	3 (18)	4 (26)	5 (20)	5 (22)
	4 (8)	5 (25)	4 (3)	6 (26)	7 (20)	7 (10)	6 (10)	7 (15)
		8 (48)	5 (18)		8 (22)		8 (15)	
			6 (22)					
			7 (27)					

<u>Pro jednoduchost výkladu:</u> 100 m = 0,1 km … při rychlosti 6 km/h,
tj. 6000 m / 60 min. … **ujdeme 100 m ≈ 1 min**

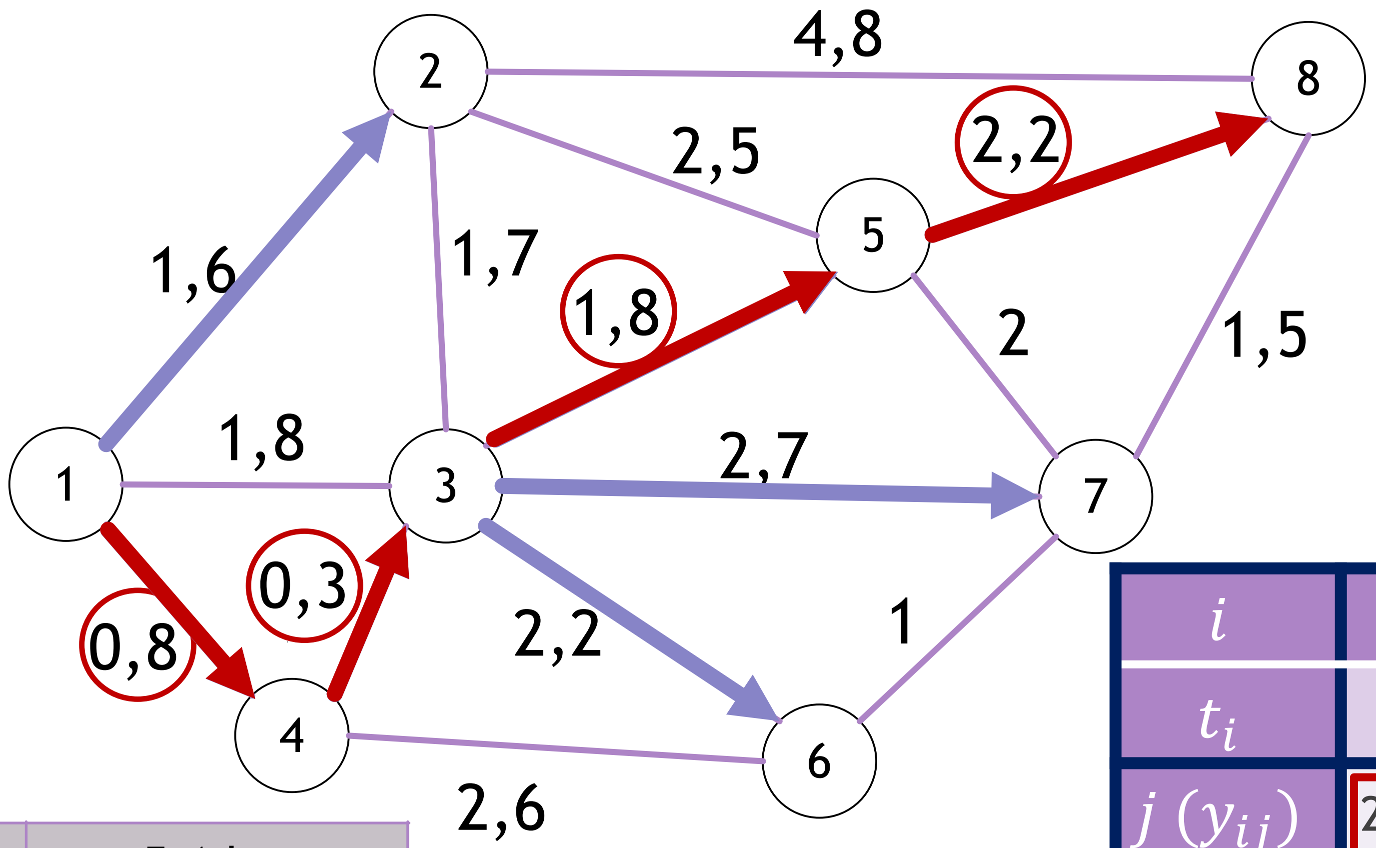
(údaje jsou tedy ve <u>100 m nebo v min.</u>)

6.1 Nejkratší cesta [100 m, minuty]

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i								
$j\ (y_{ij})$	2 (16)	~~1 (16)~~	~~1 (18)~~	~~1 (8)~~	~~2 (25)~~	~~3 (22)~~	~~3 (27)~~	~~2 (48)~~
	~~3 (18)~~	~~3 (17)~~	~~2 (17)~~	3 (3)	~~3 (18)~~	~~4 (26)~~	~~5 (20)~~	~~5 (22)~~
	4 (8)	~~5 (25)~~	~~4 (3)~~	~~6 (26)~~	~~7 (20)~~	~~7 (10)~~	~~6 (10)~~	~~7 (15)~~
		~~8 (48)~~	5 (18)		8 (22)		~~8 (15)~~	
			6 (22)					
			7 (27)					

Nejkratší cesta z u_1 do u_8	5100 m = 5,1 km

6.1 Nejkratší cesta [km]



i	1	3	4	5
t_i	0	11	8	29
$j\ (y_{ij})$	2 (16)	5 (18)	3 (3)	8 (22)
	4 (8)	6 (22)		
		7 (27)		

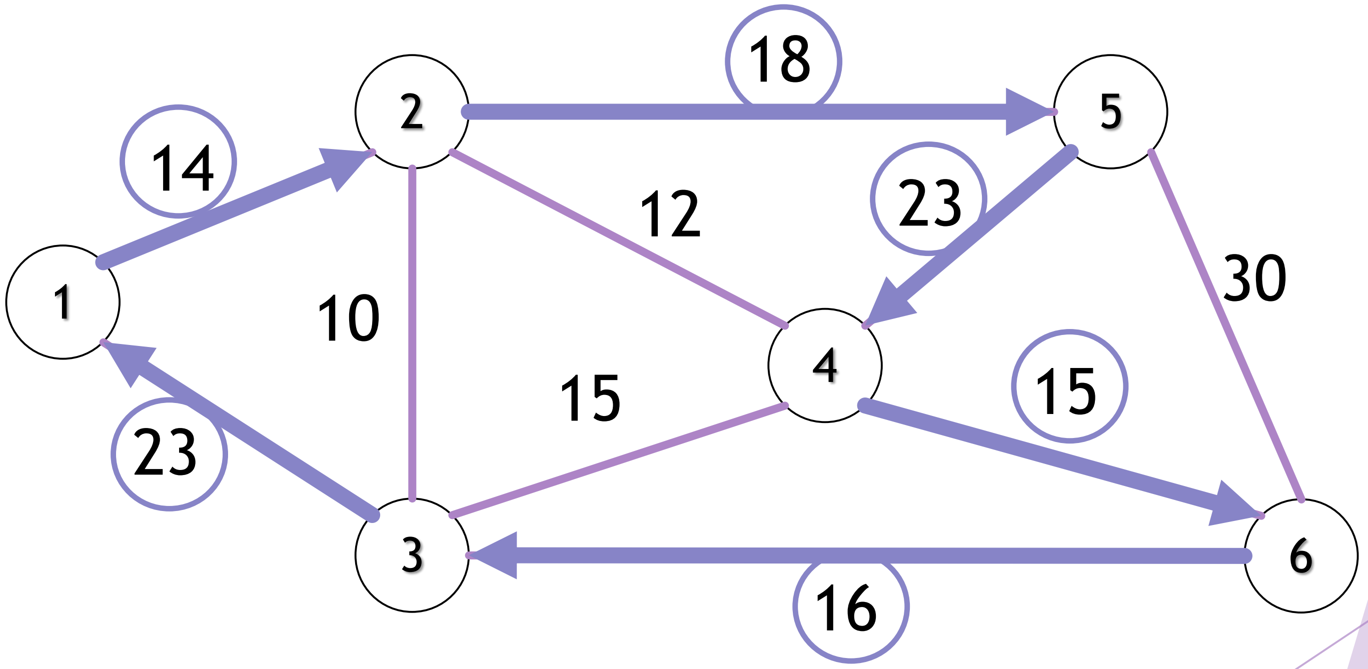
Nejkratší cesta	5,1 km

6.1 Nejkratší cesta [100 m, minuty]

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	x	16	11	8	29	33	38	51
2	16	x	17	20	25	39	44	47
3	11	17	x	3	18	22	27	40
4	8	20	3	x	21	25	30	43
5	29	25	18	21	x	30	20	22
6	33	39	22	25	30	x	10	25
7	38	44	27	30	20	10	x	15
8	51	47	40	43	22	25	15	x

6.2 Nejkratší okruh

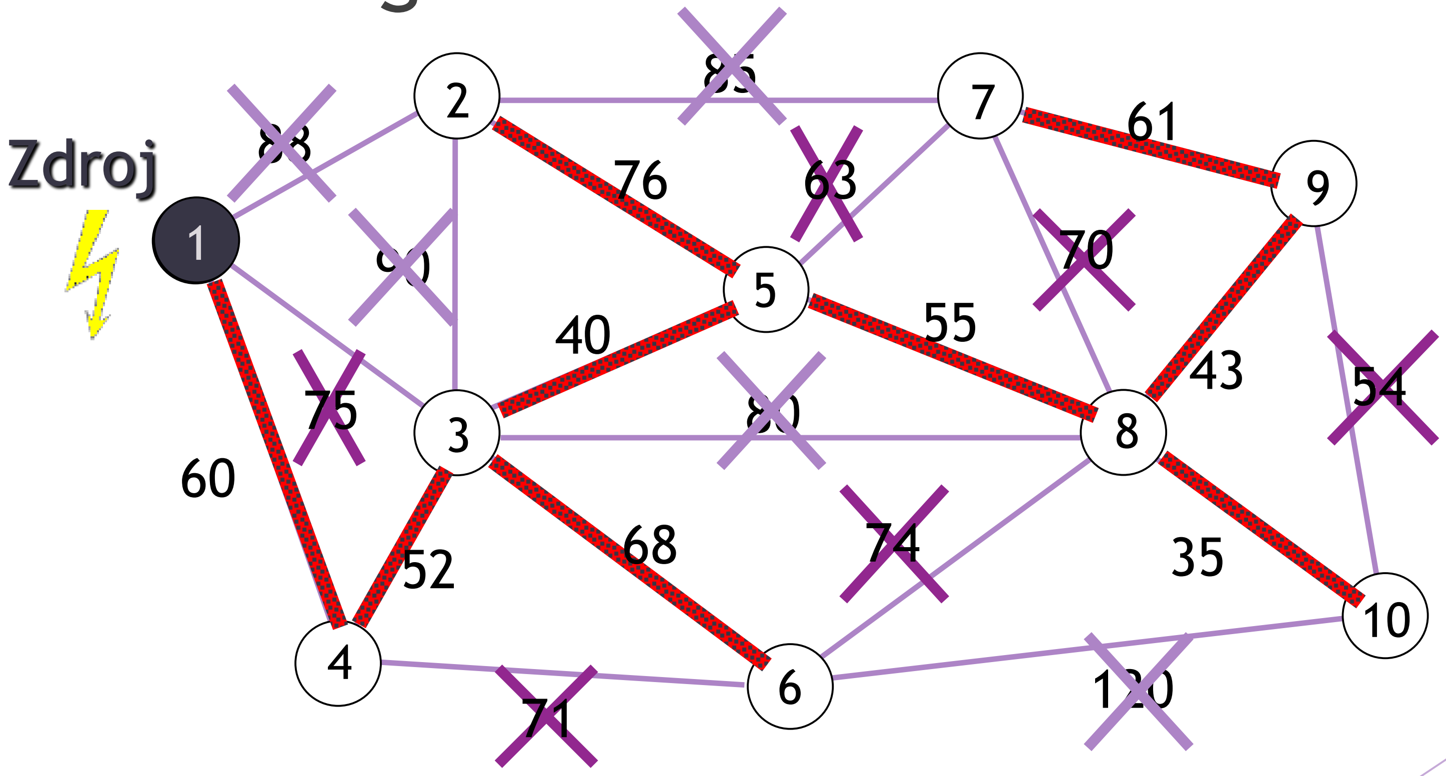
- Úloha obchodního cestujícího, okružní dopravní problém



Nejkratší okruh	109 km

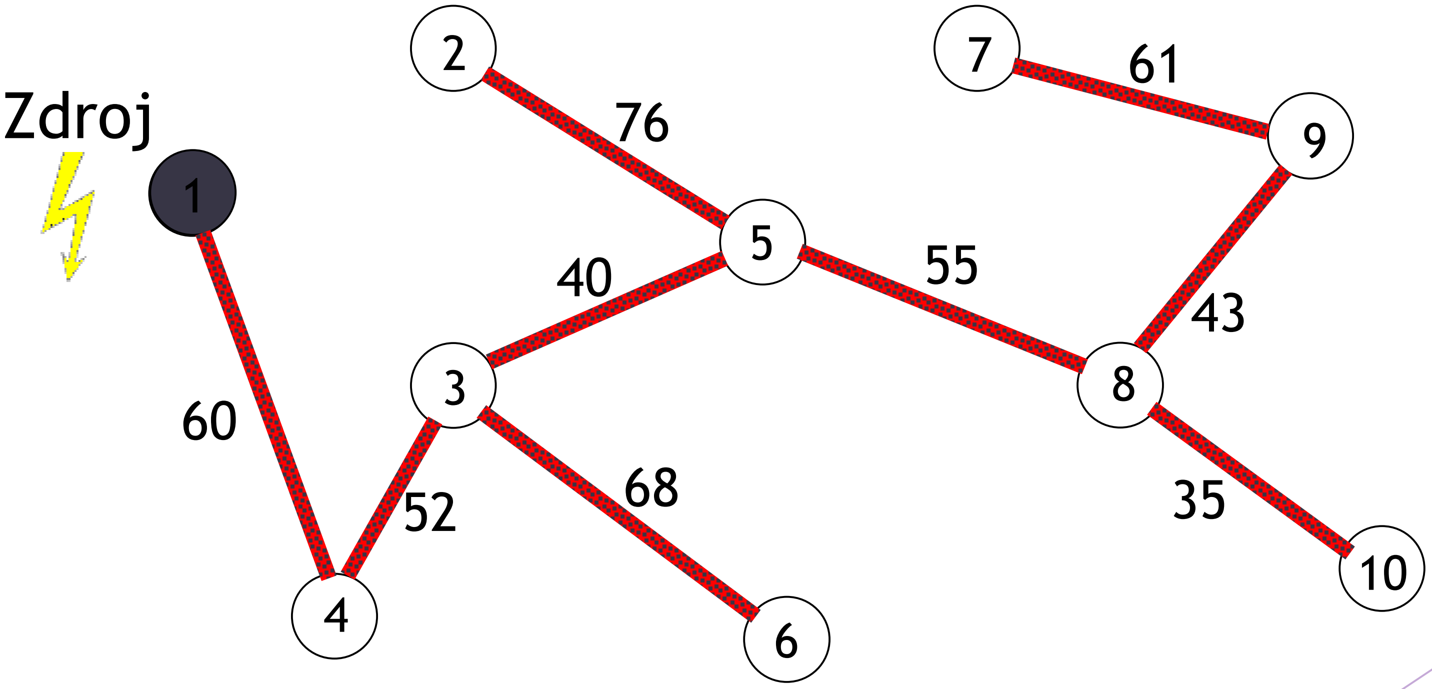
6.3 Optimální spojení míst

- Minimální kostra grafu



6.3 Optimální spojení míst

Minimální kostra grafu

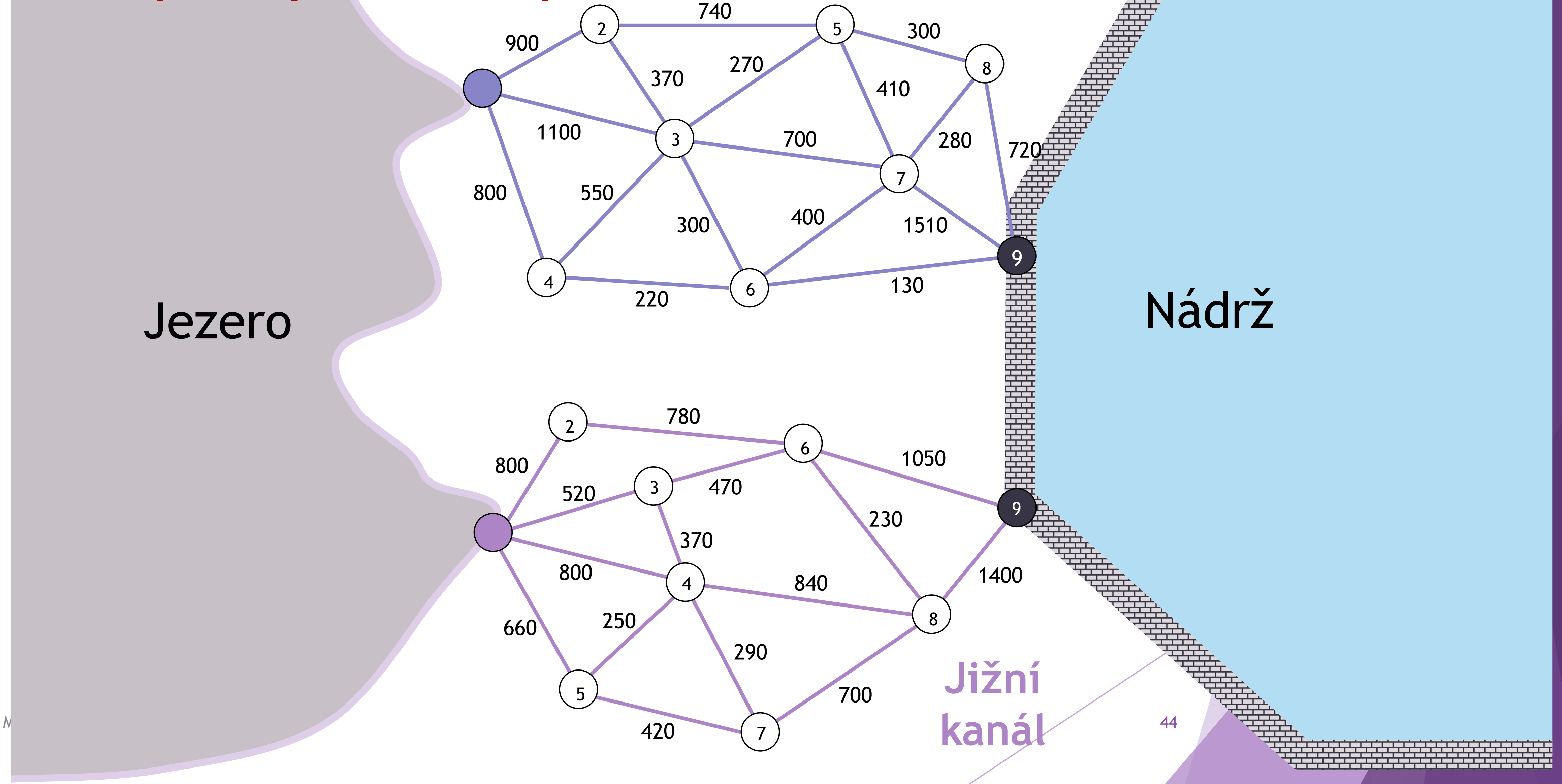


Minimální kostra	490 m

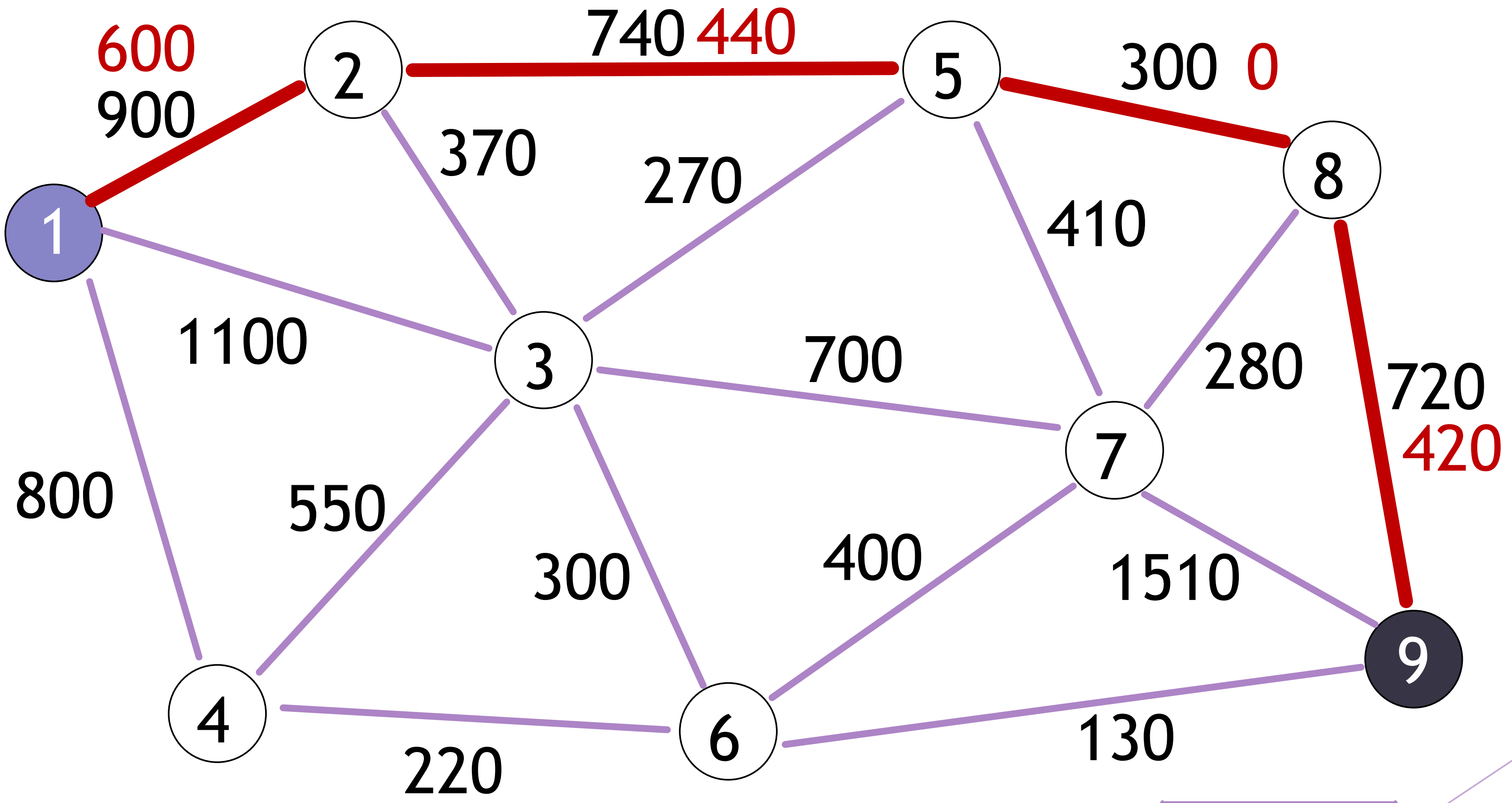
6.4 Maximální tok

- Předpokládejme, že máme jezero, ze kterého chceme napustit nádrž.
- K dispozici je severní a jižní kanál.
- Graf zobrazuje příslušná řečiště a hodnoty udávají maximální hodinový průtok v m^3.
- Jaký je maximální hodinový průtok severním kanálem?
- Jaký je maximální hodinový průtok jižním kanálem?
- Který kanál je vhodné provozovat pro napouštění nádrže?

Předpokládejme povolený průtok z kopce, tj. zleva doprava



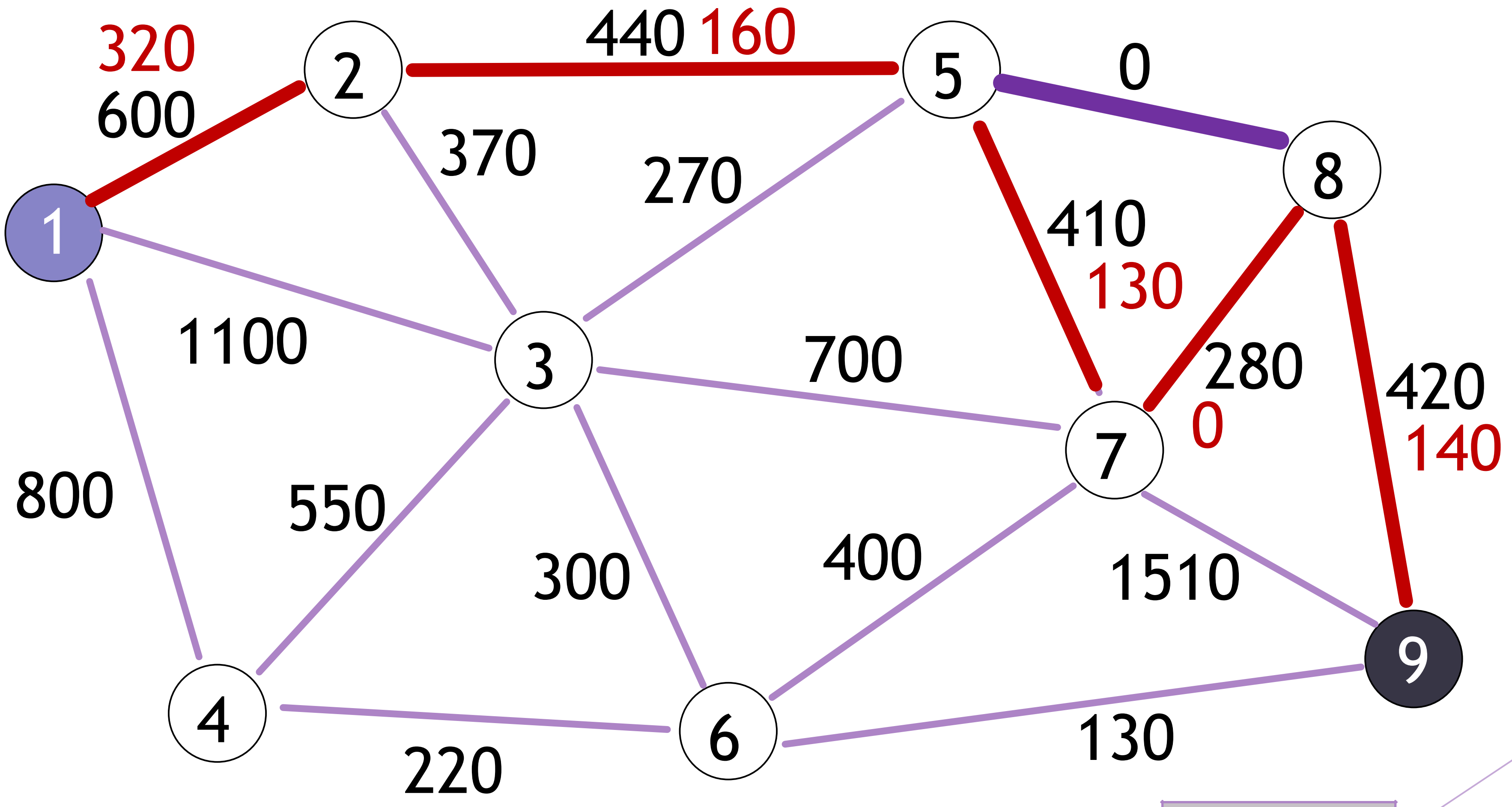
6.4 Severní kanál – algoritmus



Kapacita
300 m^3

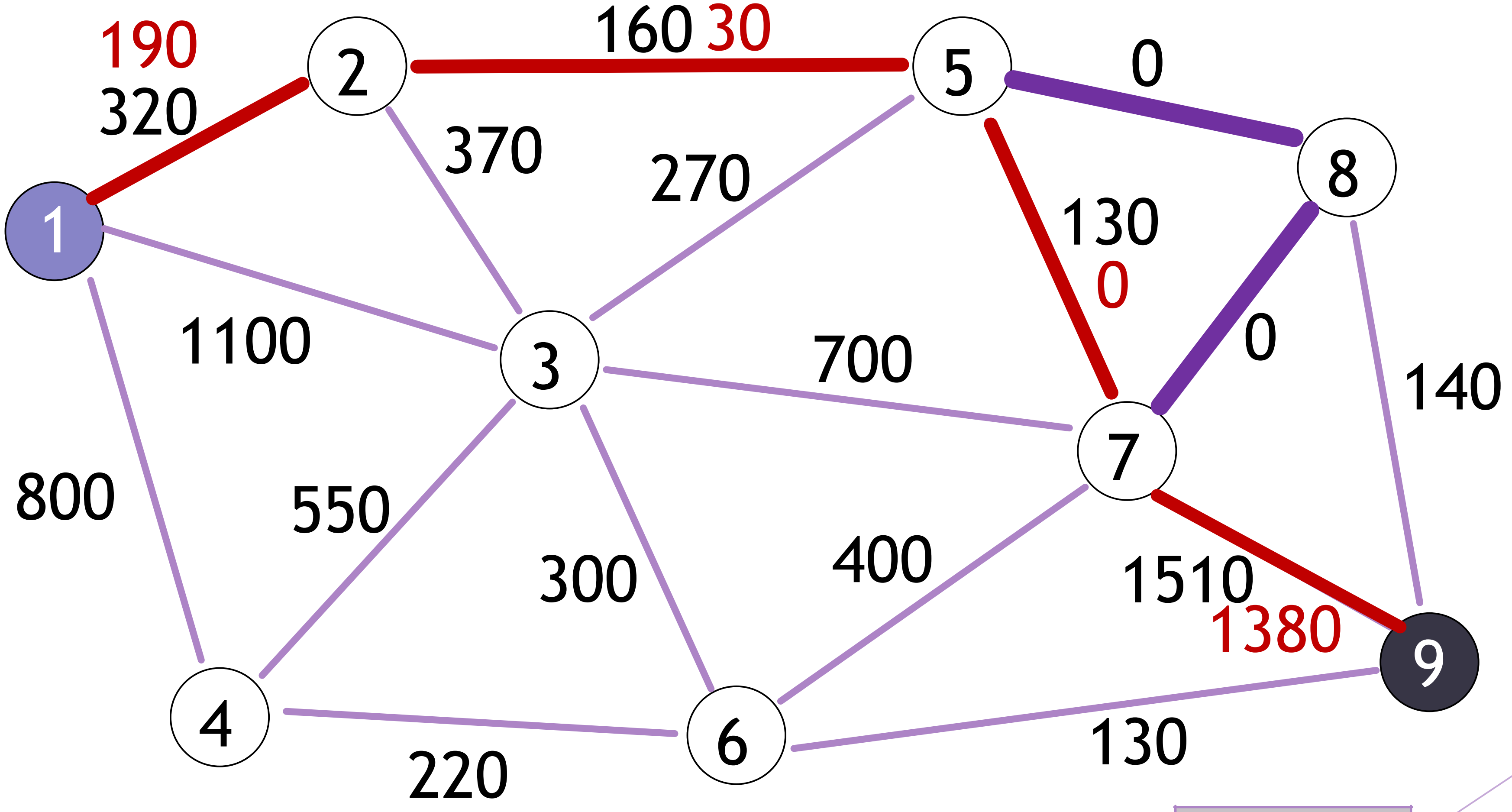
6.4 Severní kanál – algoritmus

Kapacita
300 m^3



Kapacita
280 m^3

6.4 Severní kanál – algoritmus

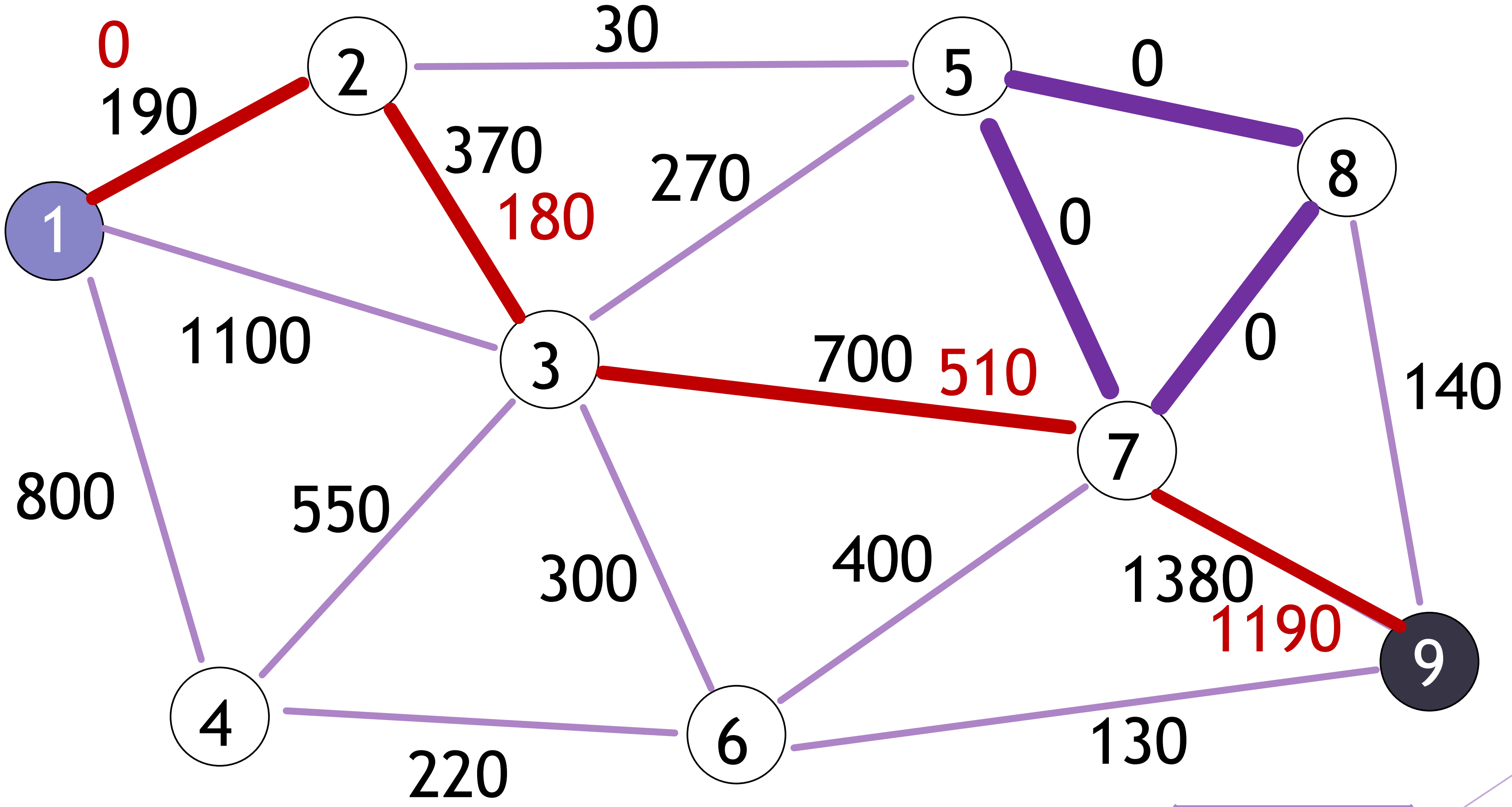


Kapacita
300 m^3

Kapacita
280 m^3

Kapacita
130 m^3

6.4 Severní kanál – algoritmus



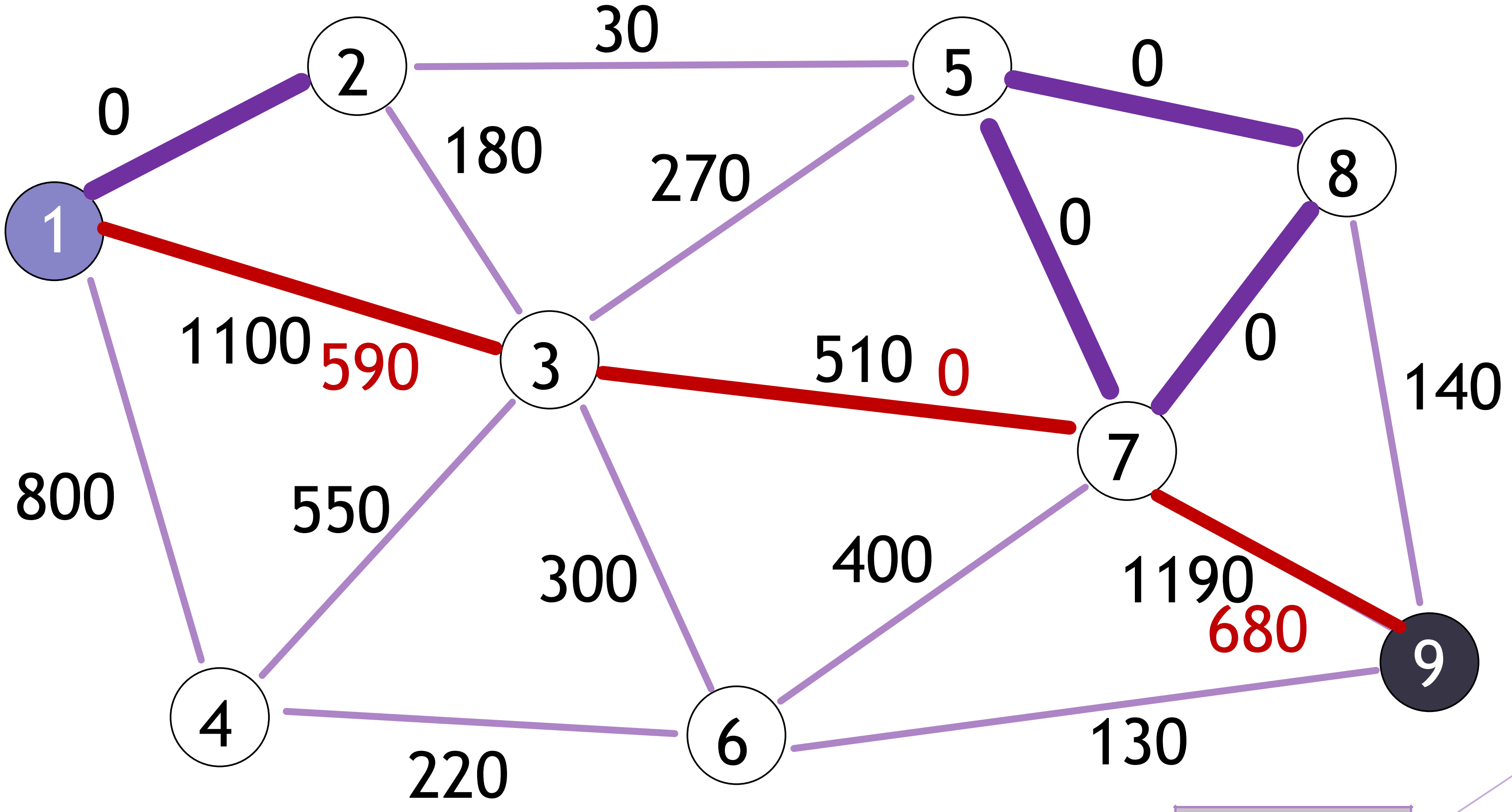
Kapacita
300 m^3

Kapacita
280 m^3

Kapacita
130 m^3

Kapacita
190 m^3

6.4 Severní kanál – algoritmus



Kapacita
300 m^3

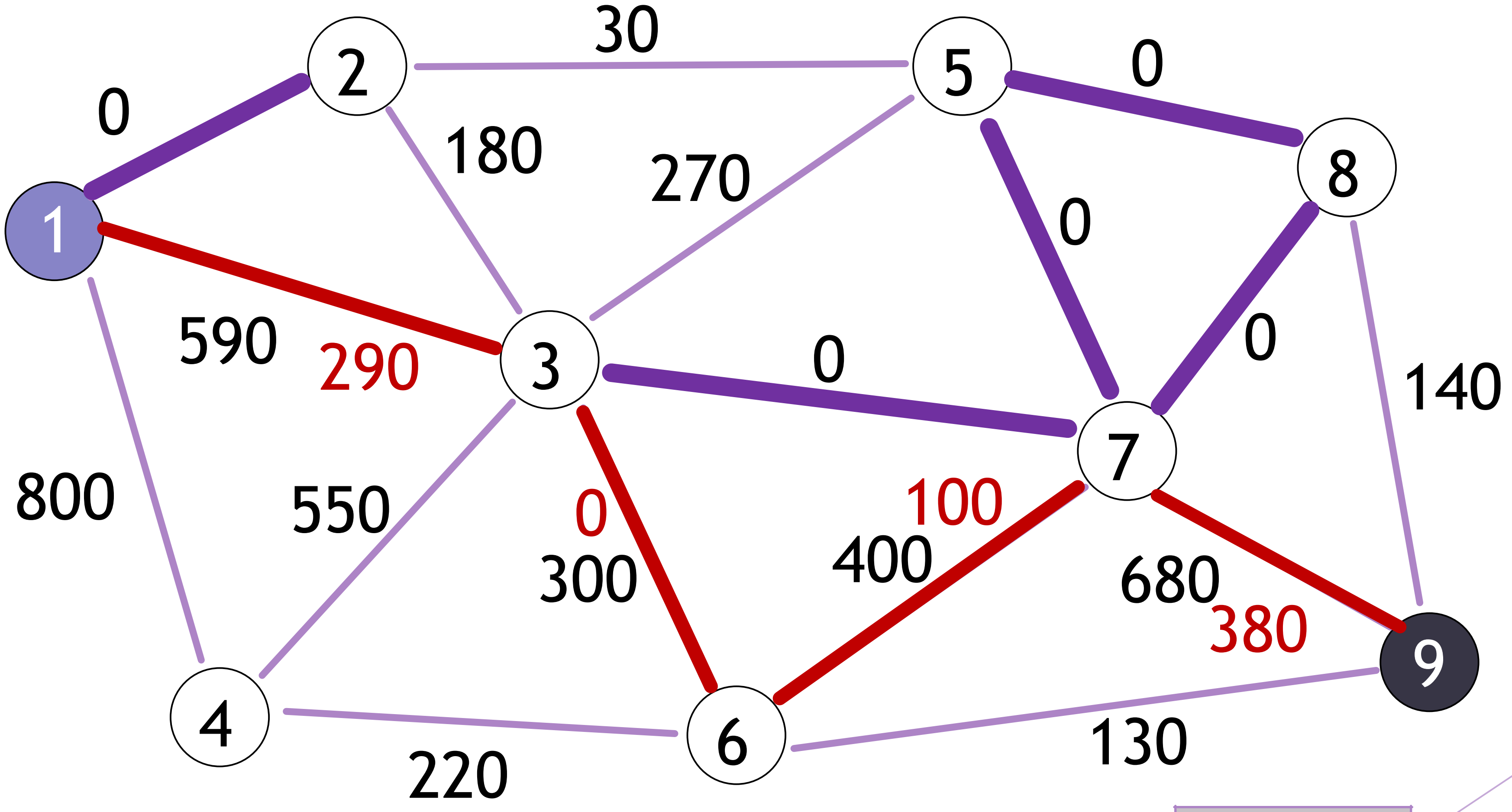
Kapacita
280 m^3

Kapacita
130 m^3

Kapacita
190 m^3

Kapacita
510 m^3

6.4 Severní kanál – algoritmus



Kapacita
300 m^3

Kapacita
280 m^3

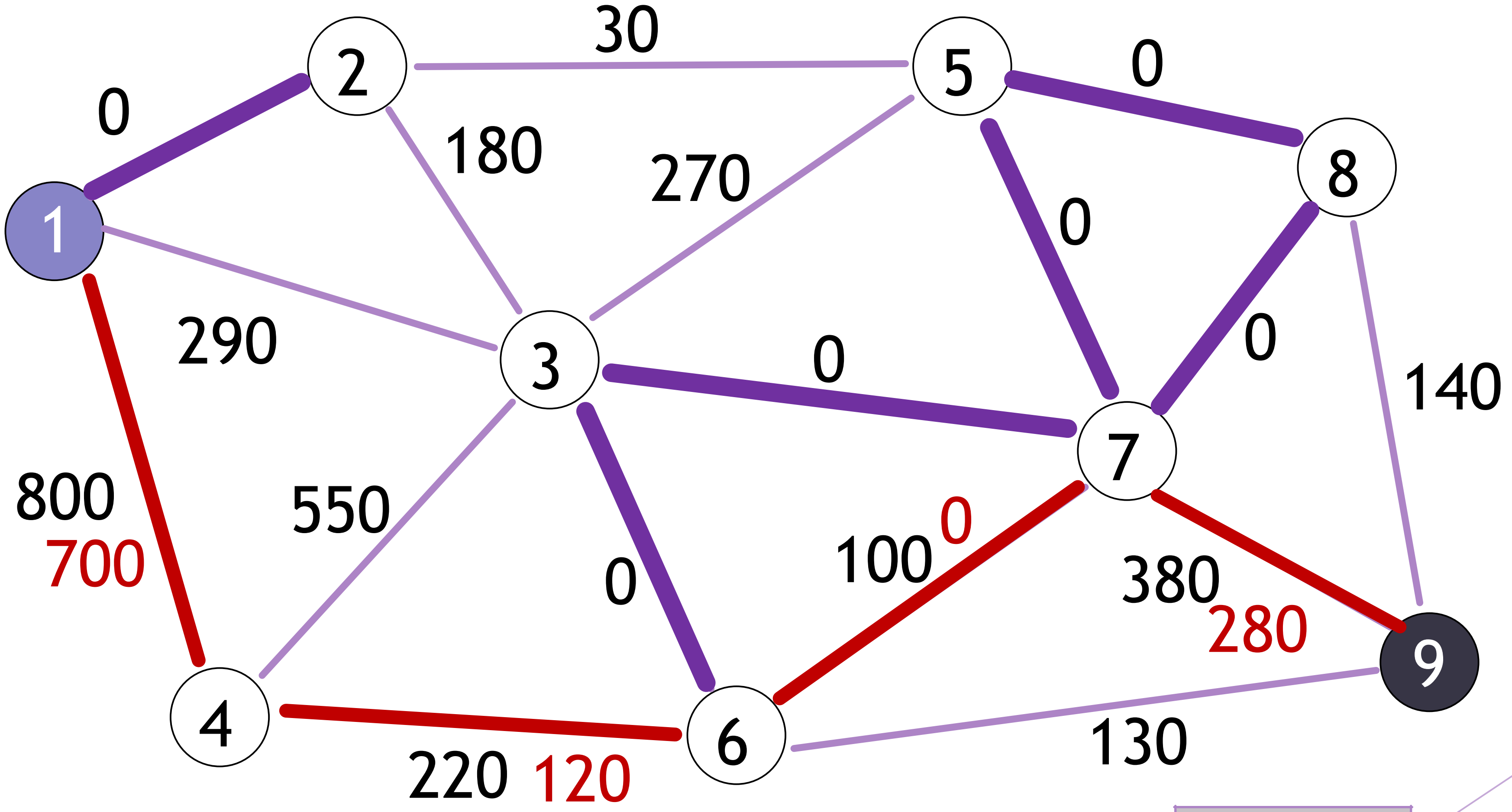
Kapacita
130 m^3

Kapacita
190 m^3

Kapacita
510 m^3

Kapacita
300 m^3

6.4 Severní kanál – algoritmus



Kapacita
300 m^3

Kapacita
280 m^3

Kapacita
130 m^3

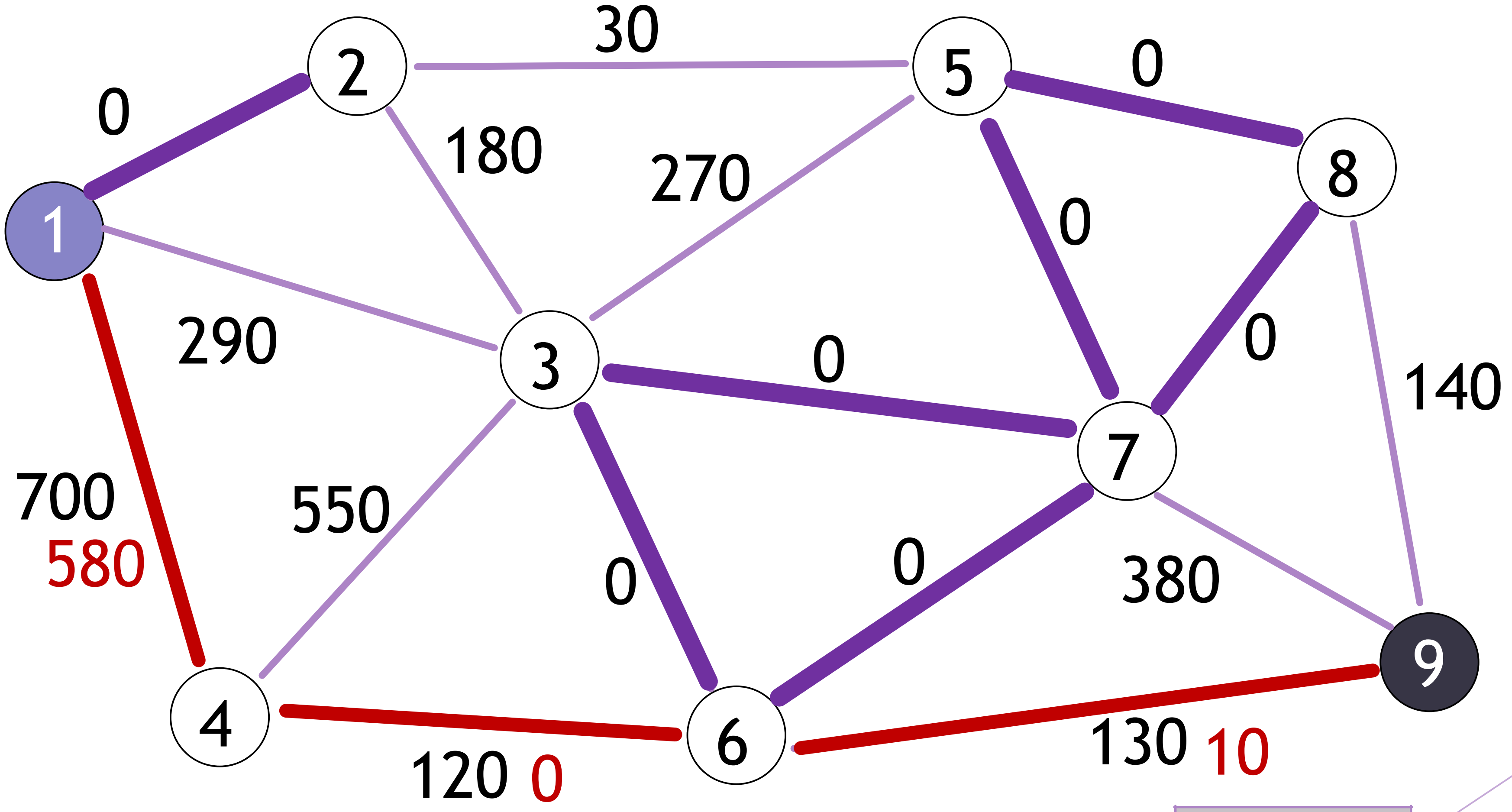
Kapacita
190 m^3

Kapacita
510 m^3

Kapacita
300 m^3

Kapacita
100 m^3

6.4 Severní kanál – algoritmus



Kapacita
300 m³

Kapacita
280 m³

Kapacita
130 m³

Kapacita
190 m³

Kapacita
510 m³

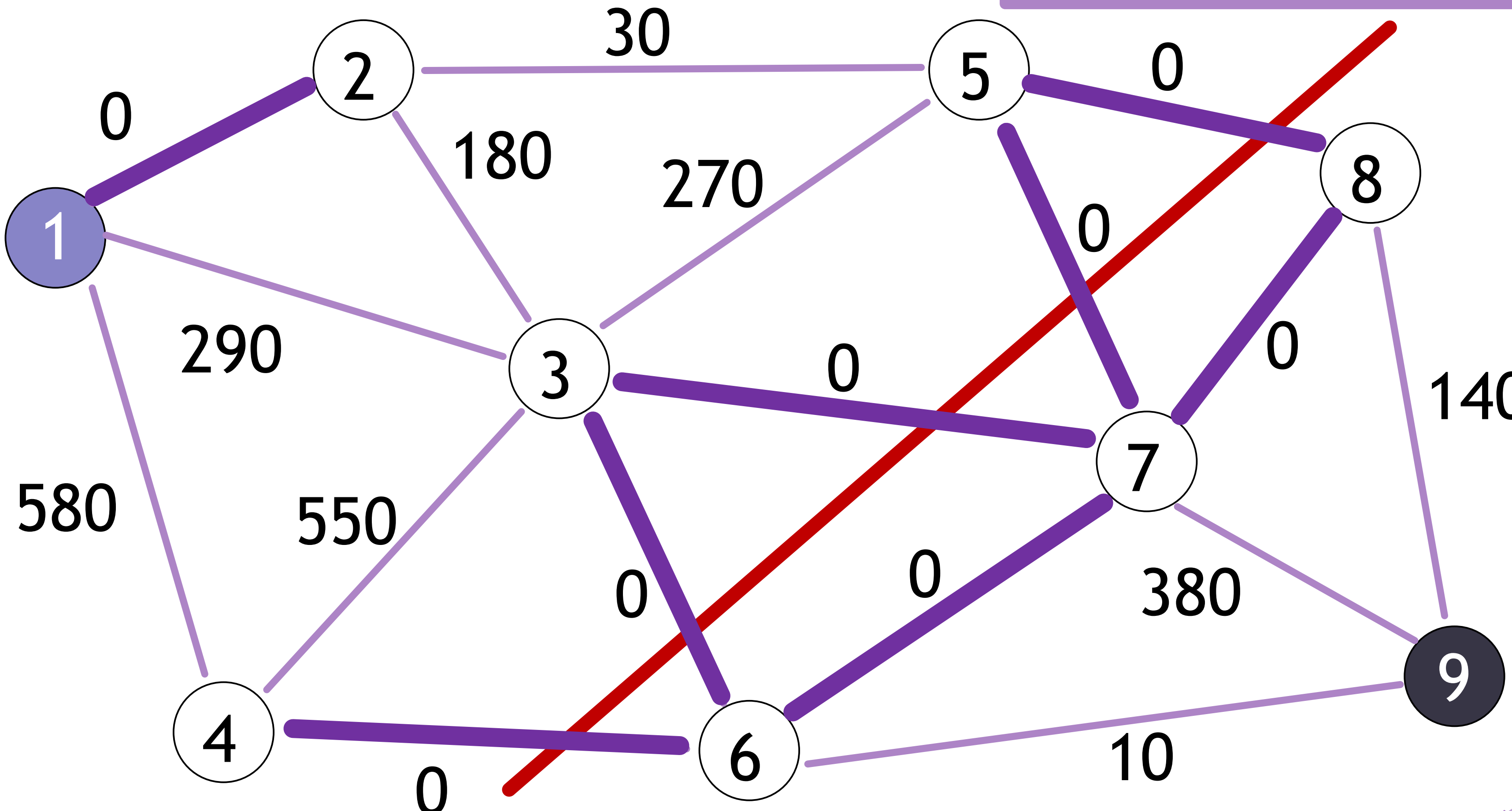
Kapacita
300 m³

Kapacita
100 m³

Kapacita
120 m³

6.4 Severní kanál – alg

Minimální řez



Maximální tok = 1 930 m^3

Kapacita
300 m^3

Kapacita
280 m^3

Kapacita
130 m^3

Kapacita
190 m^3

Kapacita
510 m^3

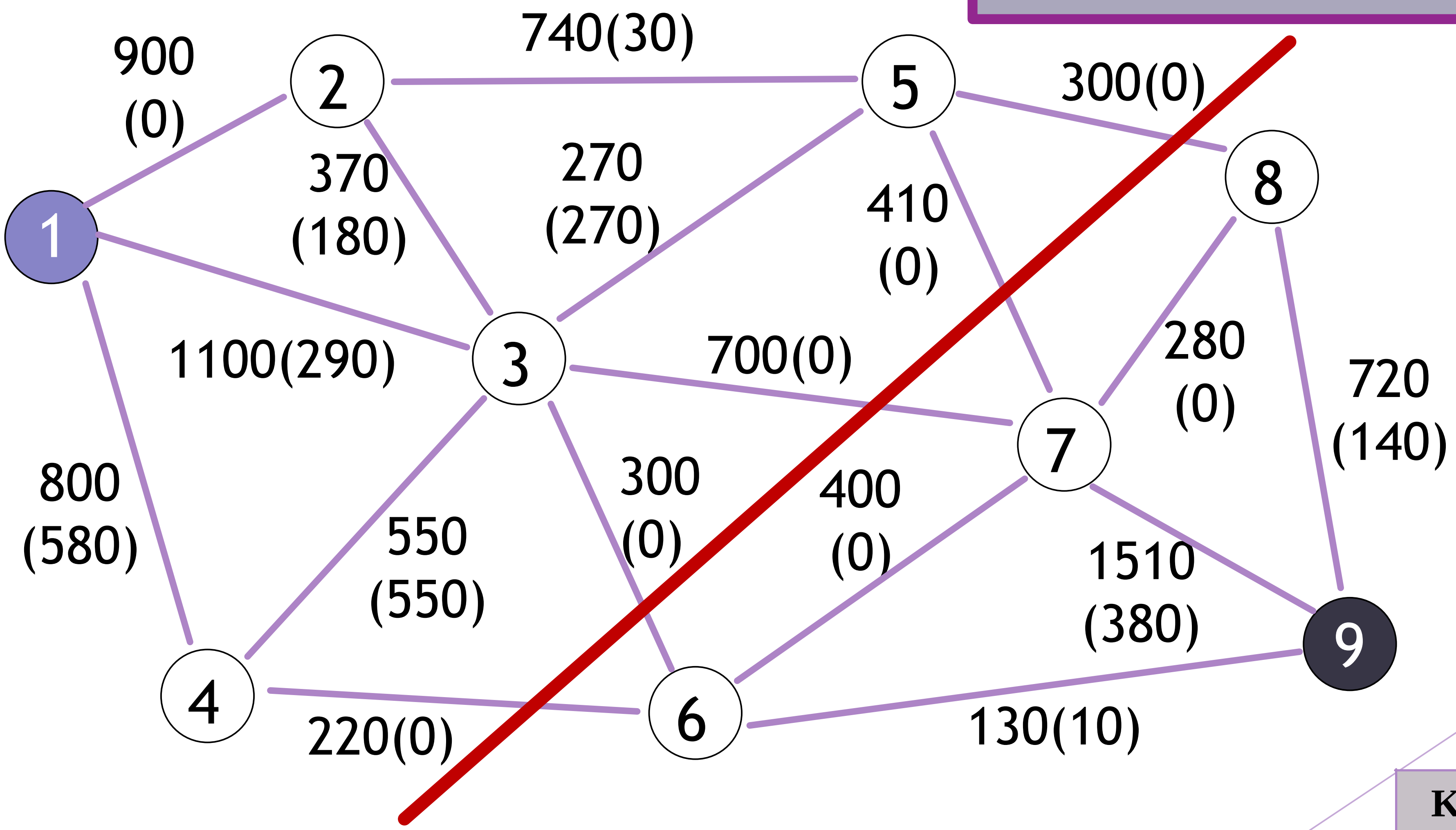
Kapacita
300 m^3

Kapacita
120 m^3

Kapacita
100 m^3

6.4 Severní kanál – algo

Minimální řez = Maximální tok



Kapacita
300 m³

Kapacita
280 m³

Kapacita
130 m³

Kapacita
190 m³

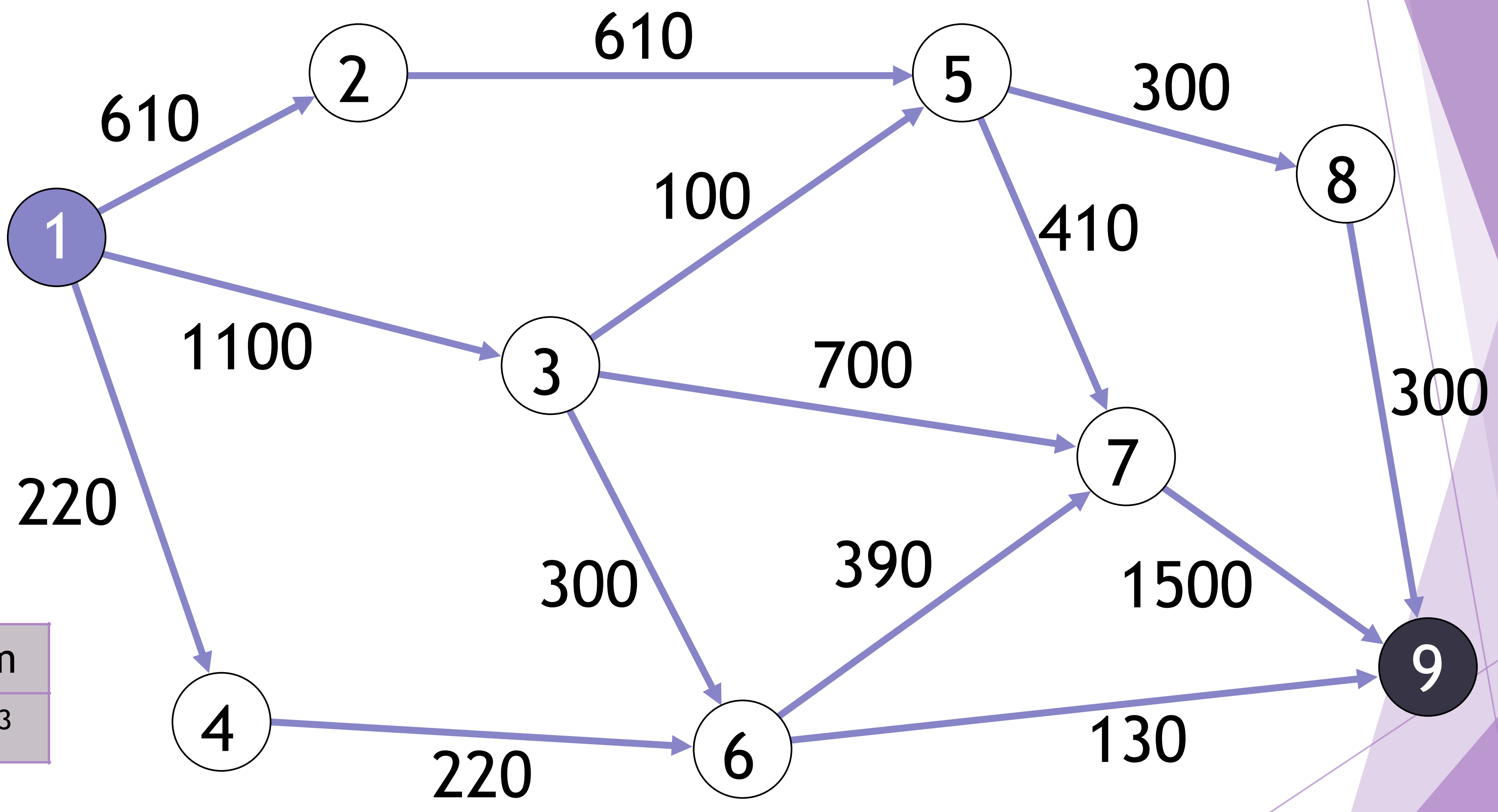
Kapacita
510 m³

Kapacita
300 m³

Kapacita
120 m³

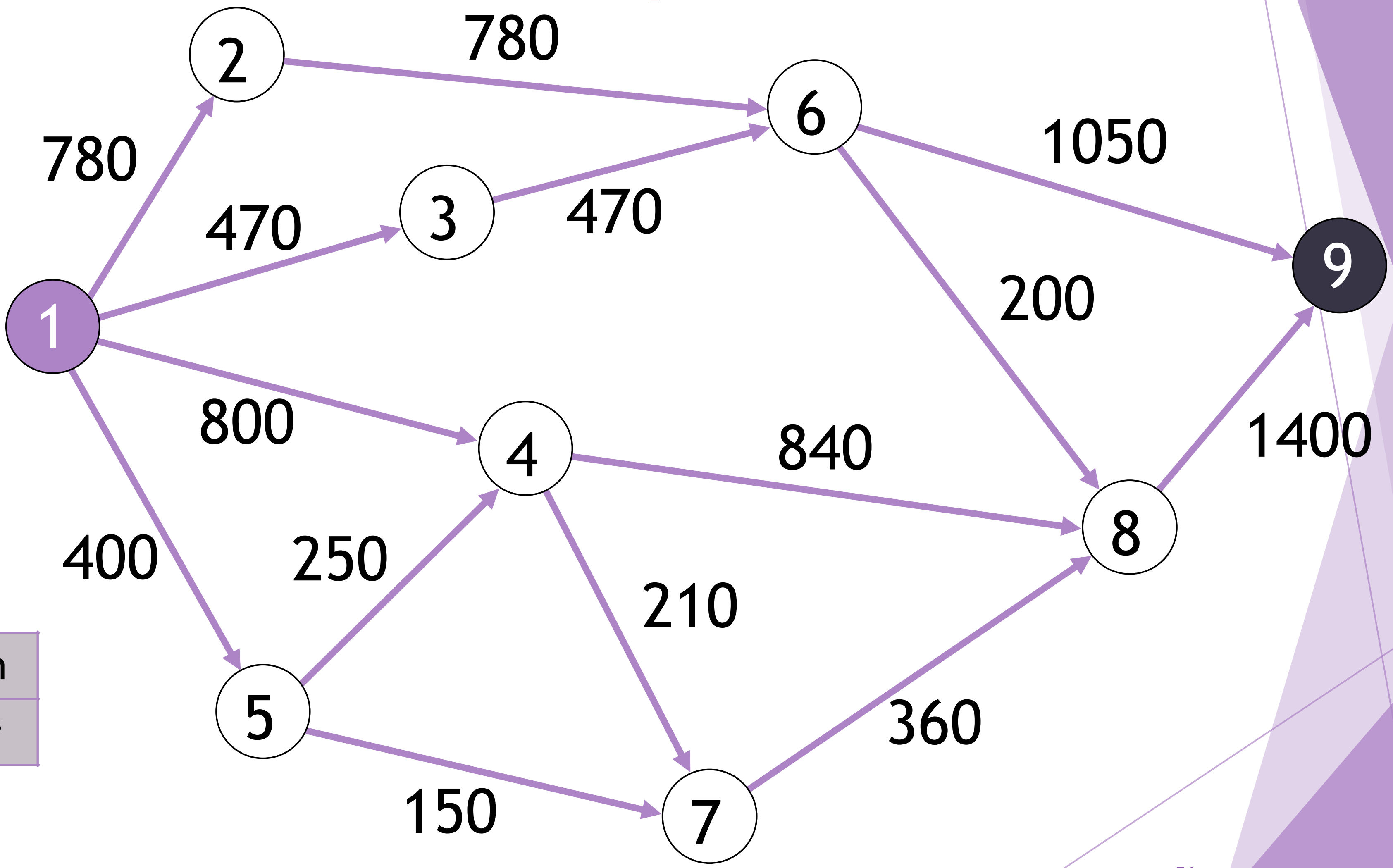
Kapacita
100 m³

6.4 Severní kanál – alternativní optimum



Optimum
1 930 m^3

6.4 Jižní kanál - optimum



Optimum
2 450 m^3

Detaily k přednášce: skripta

KONEC