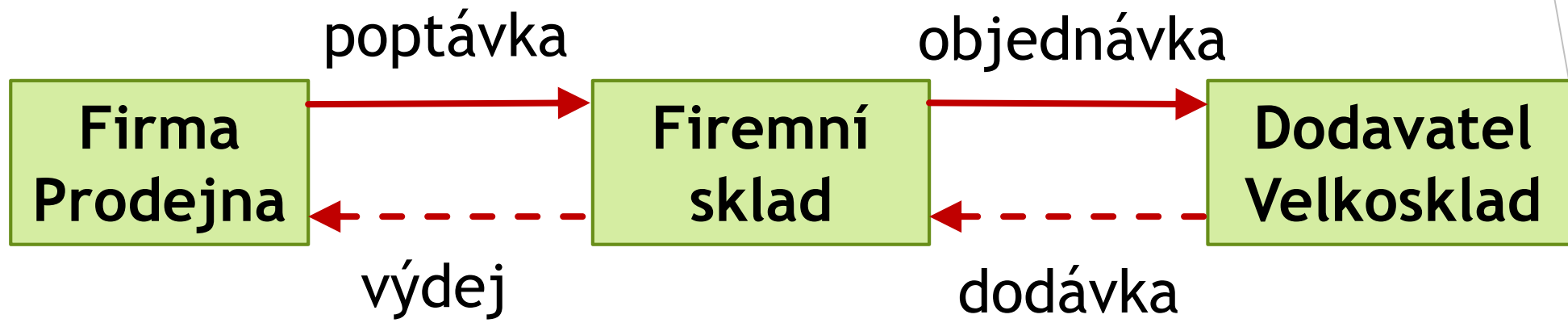


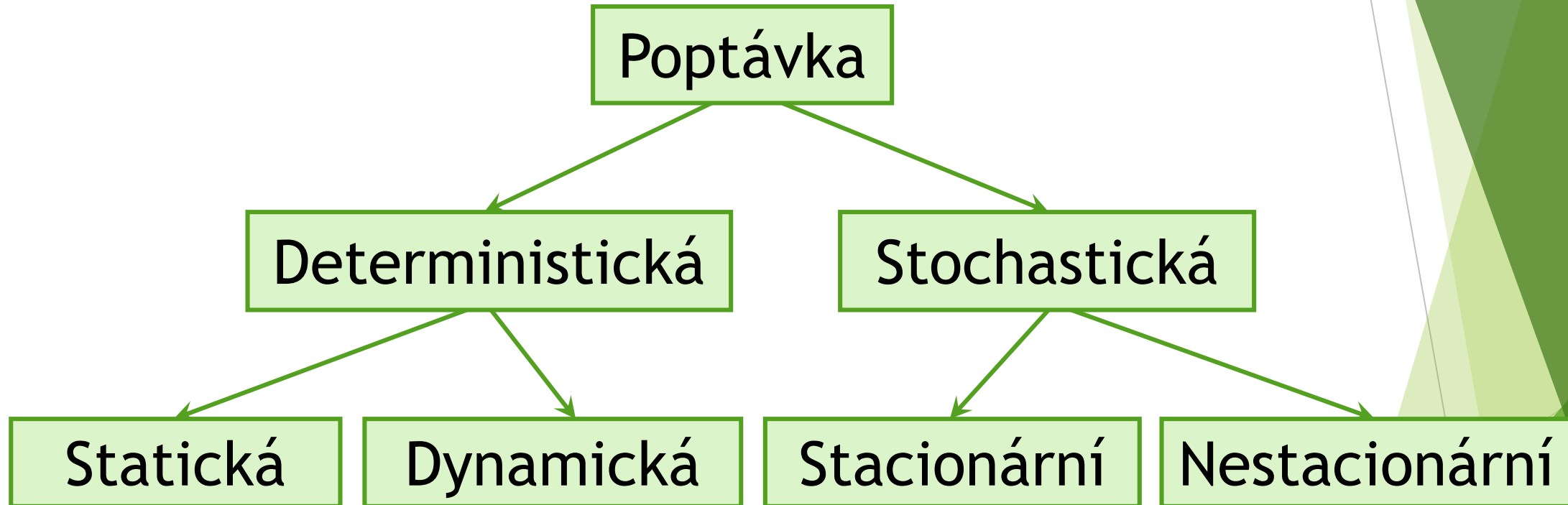
4EK212 - Kvantitativní management

7. Modely řízení zásob

7. Zásobovací procesy



7. Charakter poptávky



7. Použité značení

► Značení:

- Q - poptávka za celé období [ks]
- q - velikost objednávky (dodávky) [ks]
- w - pojistná zásoba [ks]
 - rezerva pro pokrytí výkyvů v poptávce u stochastických modelů, nedostatek zásob

7. Použité značení

- ▶ Značení (dodávka):
 - ▶ d - pořizovací lhůta [jednotky daného období]
 - ▶ doba mezi objednáním zboží a jeho dodáním do skladu
 - ▶ n_d - intenzita dodávek [ks/období]
 - ▶ počet dodávek za sledované období
 - ▶ t_d - délka dodávkového cyklu [jednotky daného období]
 - ▶ období mezi dvěma dodávkami t
 - ▶ r - bod znovuobjednávky [ks]
 - ▶ množství zásob v okamžiku vystavení další objednávky

7. Použité značení

- ▶ Značení (náklady):
 - ▶ N_s - za skladování - skladovací náklady
 - ▶ Pronájem, pojištění, energie, manipulace, ...
 - ▶ Variabilní náklady
 - ▶ N_d - za jednotlivé dodávky - pořizovací náklady
 - ▶ Doprava, balení, expedice, apod.
 - ▶ Fixní náklady

7. Použité značení

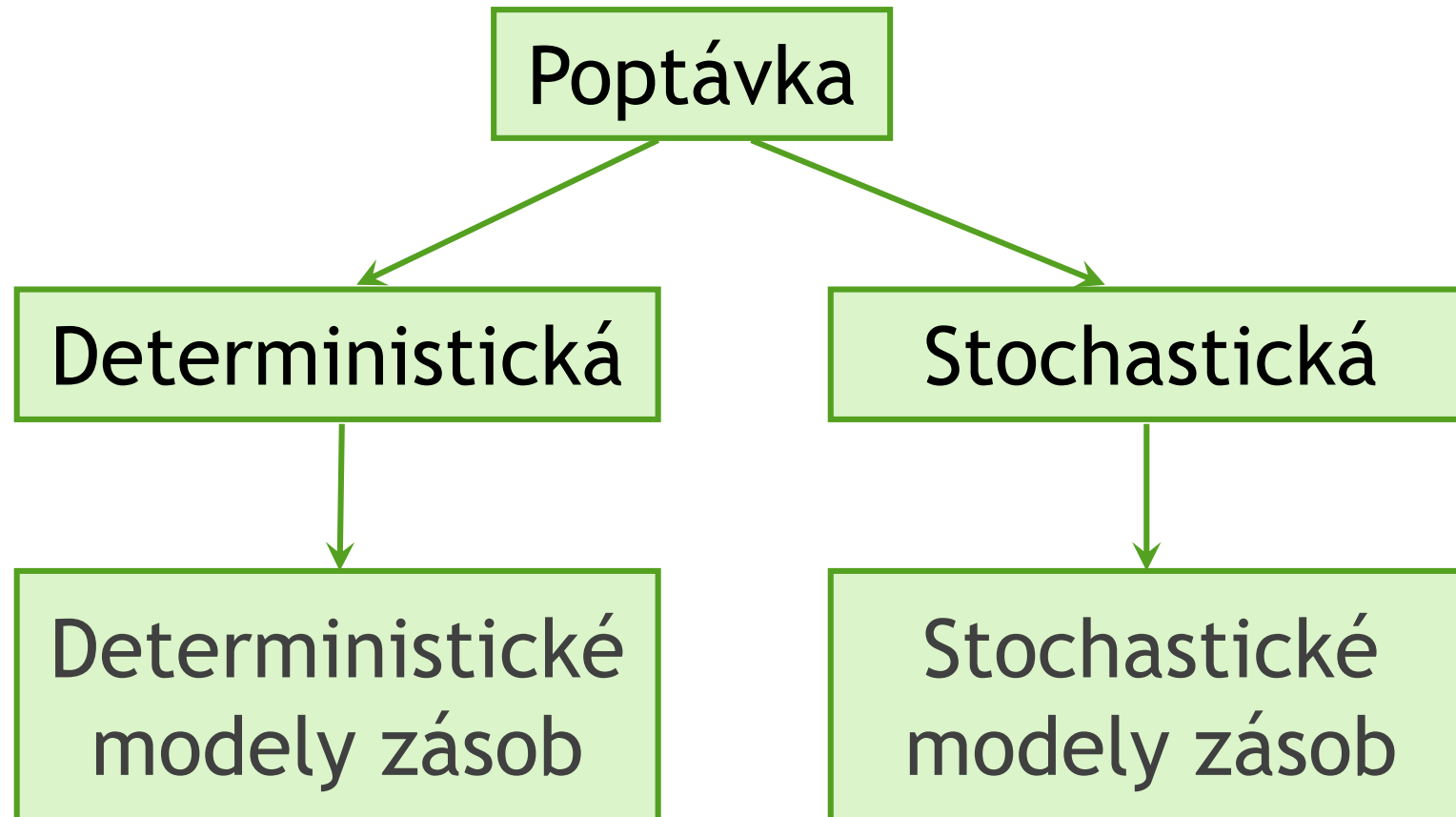
- ▶ Značení (náklady):
 - ▶ N_n - za nakoupené zboží - náklady za nákup zboží
 - ▶ Zahrnutí slev, množstevních rabatů, apod.
 - ▶ Variabilní náklady

7. Použité značení

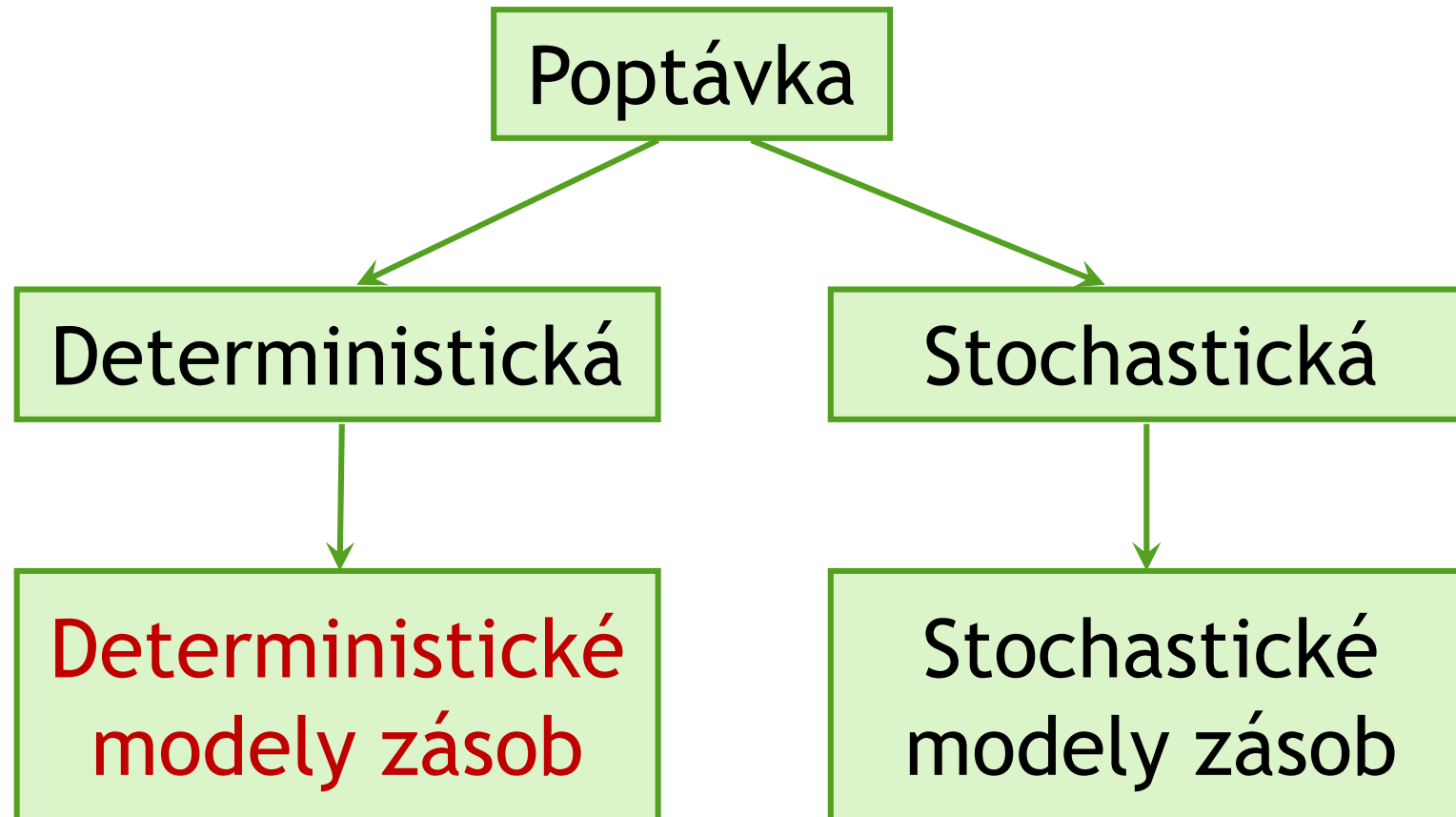
► Značení (jednotkové ceny):

- c_s - jednotkové skladovací náklady [Kč/ks a období] ... c_1
- c_d - jednotkové pořizovací náklady [Kč/dodávku] ... c_2
- c_n - jednotková nákupní cena [Kč/ks]
- c_p - jednotková prodejní cena [Kč/ks]
- c_z - jednotková zůstatková cena [Kč/ks]

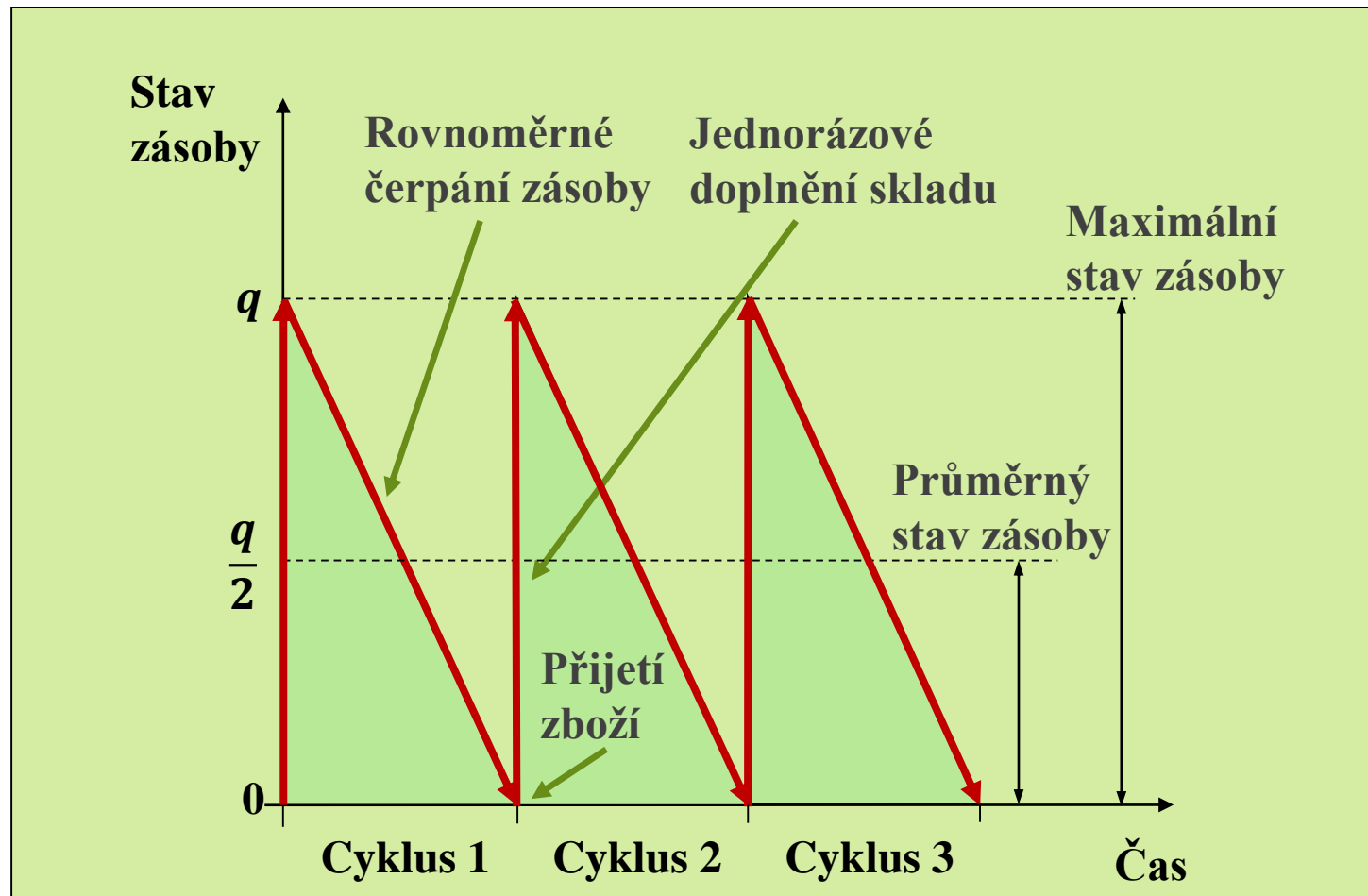
7. Charakter poptávky



7. Charakter poptávky



7.1 EOQ model (Economic Order Quantity)



Model I

7.1 EOQ - model s optimální velikostí objednávky

► Předpoklady:

- Statická poptávka Q - předem známá a v čase konstantní
- Pořizovací lhůta dodávky je známá a konstantní
- Čerpání zásob ze skladu je rovnoměrné
- Velikost všech objednávek (dodávek) q je konstantní
- Bez rabatů - nákupní cena c_n nezávisí na velikosti objednávky q
- K doplňování skladu dochází v jednom časovém okamžiku
- K doplňování skladu dochází přesně v okamžiku, kdy je vyčerpán (žádný nedostatek)

**Ford W.
Harris
(1915)**

7.1 EOQ - Příklad - zadání

- ▶ Firma týdně prodá 625 balení kancelářských papírů formátu A4 (5 x 500 listů) za 580 Kč za krabici
- ▶ Tyto papíry nakupuje za 320 Kč za krabici
- ▶ Měsíční skladovací náklady činí 12,5 % nákupní ceny
- ▶ S doplněním skladu souvisí fixní náklady ve výši 500 Kč za zaměstnance, kteří sklad doplní, a 1500 Kč za dopravu papírů od dodavatele do skladu
- ▶ Dodavatel požaduje dva dny na expedování zboží
- ▶ Předpokládáme 5-denní pracovní týden, 4 týdny v měsíci

7.1 EOQ - Příklad

- ▶ Firma týdně prodá 625 balení kancelářských papírů formátu A4 (5 x 500 listů) za 580 Kč za krabici
- ▶ Tyto papíry nakupuje za 320 Kč za krabici
- ▶ Měsíční skladovací náklady činí 12,5 % nákupní ceny
- ▶ S doplněním skladu souvisí fixní náklady ve výši 500 Kč za zaměstnance, kteří sklad doplní, a 1500 Kč za dopravu papírů od dodavatele do skladu
- ▶ Dodavatel požaduje dva dny na expedování zboží

$$Q = 625 \cdot 4 = 2\,500 \text{ ks}$$

$$c_p = 580 \text{ Kč/ks}$$

$$c_n = 320 \text{ Kč/ks}$$

$$c_s = 0,125 \cdot c_n = 0,125 \cdot 320 = 40 \text{ Kč/ks}$$

$$c_d = 500 + 1500 = 2\,000 \text{ Kč/dodávku}$$

$$d = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ měsíce}$$

7.1 EOQ - Příklad - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?
- ▶ Kolik budou činit optimální náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?
- ▶ Jaká musí být kapacita skladu?
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

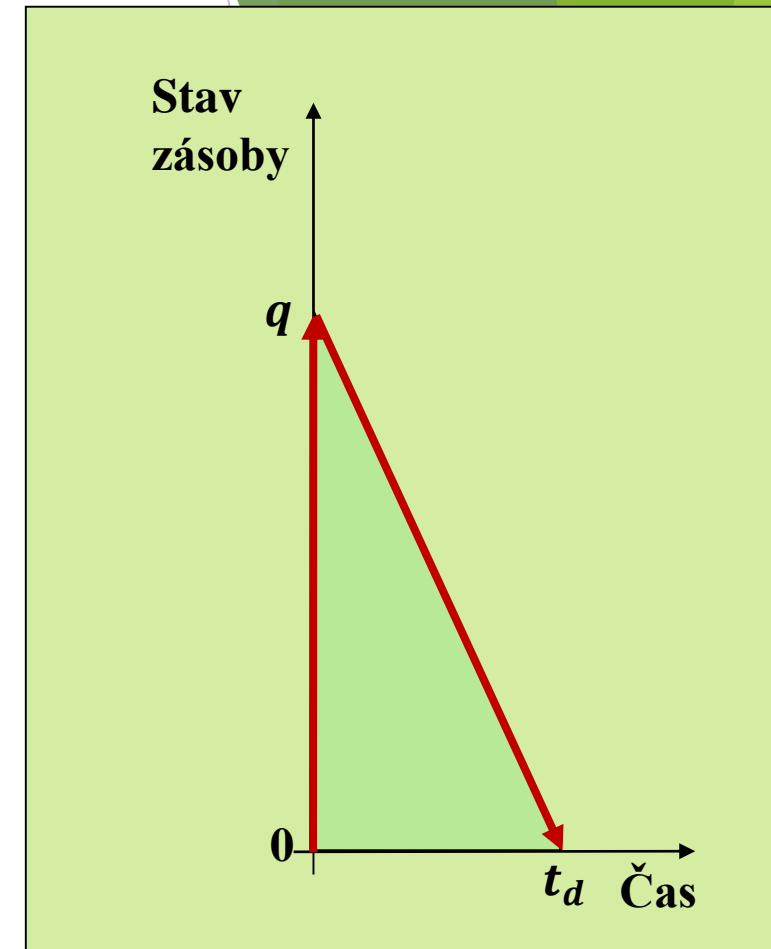
7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?
- ▶ Kolik budou činit optimální náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?
- ▶ **Jaká musí být kapacita skladu?**
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

7.1 EOQ - Množství zásob

- ▶ K doplnění skladu dochází v okamžiku, kdy je sklad prázdný
- ▶ Do skladu je dodána dodávka o velikosti q
- ▶ Pak dojde k vyprazdňování skladu
- ▶ Maximální potřebná velikost skladu je tedy

$$q_{max} = q$$



7.1 EOQ - Množství zásob

- ▶ Maximální potřebná velikost skladu je tedy

$$q_{max} = q$$

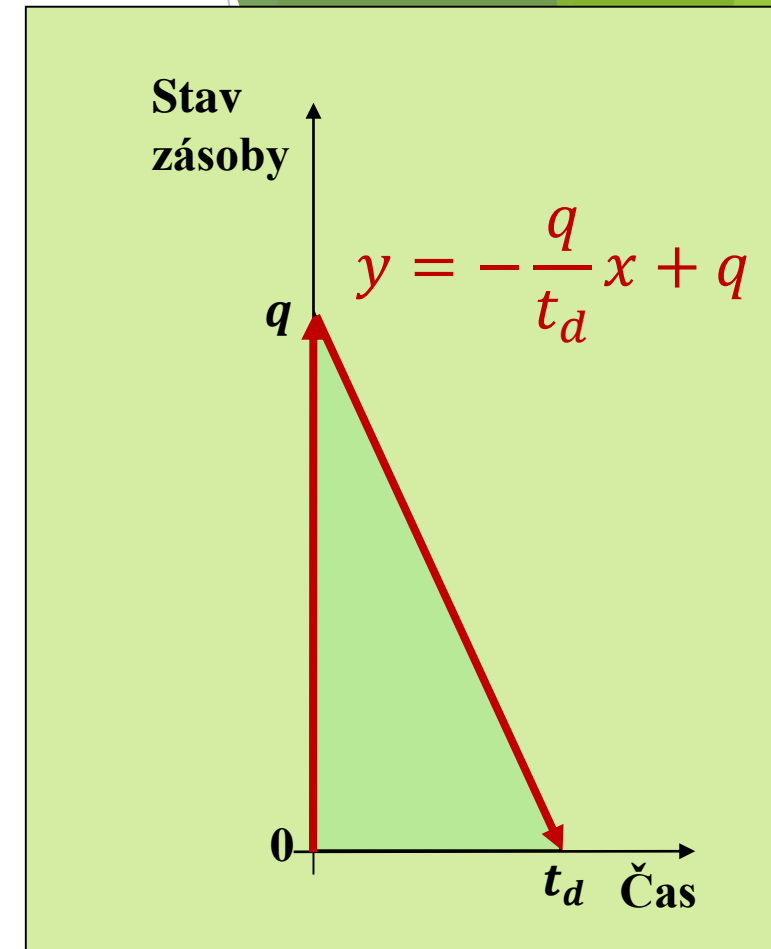
- ▶ Celkové množství zásob ve skladu je

$$\frac{q_{max} \cdot t_d}{2}$$

- ▶ (plocha pod přímkou: vyjádření přímky čerpání + integrál, nebo z obsahu trojúhelníku)

- ▶ Průměrné množství zásob je

$$\frac{\frac{q_{max} \cdot t_d}{2}}{t_d} = \frac{q_{max}}{2} = \frac{q}{2} = q_{avq}$$



7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?
- ▶ Kolik budou činit optimální náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?
- ▶ **Jaká musí být kapacita skladu?**
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

$$q_{max} = q$$

7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?
- ▶ Kolik budou činit optimální náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?
- ▶ Jaká musí být kapacita skladu?
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

$$q_{avg} = \frac{q}{2}$$

7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?
- ▶ **Kolik budou činit optimální náklady?**
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?
- ▶ Jaká musí být kapacita skladu?
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

7.1 EOQ - Optimální objednávka

- ▶ Stále nevíme, kolik je optimální hodnota q
- ▶ Cílem je stanovit takové q , aby celkové náklady N byly minimální
- ▶ Celkové náklady N tvoří:
 - ▶ Náklady na nákup zboží - N_n
 - ▶ Náklady na skladování - N_s
 - ▶ Náklady za dodávky - N_d

$$N = N_n + N_s + N_d \rightarrow \min$$

7.1 EOQ - Náklady na nákup

▶ Náklady na nákup zboží - N_n

- ▶ Počet nakoupených kusů = poptávka za celé období

$$n_n = Q$$

- ▶ Cena za jeden kus = c_n

- ▶ Celkové náklady na nákup zboží:

$$N_n = c_n \cdot n_n = c_n \cdot Q$$

- ▶ Tyto náklady jsou nezávislé na velikosti objednávky

- ▶ Jsou konstantní a nemusíme je tedy vůbec uvažovat

$$N = N_n + N_s + N_d = c_n \cdot Q + N_s + N_d \rightarrow \min$$

$$N = N_s + N_d \rightarrow \min$$

7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?
- ▶ Kolik budou činit optimální náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ **Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?**
- ▶ Jaká musí být kapacita skladu?
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

$$N_n = c_n \cdot Q$$

7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?
- ▶ Kolik budou činit optimální náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?
- ▶ Jaká musí být kapacita skladu?
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

7.1 EOQ - Náklady na skladování

▶ Náklady na skladování zboží - N_s

- ▶ Průměrný počet skladovaných kusů za období

$$n_s = q_{avg} = \frac{q}{2}$$

- ▶ Cena skladování za jeden kus a období = c_s
- ▶ Celkové náklady na skladování zboží:

$$N_s = c_s \cdot n_s = c_s \cdot \frac{q}{2}$$

- ▶ Tyto náklady jsou závislé na velikosti objednávky

$$N = N_s + N_d = c_s \cdot \frac{q}{2} + N_d \rightarrow \min$$

7.1 EOQ - Náklady na pořízení dodávek

▶ Náklady na pořízení dodávek - N_d

- ▶ Průměrný počet dodávek za období (intenzita dodávek)

$$n_d = \frac{Q}{q}$$

- ▶ Cena za jednu dodávku = c_d
- ▶ Celkové náklady na pořízení všech dodávek:

$$N_d = c_d \cdot n_d = c_d \cdot \frac{Q}{q}$$

- ▶ Tyto náklady jsou závislé na velikosti objednávky

$$N = N_s + N_d = c_s \cdot \frac{q}{2} + c_d \cdot \frac{Q}{q} \rightarrow \min$$

7.1 EOQ - Příklad

▶ $Q = 2\,500$ ks/měsíc

▶ $c_p = 580$ Kč/ks

▶ $c_n = 320$ Kč/ks

▶ $c_s = 40$ Kč/ks

▶ $c_d = 2\,000$ Kč/dodávku

▶ $d = \frac{1}{10} = 0,1$ měsíce

$$\begin{aligned} N_n &= c_n \cdot Q \\ &= 320 \cdot 2\,500 \\ &= 80\,000 \end{aligned}$$

▶ $q_{max} = q$

▶ $q_{avq} = \frac{q}{2}$

▶ $n_d = \frac{Q}{q}$

▶ $N_n = c_n \cdot Q$

▶ $N_s = c_s \cdot \frac{q}{2}$

▶ $N_d = c_d \cdot \frac{Q}{q}$

▶ $N = N_s + N_d$

q	n_d	N_s	N_d	N
2 500	1	50 000	2 000	52 000
500	5	10 000	10 000	20 000
250	10	5 000	20 000	25 000
100	25	2 000	50 000	52 000
50	50	1 000	100 000	101 000
25	100	500	200 000	200 500
10	250	200	500 000	500 200

7.1 EOQ - Náklady

- ▶ Celkové náklady

$$N = N_s + N_d = c_s \cdot \frac{q}{2} + c_d \cdot \frac{Q}{q} \rightarrow \min$$

- ▶ Minimalizace (podmínky prvního řádu - derivace):

$$\frac{dN}{dq} = \frac{d \left(c_s \cdot \frac{q}{2} + c_d \cdot \frac{Q}{q} \right)}{dq} = 0$$

$$\frac{dN}{dq} = \frac{d \left(\frac{c_s}{2} \cdot q + c_d \cdot Q \cdot q^{-1} \right)}{dq} = 0$$

7.1 EOQ - Náklady

$$\frac{dN}{dq} = \frac{d\left(\frac{c_s}{2} \cdot q + c_d \cdot Q \cdot q^{-1}\right)}{dq} = 0$$

$$\frac{dN}{dq} = \frac{c_s}{2} + (-1)c_d \cdot Q \cdot q^{-2} = 0$$

$$\frac{dN}{dq} = \frac{c_s}{2} - \frac{c_d \cdot Q}{q^2} = 0$$

$$\frac{c_s}{2} = \frac{c_d \cdot Q}{q^2}$$

$$c_s \cdot q^2 = 2 \cdot c_d \cdot Q$$

7.1 EOQ - Náklady

$$\begin{aligned}c_s \cdot q^2 &= 2 \cdot c_d \cdot Q \\q^2 &= \frac{2 \cdot c_d \cdot Q}{c_s} \\q^* &= \sqrt{\frac{2 \cdot c_d \cdot Q}{c_s}}\end{aligned}$$

q^* = optimální velikost objednávky

- Bylo by ještě potřeba ověřit podmínky druhého řádu!

7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?
- ▶ Kolik budou činit optimální náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?
- ▶ Jaká musí být kapacita skladu?
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot Q \cdot c_d}{c_s}}$$

7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?
- ▶ Kolik budou činit optimální náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?
- ▶ Jaká musí být kapacita skladu?
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

7.1 EOQ - Náklady na skladování

- Optimální celkové náklady na skladování zboží:

$$N_S = c_S \cdot n_S = c_S \cdot \frac{q}{2}$$

$$N_S^* = \frac{c_S}{2} \cdot q^* = \frac{c_S}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_d \cdot Q}{c_S}} = \sqrt{\frac{c_S^2 \cdot 2 \cdot c_d \cdot Q}{4 \cdot c_S}}$$

$$N_S^* = \sqrt{\frac{Q \cdot c_d \cdot c_S}{2}}$$

7.1 EOQ - Náklady na pořízení dodávek

- Optimální celkové pořizovací náklady:

$$N_d = c_d \cdot n_d = c_d \cdot \frac{Q}{q}$$

$$N_d^* = \frac{c_d \cdot Q}{q^*} = \frac{c_d \cdot Q}{\sqrt{\frac{2 \cdot c_d \cdot Q}{c_s}}} = c_d \cdot Q \sqrt{\frac{c_s}{2 \cdot c_d \cdot Q}} = \sqrt{\frac{c_d^2 \cdot Q^2 \cdot c_s}{2 \cdot c_d \cdot Q}}$$

$$N_d^* = \sqrt{\frac{Q \cdot c_d \cdot c_s}{2}}$$

7.1 EOQ - Celkové náklady

► Optimální celkové náklady:

$$N = N_s + N_d$$

$$N^* = N_s^* + N_d^* = \sqrt{\frac{Q \cdot c_d \cdot c_s}{2}} + \sqrt{\frac{Q \cdot c_d \cdot c_s}{2}}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{\frac{Q \cdot c_d \cdot c_s}{2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot Q \cdot c_d \cdot c_s}{2}}$$

$$N^* = \sqrt{2 \cdot Q \cdot c_d \cdot c_s}$$

7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?
- ▶ **Kolik budou činit optimální náklady?**
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?
- ▶ Jaká musí být kapacita skladu?
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

$$N^* = \sqrt{2 \cdot Q \cdot c_d \cdot c_s}$$

7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?
- ▶ Kolik budou činit optimální náklady?
- ▶ **Kolik budou činit celkové skladovací náklady?**
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?
- ▶ Jaká musí být kapacita skladu?
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

$$N_s^* = \sqrt{\frac{Q \cdot c_d \cdot c_s}{2}}$$

7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?
- ▶ Kolik budou činit optimální náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ **Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?**
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?
- ▶ Jaká musí být kapacita skladu?
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

$$N_d^* = \sqrt{\frac{Q \cdot c_d \cdot c_s}{2}}$$

7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ **Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?**
- ▶ Kolik budou činit optimální náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?
- ▶ Jaká musí být kapacita skladu?
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

7.1 EOQ

- ▶ Délka dodávkového cyklu

$$t_d = \frac{1}{n_d} = \frac{q}{Q}$$

- ▶ Optimální délka dodávkového cyklu

$$t_d^* = \frac{q^*}{Q} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot Q \cdot c_d}{c_s}}}{Q} = \sqrt{\frac{2 \cdot Q \cdot c_d}{Q^2 \cdot c_s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_d}{Q \cdot c_s}}$$

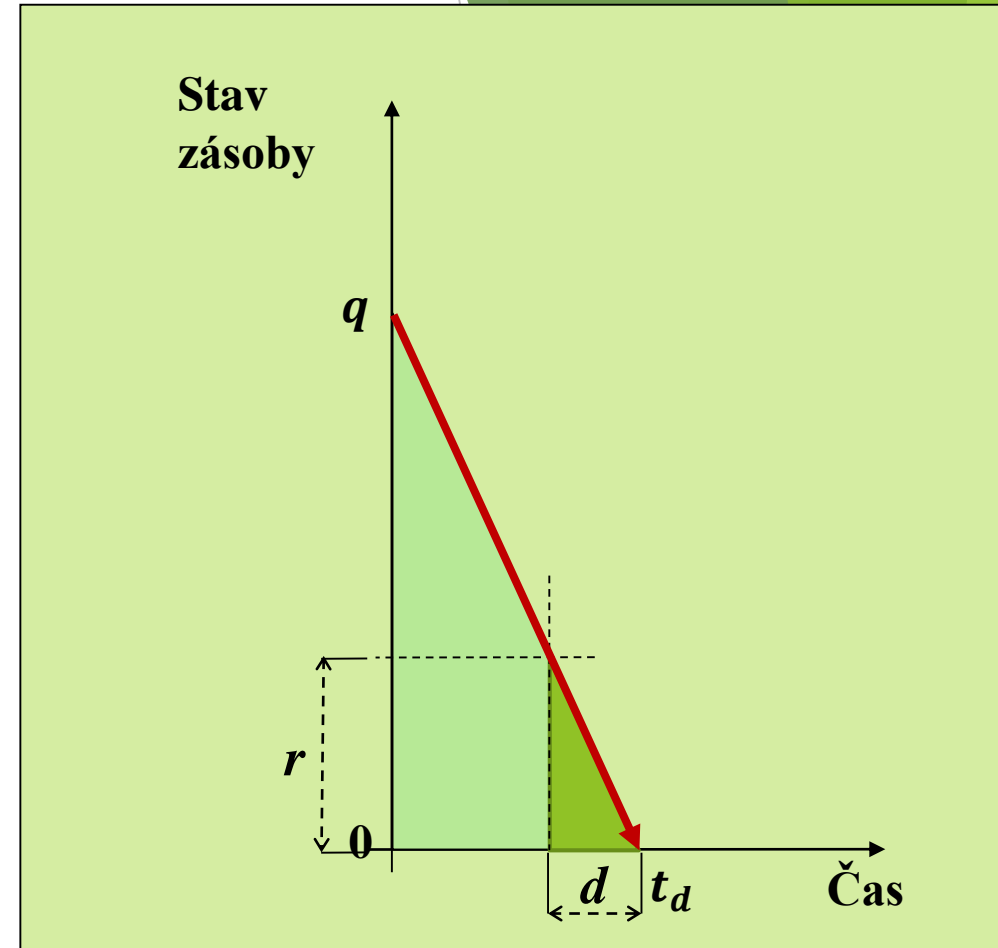
- ▶ Z podobnosti trojúhelníků:

$$\frac{q}{t_d} = \frac{r}{d}$$

- ▶ Bod znovuobjednávky

$$r = d \cdot \frac{q}{t_d} = d \cdot Q$$

(zbytek po celočíselném dělení hodnotou q^*)



7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ **Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?**
- ▶ Kolik budou činit optimální náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?

- ▶ Jaká musí být kapacita skladu?
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

$$r^* = d \cdot Q$$

7.1 EOQ - Otázky

- ▶ Kolik papírů má firma objednat?
- ▶ Kdy má vystavit objednávku na nové zboží?
- ▶ Kolik budou činit optimální náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové skladovací náklady?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na pořízení?
- ▶ Kolik budou činit celkové náklady na nákup zboží?
- ▶ Jaká musí být kapacita skladu?
- ▶ Kolik zboží bude průměrně ve skladu?

7.1 EOQ - Příklad

- ▶ $Q = 2\,500$ ks/měsíc
- ▶ $c_p = 580$ Kč/ks
- ▶ $c_n = 320$ Kč/ks
- ▶ $c_s = 40$ Kč/ks
- ▶ $c_d = 2\,000$ Kč/dodávku
- ▶ $d = \frac{1}{10} = 0,1$ měsíce

$$q^* = 500$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot Q \cdot c_d}{c_s}}$$

$$N_s^* = 10\,000$$

$$N_s^* = \sqrt{\frac{Q \cdot c_d \cdot c_s}{2}}$$

$$N_d^* = 10\,000$$

$$N_d^* = \sqrt{\frac{Q \cdot c_d \cdot c_s}{2}}$$

$$N^* = 20\,000$$

$$N^* = \sqrt{2 \cdot Q \cdot c_d \cdot c_s}$$

$$t_d^* = 1 / 5$$

$$t_d^* = \frac{q^*}{Q}$$

$$r^* = 250$$

$$r^* = d \cdot Q$$

7.1 EOQ - Příklad

▶ $Q = 2\,500$ ks/měsíc

$$q^* = 500$$

▶ $c_p = 580$ Kč/ks

$$N_s^* = 10\,000$$

▶ $c_n = 320$ Kč/ks

$$N_d^* = 10\,000$$

▶ $c_s = 40$ Kč/ks

▶ $c_d = 2\,000$ Kč/dodávku

$$N^* = 20\,000$$

▶ $d = \frac{1}{10} = 0,1$ měsíce

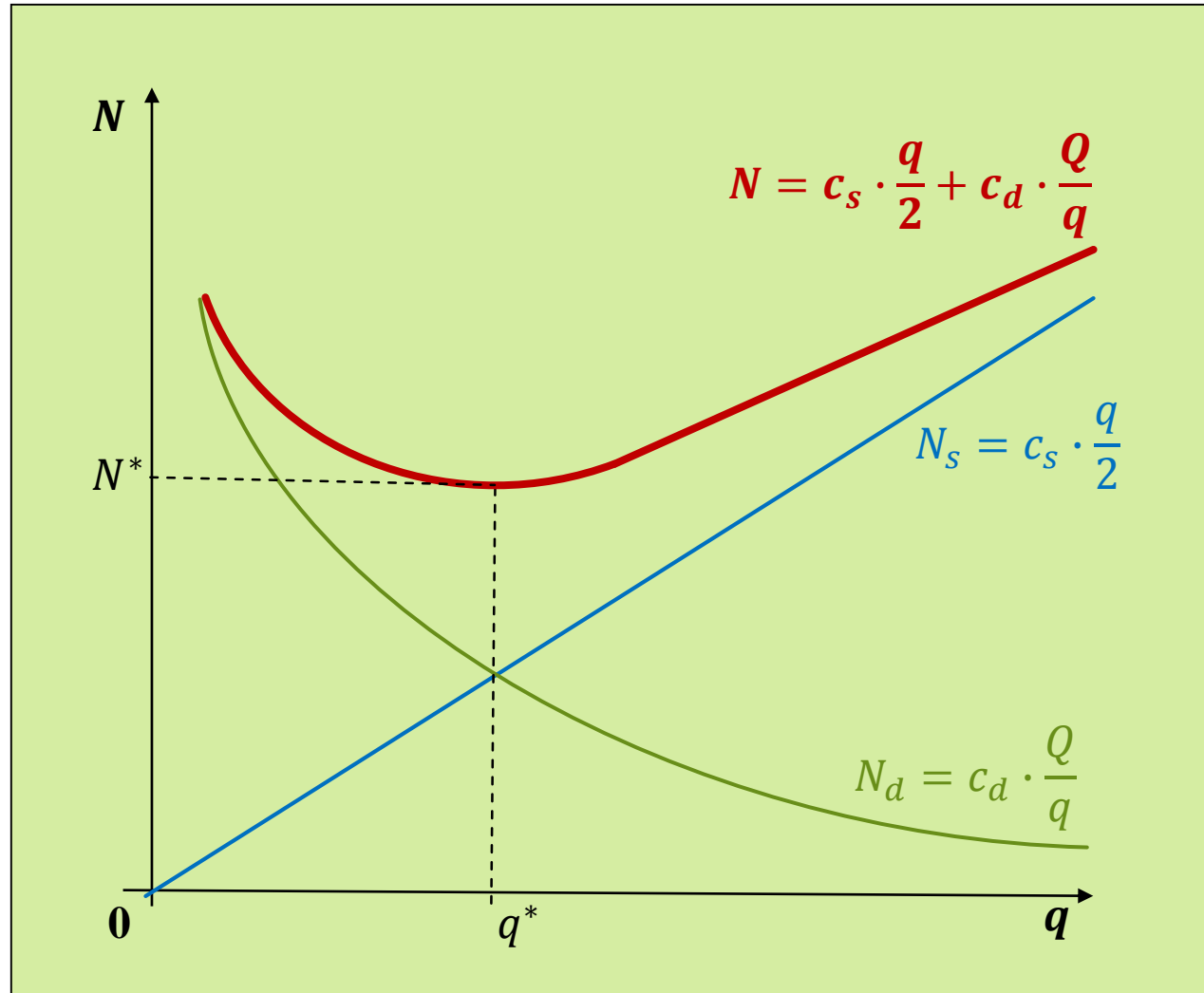
$$\begin{aligned} N_n &= c_n \cdot Q \\ &= 320 \cdot 2\,500 \\ &= 80\,000 \end{aligned}$$

$$t_d^* = 1 / 5$$

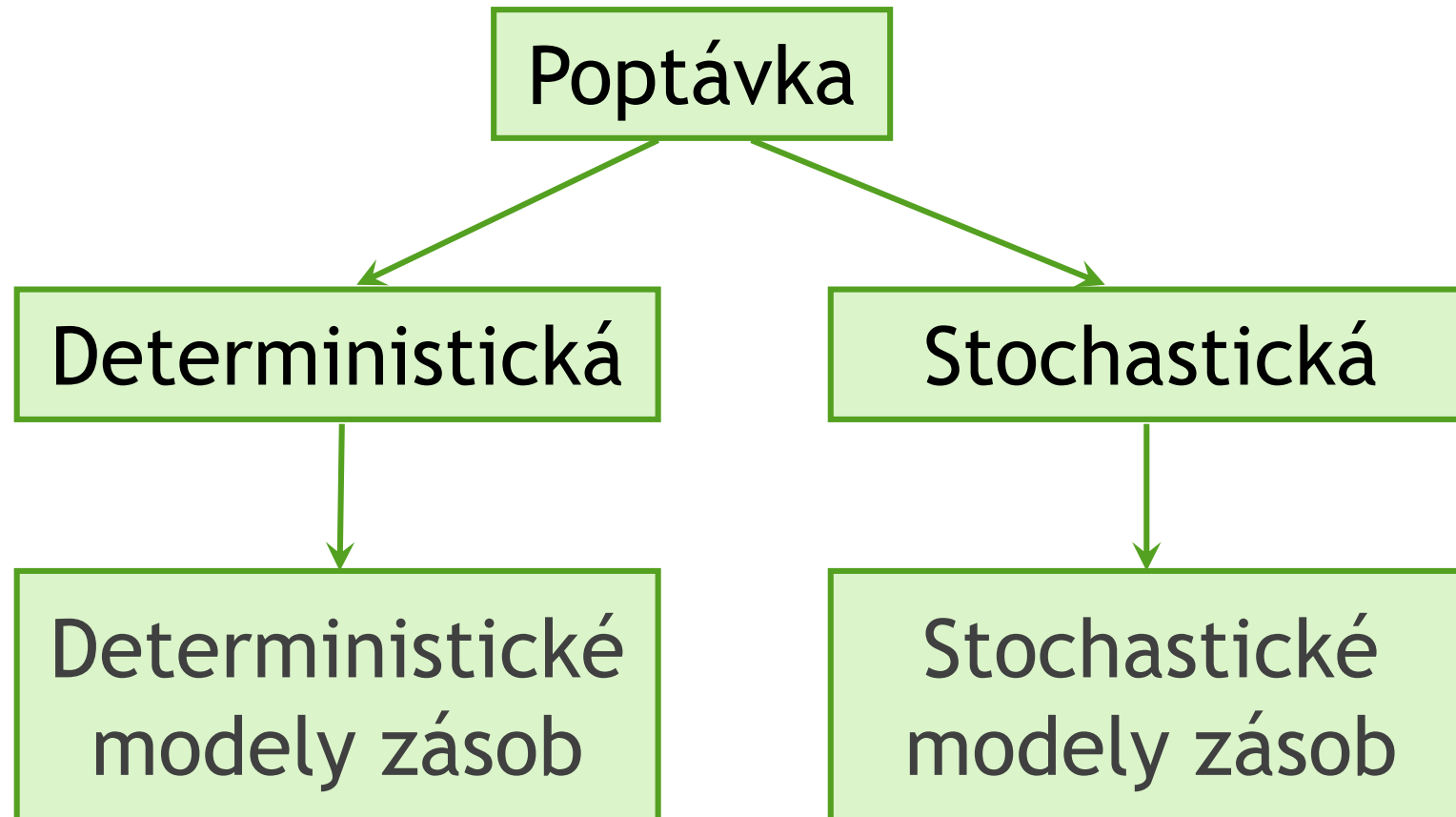
$$r^* = 250$$

q	n_d	N_s	N_d	N
2 500	1	50 000	2 000	52 000
500	5	10 000	10 000	20 000
250	10	5 000	20 000	25 000
100	25	2 000	50 000	52 000
50	50	1 000	100 000	101 000
25	100	500	200 000	200 500
10	250	200	500 000	500 200

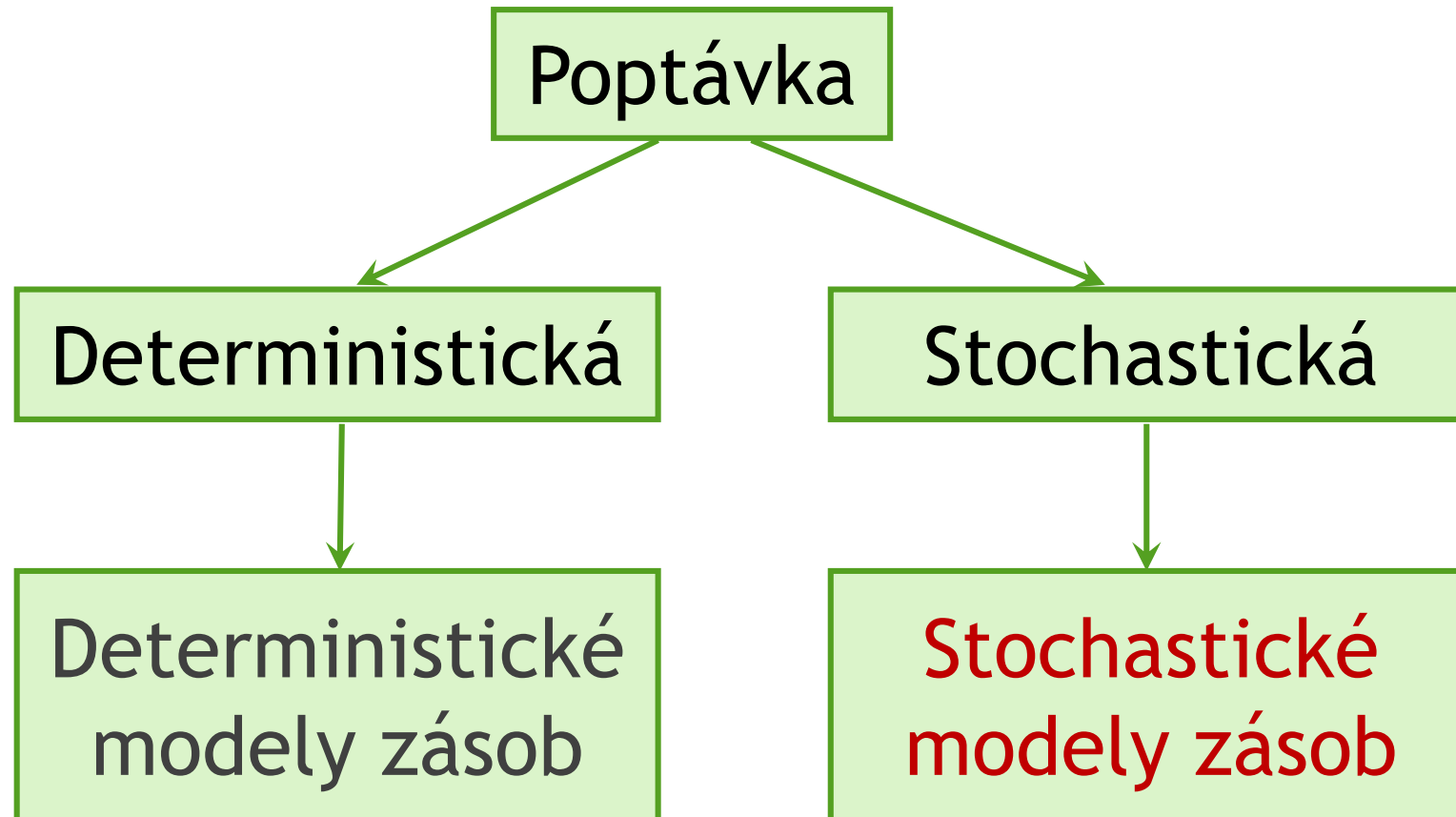
7.1 EOQ - Nákladové funkce



7. Charakter poptávky

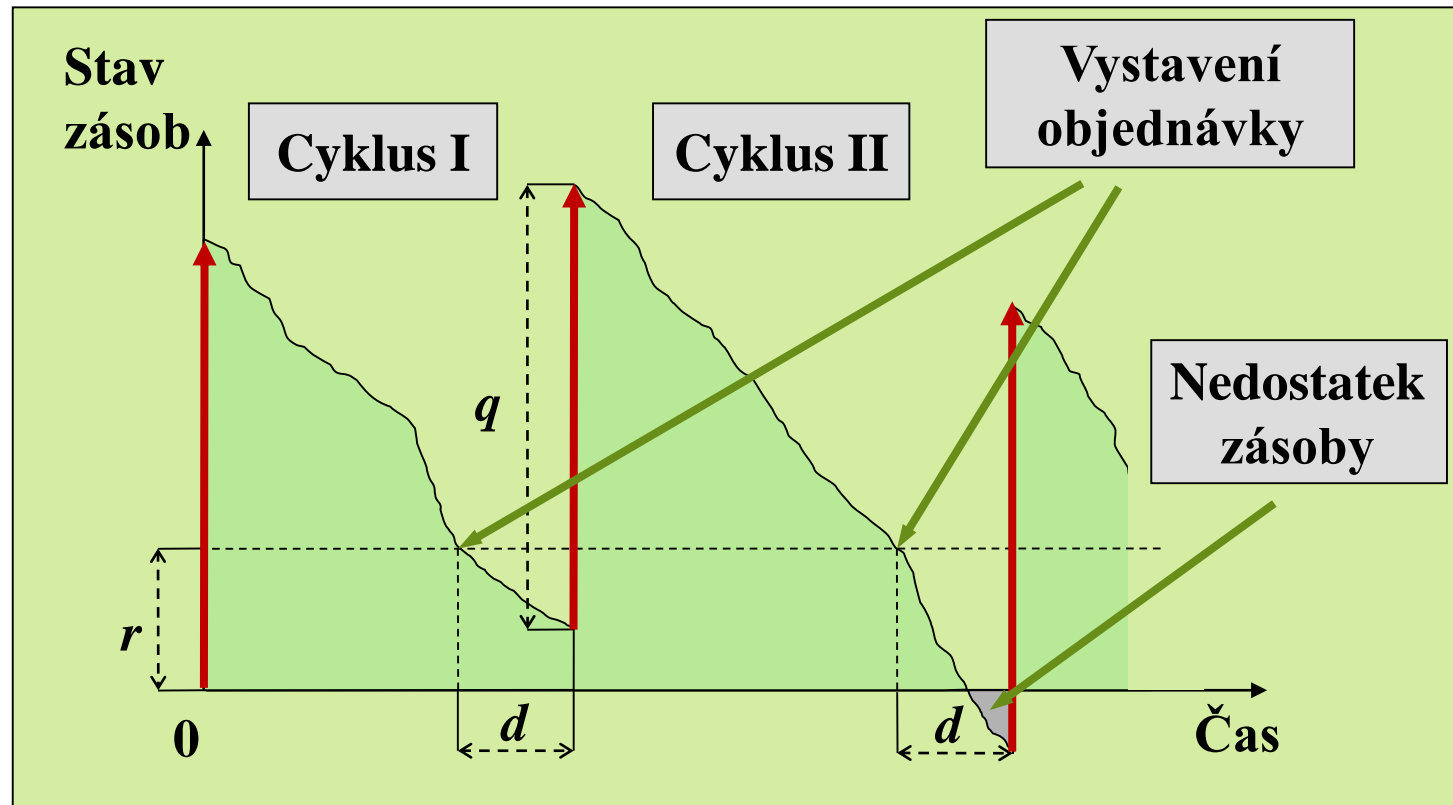


7. Charakter poptávky



7.2 Stochastický model se spojitou poptávkou

Model II



7.2 Stochastický model se spojitou poptávkou

► Předpoklady:

- **Stochastická** poptávka Q - známé pravděpodobnostní rozdělení
- Pořizovací lhůta dodávky d je známá a konstantní
- Čerpání zásob ze skladu **odpovídá aktuální poptávce**
- Velikost všech objednávek (dodávek) q je konstantní
- Bez rabatů - nákupní cena c_n nezávisí na velikosti objednávky q
- K doplňování skladu dochází v jednom časovém okamžiku
- ~~K doplňování skladu dochází přesně v okamžiku, kdy je vyčerpán (žádný nedostatek)~~

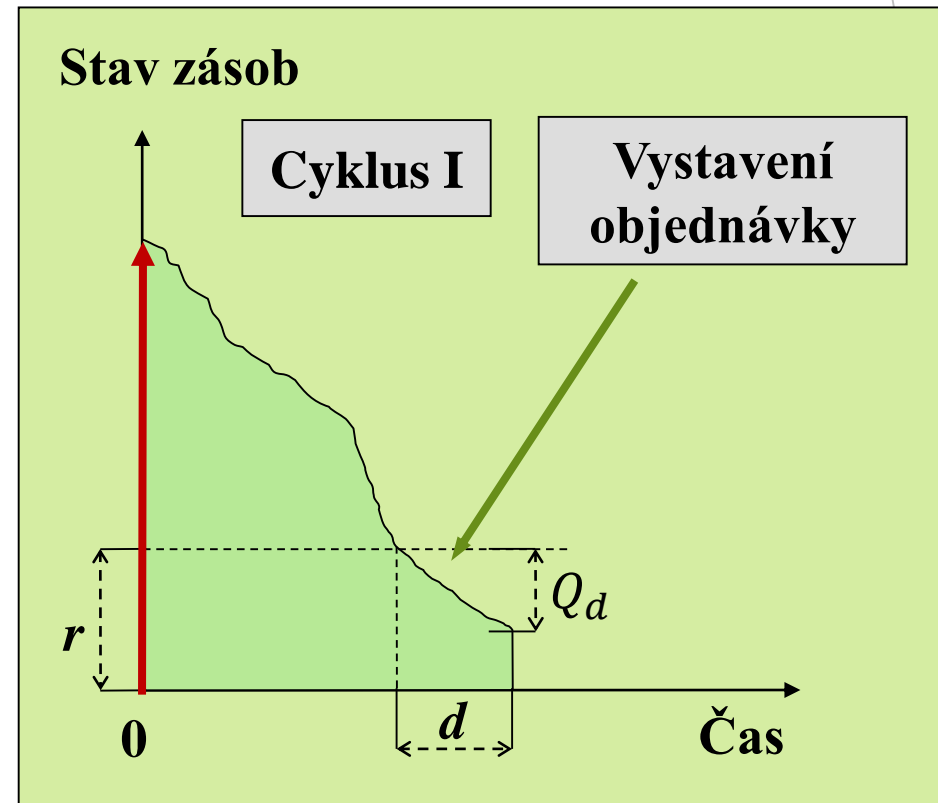
7.2 Stochastický model se spojitou poptávkou

- ▶ Objednávka je vystavena v okamžiku, kdy je množství zásob na skladě rovno bodu znovuobjednávky, tedy r
- ▶ Pořizovací lhůta je d a během této lhůty je skutečná poptávka po zboží rovna Q_d
- ▶ Během zásobovacího cyklu (vzhledem k náhodnosti poptávky) mohou nastat dvě možné situace:
 - ▶ 1. $Q_d < r$
 - ▶ 2. $Q_d > r$

Může nastat $Q_d = r$?

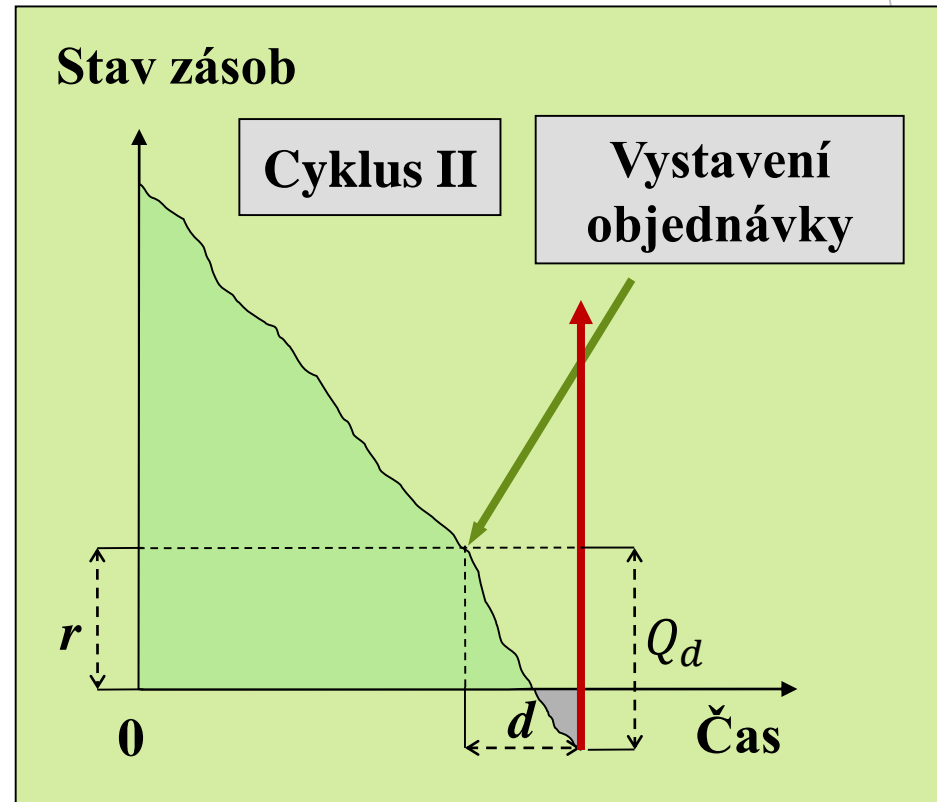
7.2 Stochastický model se spojitou poptávkou

- ▶ 1. $Q_d < r$
 - ▶ Poptávka během pořizovací lhůty Q_d bude nižší než bod znovuobjednávky r
 - ▶ Nová dodávka přijde na sklad v okamžiku, kdy tam je ještě zboží
 - ▶ **Přebytek zásob na skladě**
 - ▶ Cyklus I na obrázku



7.2 Stochastický model se spojitou poptávkou

- ▶ 2. $Q_d > r$
 - ▶ Poptávka během pořizovací lhůty Q_d bude vyšší než bod znovuobjednávky r
 - ▶ Nová dodávka přijde na sklad v okamžiku, kdy již byly zásoby vyčerpány a došlo k neuspokojení požadavků
 - ▶ **Nedostatek zásob na skladě**
 - ▶ Cyklus II na obrázku



7.2 Stochastický model se spojitou poptávkou

- ▶ Poptávka Q je popsána
 - ▶ Typem rozdělení (rovnoměrné, **normální**, apod.)
 - ▶ Svou střední hodnotou μ_Q
 - ▶ Svou směrodatnou odchylkou σ_Q (nebo rozptylem σ_Q^2)
- ▶ Poptávka během pořizovací lhůty Q_d má pak
 - ▶ Střední hodnotu $\mu_d = d \cdot \mu_Q$
 - ▶ Směrodatnou odchylku $\sigma_d = d \cdot \sigma_Q$

7.2 Stochastický model se spojitou poptávkou

- ▶ Pro výpočty použijeme vztahy z EOQ modelu (kde $Q = \mu_Q$)

- ▶
$$N = c_s \cdot \frac{q}{2} + c_d \cdot \frac{\mu_Q}{q}$$

- ▶
$$N_s^* = N_d^* = \sqrt{\frac{\mu_Q \cdot c_s \cdot c_d}{2}}$$

- ▶
$$N^* = \sqrt{2 \cdot \mu_Q \cdot c_s \cdot c_d}$$

- ▶
$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_Q \cdot c_d}{c_s}}$$

- ▶
$$t_d^* = \frac{q^*}{\mu_Q}$$

- ▶
$$r^* = d \cdot \mu_Q = \mu_d$$

7.2 Stochastický model se spojitou poptávkou

Předpoklad:

- ▶ Poptávka během pořizovací lhůty Q_d má (normální) rozdělení
 - ▶ Se střední hodnotou $\mu_d = d \cdot \mu_Q$
 - ▶ Se směrodatnou odchylkou $\sigma_d = d \cdot \sigma_Q$
- ▶ Vystavíme-li objednávku v okamžiku, který odpovídá bodu znovuobjednávky $r^* = \mu_d$
 - ▶ S pravděpodobností 50 % dojde k přebytku zásob a
 - ▶ S pravděpodobností 50 % dojde k nedostatku zásob

7.2 Stochastický model se spojitou poptávkou

- ▶ **Úroveň obsluhy γ** = pravděpodobnost, že v rámci jednoho cyklu nedojde k neuspokojení požadavků
 - ▶ pravděpodobnost, že nedojde k nedostatku zásob
- ▶ Pro $r = r^*$ je $\gamma = 0,5$.
- ▶ Pro zvýšení γ je třeba vystavit objednávku dříve:
 - ▶ v okamžiku, kdy je na skladě více zásob,
 - ▶ tedy $r > r^*$,
 - ▶ označme tento bod znovuobjednávky r_γ

7.2 Stochastický model se spojitou poptávkou

- ▶ **Úroveň obsluhy γ** = pravděpodobnost, že v rámci jednoho cyklu nedojde k neuspokojení požadavků
- ▶ Bod znovuobjednávky pro úroveň obsluhy γ :
$$r_\gamma = r^* + w$$
- ▶ kde w představuje **pojistnou zásobu**
 - ▶ = dodatečná zásoba, která umožňuje pokrýt převis poptávky v průběhu pořizovací lhůty
 - ▶ Vyšší pojistná zásoba však zvyšuje skladovací náklady N_s
 - ▶ Střední hodnota celkových nákladů

$$\mu_N = \sqrt{2 \cdot \mu_Q \cdot c_s \cdot c_d} + c_s \cdot w$$

**Skladovací náklady
pojistné zásoby**

7.2 Stochastický model se spojitou poptávkou

- ▶ Hledáme w takové, že

$$P(Q_d \leq r^* + w) \geq \gamma$$

- ▶ Poptávka během pořizovací lhůty nepřesáhne stav zásob (nedojde k nedostatku)
- ▶ Dle předpokladu má $Q_d \sim N(\mu_d, \sigma_d^2) = N(r^*, \sigma_d^2)$
- ▶ Transformovaná veličina (hodnoty tabelovány)

$$z = \frac{Q_d - r^*}{\sigma_d} \sim N(0,1)$$

- ▶ Odtud $Q_d = r^* + z_\gamma \cdot \sigma_d$
- ▶ A tedy $w \geq z_\gamma \cdot \sigma_d$

$$z_\gamma \cdot \sigma_d \leq w$$

$$r^* + z_\gamma \cdot \sigma_d \leq r^* + w$$

$$r^* + z_\gamma \cdot \sigma_d = Q_d \leq r^* + w$$

7.2 Spojitá poptávka - Příklad

- ▶ $Q \sim N(2\,500; 400)$
ks/měsíc
- ▶ $c_s = 40$ Kč/ks
- ▶ $c_d = 2\,000$ Kč/dodávku
- ▶ $d = \frac{1}{10} = 0,1$ měsíce
- ▶ $\mu_Q = 2\,500$
- ▶ $\sigma_Q = 20$
- ▶ $\mu_d = d \cdot \mu_Q = 250$
- ▶ $\sigma_d = d \cdot \sigma_Q = 2$

$$q^* = 500$$

$$N_s^* = 10\,000$$

$$N_d^* = 10\,000$$

$$N^* = 20\,000$$

$$t_d^* = 1/5$$

$$r^* = 250$$

$$\triangleright q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_Q \cdot c_d}{c_s}}$$

$$\triangleright N_s^* = \sqrt{\frac{\mu_Q \cdot c_d \cdot c_s}{2}}$$

$$\triangleright N_d^* = \sqrt{\frac{\mu_Q \cdot c_d \cdot c_s}{2}}$$

$$\triangleright N^* = \sqrt{2 \cdot \mu_Q \cdot c_d \cdot c_s}$$

$$\triangleright t_d^* = \frac{q^*}{\mu_Q}$$

$$\triangleright r^* = d \cdot \mu_Q = \mu_d$$

7.2 Spojitá poptávka - Příklad

- ▶ Objednáme tedy $q^* = 500$ ks v okamžiku, kdy je na skladě posledních $r^* = 250$ ks
- ▶ Jaká bude úroveň obsluhy? $\gamma = 0,5$
- ▶ Jaká je ekonomická interpretace této hodnoty?
- ▶ Co musíme udělat, aby se úroveň obsluhy zvedla na 90 %?
 $w \geq z_{0,9} \cdot \sigma_d$
- ▶ $w \geq z_{0,9} \cdot \sigma_d = 1,282 \cdot 2 = 2,564$
- ▶ A tedy $r = r^* + w \geq 250 + 2,564 = 252,564$
- ▶ Objednávku vystavíme v okamžiku, kdy je na skladě **253 ks** zboží.

$$q^* = 500$$

$$r^* = 250$$

$$w \geq z_{\gamma} \cdot \sigma_d$$

$$\mu_d = 250$$

$$\sigma_d = 2$$

7.2 Spojitá poptávka - Příklad

- ▶ Co se změní, pokud chceme úroveň obsluhy zvedla na **95 %**?

$$w \geq z_{0,95} \cdot \sigma_d$$

- ▶ $w \geq z_{0,95} \cdot \sigma_d = 1,645 \cdot 2 = 3,290$

- ▶ A tedy $r = r^* + w \geq 250 + 3,290 = \mathbf{253,290}$

- ▶ Co se změní, pokud chceme úroveň obsluhy zvedla na **99 %**?

- ▶ $w \geq z_{0,99} \cdot \sigma_d = 2,326 \cdot 2 = 4,652$

- ▶ A tedy $r = r^* + w \geq 250 + 4,652 = \mathbf{254,652}$

7.2 Spojitá poptávka - Příklad

γ	r^*	min w	w	r	N_s	N_d	N_w
0,5	250	0	0	250	10 000	10 000	0
0,9	250	2,564	3	253	10 000	10 000	120
0,95	250	3,290	4	254	10 000	10 000	160
0,99	250	4,652	5	255	10 000	10 000	200

$$N = N_s + N_d + N_w = c_s \cdot \frac{q}{2} + c_d \cdot \frac{Q}{q} + c_s \cdot w$$

$$\mu_Q = 2\,500 \text{ ks}$$

$$c_s = 40 \text{ Kč/ks a měsíc}$$

$$c_d = 2\,000 \text{ Kč/dodávku}$$

7.3 Stochastický model s jednorázovou zásobou

Model III

- ▶ Stochastický model
- ▶ Předpoklady:
 - ▶ Velikost poptávky je náhodná veličina se známým rozdělením
 - ▶ Před začátkem období je uskutečněna jediná objednávka a dodávka (zásoby nelze doplňovat)
- ▶ Příklad:
 - ▶ Sezónní zboží (vánoční stromky, pomlázky apod.)
 - ▶ Rychle se kazící zboží (ovoce, zelenina, květiny, ...)

7.3 Jednorázová zásoba - Příklad

- ▶ Firma v letní sezóně prodá 75 až 225 ks dámských plavek za 930 Kč za kus
- ▶ Tyto plavky nakupuje za 670 Kč za kus (tato cena obsahuje i dodatečné jednotkové náklady např. na skladování)
- ▶ Pokud plavky v letní sezóně neprodá, vyprodává je v podzimním výprodeji za cenu 550 Kč za kus
- ▶ Jaké množství dámských plavek má objednat, aby minimalizovala celkové náklady?
- ▶ Předpokládejme, že poptávka po plavkách má normální rozdělení.

$$c_p = 930 \text{ Kč/ks}$$

$$c_n = 670 \text{ Kč/ks}$$

$$c_z = 550 \text{ Kč/ks}$$

$$Q \sim N(150, 1875) = N(150, 43,3^2)$$

7.3 Stochastický model s jednorázovou zásobou

▶ Tři možné situace:

▶ 1.) Firma objedná více zboží než prodá

$$q > Q$$

▶ Přebytečné zboží ($q - Q$) firma prodá se slevou za zůstatkovou cenu c_z

▶ $ML = \frac{dL}{dq}$ (mezní ztráta, marginal loss)

$$ML = c_n - c_z \text{ (ve skriptech } c_1)$$

▶ Firma utrpí celkovou ztrátu: $L = (c_n - c_z)(q - Q)$

7.3 Stochastický model s jednorázovou zásobou

► Tři možné situace:

► 2.) Firma objedná méně zboží než by prodala

$$q < Q$$

► Chybějící zboží $(Q - q)$ způsobí firmě ztrátu na ušlém zisku

► $MPL = -\frac{dPL}{dq}$ (mezní ušlý zisk, marginal profit loss)

$$MPL = c_p - c_n \text{ (ve skriptech } c_2)$$

► Firma má celkový ušlý zisk: $PL = (c_p - c_n)(Q - q)$

7.3 Stochastický model s jednorázovou zásobou

- ▶ Tři možné situace:
- ▶ 3.) Firma objedná právě tolik zboží kolik prodá
$$q = Q$$
 - ▶ Nedojde k žádným ztrátám ani ušlému zisku
 - ▶ Hypotetický případ
 - ▶ Vzhledem k nulovým ztrátám není třeba se tímto případem zabývat

7.3 Stochastický model s jednorázovou zásobou

- ▶ Předpokládejme, že
- ▶ první případ $q > Q$ nastane s pravděpodobností p
- ▶ a druhý případ $q < Q$ s pravděpodobností $(1 - p)$

- ▶ Celkové očekávané náklady související s přebytkem a nedostatkem zásob jsou

$$\begin{aligned} N &= pL + (1 - p)PL \\ &= p(c_n - c_z)(q - Q) + (1 - p)(c_p - c_n)(Q - q) \end{aligned}$$

7.3 Stochastický model s jednorázovou zásobou

- ▶ Cílem je stanovit takové q , aby celkové náklady N byly minimální
- ▶ Minimalizace (podmínky prvního řádu - derivace):

$$\frac{dN}{dq} = 0$$

$$\frac{dN}{dq} = \frac{d(p(c_n - c_z)(q - Q) + (1 - p)(c_p - c_n)(Q - q))}{dq}$$

7.3 Stochastický model s jednorázovou zásobou

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dq} &= \frac{d(p(c_n - c_z)(q - Q) + (1 - p)(c_p - c_n)(Q - q))}{dq} \\ &= \frac{d(p(c_n - c_z)q - p(c_n - c_z)Q + (1 - p)(c_p - c_n)Q - (1 - p)(c_p - c_n)q)}{dq} \\ &= p(c_n - c_z) - (1 - p)(c_p - c_n) = pML - (1 - p)MPL \\ \frac{dN}{dq} &= pML - (1 - p)MPL = 0 \\ pML &= (1 - p)MPL \\ pML &= MPL - pMPL \\ pML + pMPL &= MPL \\ p(ML + MPL) &= MPL \\ p &= \frac{MPL}{ML + MPL} \end{aligned}$$

7.3 Stochastický model s jednorázovou zásobou

- ▶ Dokázali jsme (po ověření podmínek druhého řádu), že minimální náklady související s přebytkem a nedostatkem zásob jsou v případě, že

$$p = \frac{MPL}{ML + MPL}$$

- ▶ Pravděpodobnost nedostatku zásob nazýváme úroveň obsluhy a tedy $p = \gamma$

$$\gamma = \frac{MPL}{ML + MPL} = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

7.3 Stochastický model s jednorázovou zásobou

$$\gamma = \frac{MPL}{ML + MPL} = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

- ▶ Optimální počáteční zásoba q^* :

$$P(q^* \geq Q) \geq \gamma$$

- ▶ Postup:

- ▶ Spočítáme optimální úroveň obsluhy γ
- ▶ Najdeme tabulkovou hodnotu pro příslušné rozdělení
- ▶ Dopočítáme q^* (zpětnou transformací tabulkové veličiny)

$$\text{▶ } Q \sim N(\mu_Q, \sigma_Q^2) \rightarrow z = \frac{Q - \mu_Q}{\sigma_Q} \sim N(0,1) \rightarrow q^* = \mu_Q + z_\gamma \cdot \sigma_Q$$

7.3 Jednorázová zásoba - Příklad

- ▶ Firma v letní sezóně prodá 75 až 225 ks dámských plavek za 930 Kč za kus
- ▶ Tyto plavky nakupuje za 670 Kč za kus (tato cena obsahuje i dodatečné jednotkové náklady např. na skladování)
- ▶ Pokud plavky v letní sezóně neprodá, vyprodává je v podzimním výprodeji za cenu 550 Kč za kus
- ▶ Jaké množství dámských plavek má objednat, aby minimalizovala celkové náklady?
- ▶ Předpokládejme, že poptávka po plavkách má normální rozdělení.

$$c_p = 930 \text{ Kč/ks}$$

$$c_n = 670 \text{ Kč/ks}$$

$$c_z = 550 \text{ Kč/ks}$$

$$Q \sim N(150, 1875) = N(150, 43,3^2)$$

7.3 Jednorázová zásoba - Příklad

▶ $c_p = 930$ Kč/ks

▶ $c_n = 670$ Kč/ks

▶ $c_z = 550$ Kč/ks

▶ $ML = 670 - 550 = 120$ Kč/ks

$$ML = c_n - c_z$$

▶ $MPL = 930 - 670 = 260$ Kč/ks

$$MPL = c_p - c_n$$

▶ S jakou pravděpodobností dojde k přebytku zásob?

▶ $p = \gamma = \frac{260}{120+260} = \frac{260}{380} = \frac{13}{19} \doteq 0,6842 = 68,42 \%$

$$p = \frac{MPL}{ML + MPL}$$

7.3 Jednorázová zásoba - Příklad

► S jakou pravděpodobností dojde k přebytku zásob?

$$\gamma = \frac{260}{120+260} = \frac{260}{380} = \frac{13}{19} \doteq 0,6842 = 68,42 \%$$

$$\gamma \quad Q \sim N(150, 43,3^2)$$

$$\gamma \quad z = \frac{Q - \mu_Q}{\sigma_Q} \sim N(0,1) \rightarrow Q = \mu_Q + z_\gamma \cdot \sigma_Q$$

$$\gamma \quad z_{0,6842} = 0,479$$

$$q^* = 150 + 0,479 \cdot 43,3 = 150 + 20,7407 = 170,7407 \doteq 171$$

Detaily k přednášce: skripta

KONEC