4EK212 – Kvantitativní management

1. Úvod do kvantitativního managementu a LP

Mgr. Jana SEKNIČKOVÁ, Ph.D.

- Nová budova, místnost 433
- Konzultační hodiny – InSIS
- E-mail: jana.seknickova@vse.cz
- Web: jana.seknicka.eu/vyuka
- Omluvy předmětu bez udání důvodu do konce března / října

- **Garant kurzu: prof. RNDr. Ing. Michal Černý, Ph.D.**
- Nová budova, místnost 430
- Konzultační hodiny – InSIS
- E-mail: cernym@vse.cz

Literatura, hodnocení

- **Doporučená literatura:**
- Pelikán J., Chýna V. : *Kvantitativní management*. *Oeconomica*, 2011.

- **Hodnocení (dle ECTS):**
- Práce v průběhu semestru – 40 bodů
  - 30 bodů – průběžný test
  - 10 bodů – práce na cvičení a/nebo doma
- Zkouška – 60 bodů
- Na posledním termínu nelze získat 4+

Body	Známka
90-100	1
75-89	2
60-74	3
50-59	4+
0-49	4

1.1 Podstata operačního výzkumu

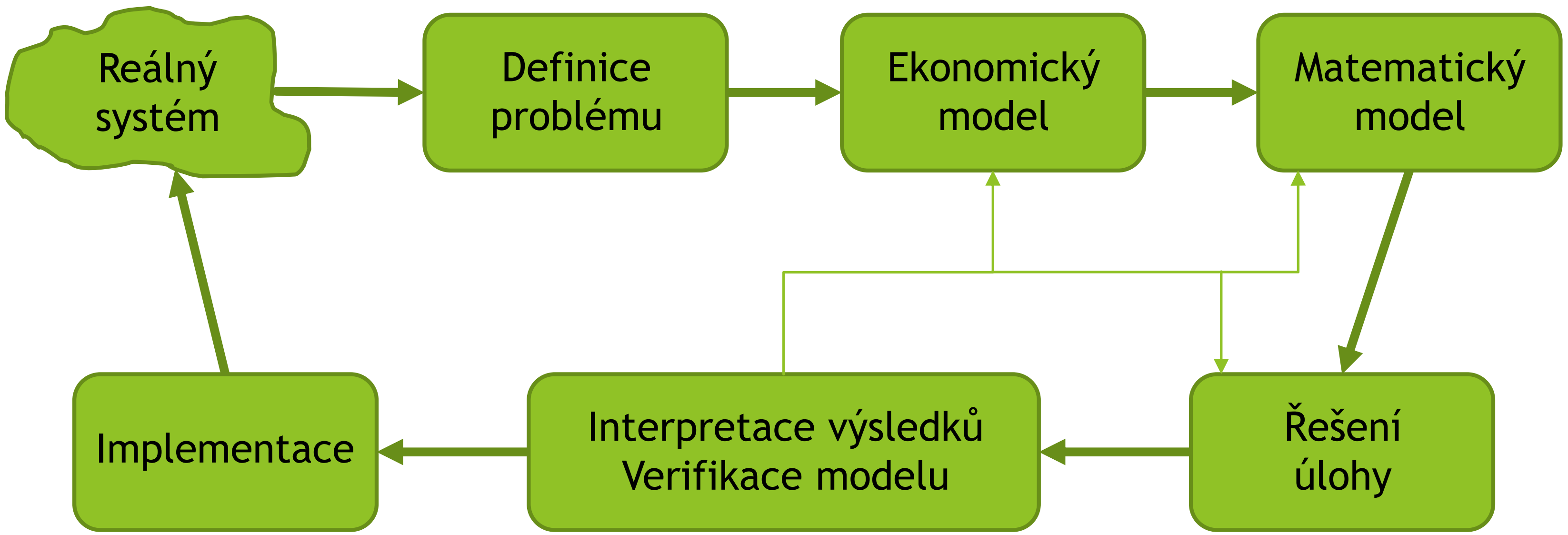
- **Operační výzkum (výzkum operací)**
  - Operational research, operations research, management science
  - Soubor disciplín zaměřených na analýzu rozhodovacích problémů
  - Analýza a koordinace prováděných operací v rámci systému
- **Historie**
  - Počátky ve 30. a 40. letech 20. století
  - G. B. Dantzig, L. Kantorovič – Nobelova cena za ekonomii
  - Zásadní rozvoj během 2. světové války (taktické operace) a po ní
  - Další ohromný rozvoj s vývojem výpočetní techniky

1.1 Podstata operačního výzkumu

- **Operační výzkum (výzkum operací)**
  - Snaha nalézt nejlepší (optimální) řešení daného problému při respektování všech omezení, která mají vliv na chod systému
  - Základním nástrojem – matematické modelování
- **Matematický model**
  - Zjednodušený obraz reálného systému
  - Umožňuje zkoumat
    - různé varianty systému
    - chování systému ve zkráceném čase
    - chování systému při změně parametrů
  - Nižší náklady na realizaci

1.1 Podstata operačního výzkumu

- **Fáze analýzy problému**



1.2 Ekonomický model

- Zjednodušený popis reálného systému
- Slovní a číselný popis problému
- Obsahuje nejpodstatnější prvky a vazby mezi nimi
  - **Cíl analýzy** - sledované kritérium optimality
  - **Procesy** – reálné aktivity probíhající s jistou intenzitou
  - **Činitelé** – omezení mající vliv na intenzitu procesů
  - **Vzájemné vztahy** mezi procesy, činiteli a cílem analýzy
- Pro řešení je třeba ekonomický model formalizovat (zapsat matematickými prostředky)

1.2 Matematický model

- Formální zápis ekonomického modelu (matematický)
- Obsahuje prvky analogické ekonomickému problému
  - **Účelová funkce (cíl analýzy)** – funkce *n* proměnných (lineární či nelineární, většinou jedna)
  - **Proměnné (procesy)** – hodnoty odpovídají intenzitám jednotlivých procesů
  - **Omezující podmínky (činitelé)** – většinou rovnice či nerovnice
  - **Parametry (vzájemné vztahy)** – jejich hodnoty nemůže uživatel ovlivňovat

1.2 Matematické programování

- Matematický model úlohy matematického programování

maximalizovat (minimalizovat)

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

za podmínek

$$\begin{gathered} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \end{gathered}$$

1.2 Matematické programování

- **Úloha lineárního programování (LP)**
  - Jsou-li všechny funkce, tj. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, i = 1,2, \dots, m$, lineární

- **Úloha nelineárního programování (NLP)**
  - Je-li alespoň jedna z funkcí $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ či $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, i = 1,2, \dots, m$, nelineární

1.3 Matematický model úlohy LP

- Nalézt **extrém účelové funkce**

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ \ldots + c_n x_n$$

na soustavě vlastních omezení

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ \ldots + a_{1n}x_n \mathbf{R}\, b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ \ldots + a_{2n}x_n \mathbf{R}\, b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ \ldots + a_{3n}x_n \mathbf{R}\, b_3$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ \ldots + a_{mn}x_n \mathbf{R}\, b_m$$

za podmínek nezápornosti

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

1. Definice proměnných (jednotky):
x_1 - počet vyrobených mobilů [ks]
x_2 - počet vyrobených tabletů [ks]

2. Vlastní omezení (jednotky):
$0{,}5\, x_1 + 1\, x_2 = \quad 8$ [hod.]
$x_1 \leq 2\, x_2$ [ks zařízení]

3. Podmínky nezápornosti (jednotky):
$x_1 \geq 0$ [ks mobilů]
$x_2 \geq 0$ [ks tabletů]

4. Účelová funkce (jednotky, extrém):
$\max z = 1000\, x_1 + 3000\, x_2$ [Kč]

1.3 Matematický model úlohy LP

- kde je

x_j … **proměnná** modelu **(strukturní)**

a_{ij} … **strukturní koeficient**

b_i … **pravá strana** i-tého omezení

c_j … **cenový koeficient** j-té proměnné (cena)

$\mathbf{R}$ … jedno z relačních znamének ≤, ≥, =

n … počet strukturních proměnných modelu

m … počet vlastních omezení modelu

$$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

1.4 Příklad - zadání

- Firma vyrábí dva typy paměťových karet: SD karty a mikro SD karty
- Oba typy karet jsou mimo jiné lisovány – vylisování krabičky SD karet trvá 1 minutu, krabička mikro SD karet je lisována 2 minuty
- Karty firma balí do krabiček, ve kterých je pak prodává - krabička SD karet se balí 1 minutu, krabička mikro SD karet 4 minuty
- Firma má k dispozici 2 hodiny času pro lisování a 3 hodiny času pro balení výrobků

1.4 Příklad - zadání

- Vzhledem k poptávce je třeba vyrobit alespoň o 90 krabiček SD karet více než krabiček mikro SD karet
- Z technických důvodů nelze vyrobit více než 110 krabiček SD karet
- Zisk z jedné krabičky SD karet je 40 Kč,
  z jedné krabičky mikro SD karet 60 Kč
- Firma nemá potíže s odbytem výrobků
- **Kolik krabiček SD a mikro SD karet má firma vyrobit, chce-li dosáhnout maximálního zisku?**

1.4 Příklad – ekonomický model

Procesy	**Jednotky**
Výroba SD karet (SD)	1 krabička (kr.)
Výroba mikro SD karet (mSD)	1 krabička
Činitelé na straně vstupu	
Čas na lisu	1 min.
Čas pro balení	1 min.
Činitelé na straně výstupu	
Vztah počtu SD a mSD	1 krabička
Max. počet SD	1 krabička
Cíl	
Maximální zisk	Kč

1.4 Příklad – kvantitativní vztahy

	SD	mSD	Kapacita	Jednotky
Jednotky	[krabička]	[krabička]		
Lis	1 [min./kr.]	2 [min./kr.]	2	[hod.]
Balení	1 [min./kr.]	4 [min./kr.]	3	[hod.]
Zisk	40 [Kč/kr.]	60 [Kč/kr.]		[Kč]

- Kapacitu lisu a balicí linky bude třeba převést na srovnatelné jednotky

1.4 Příklad – matematický model

	SD karty - x_1 [krabička]		**Mikro SD karty - x_2** [krabička]		
LIS	$1\,x_1$	+	$2\,x_2$	$\leq$	120 min
BALENÍ	$1\,x_1$	+	$4\,x_2$	$\leq$	180 min
POPTÁVKA	$1\,x_1$	-	$1\,x_2$	$\geq$	90 krabiček
SD KARTY	$1\,x_1$	+	$0\,x_2$	$\leq$	110 krabiček
NEZÁPORNOST			x_1, x_2	$\geq$	0
ZISK	$40\,x_1$	+	$60\,x_2$	…	max Kč

1.4 Příklad – srovnání EM a MM

Ekonomický model:

- **Procesy**
  - Výroba SD [Kr. SD]
  - Výroba mSD [Kr. mSD]
- **Činitelé**
  - Čas na lisu [min.]
  - Čas balení [min.]
  - Poptávka [krabičky]
  - Max. Kr.SD[krabičky]
- **Cíl**
  - Maximální zisk [Kč]

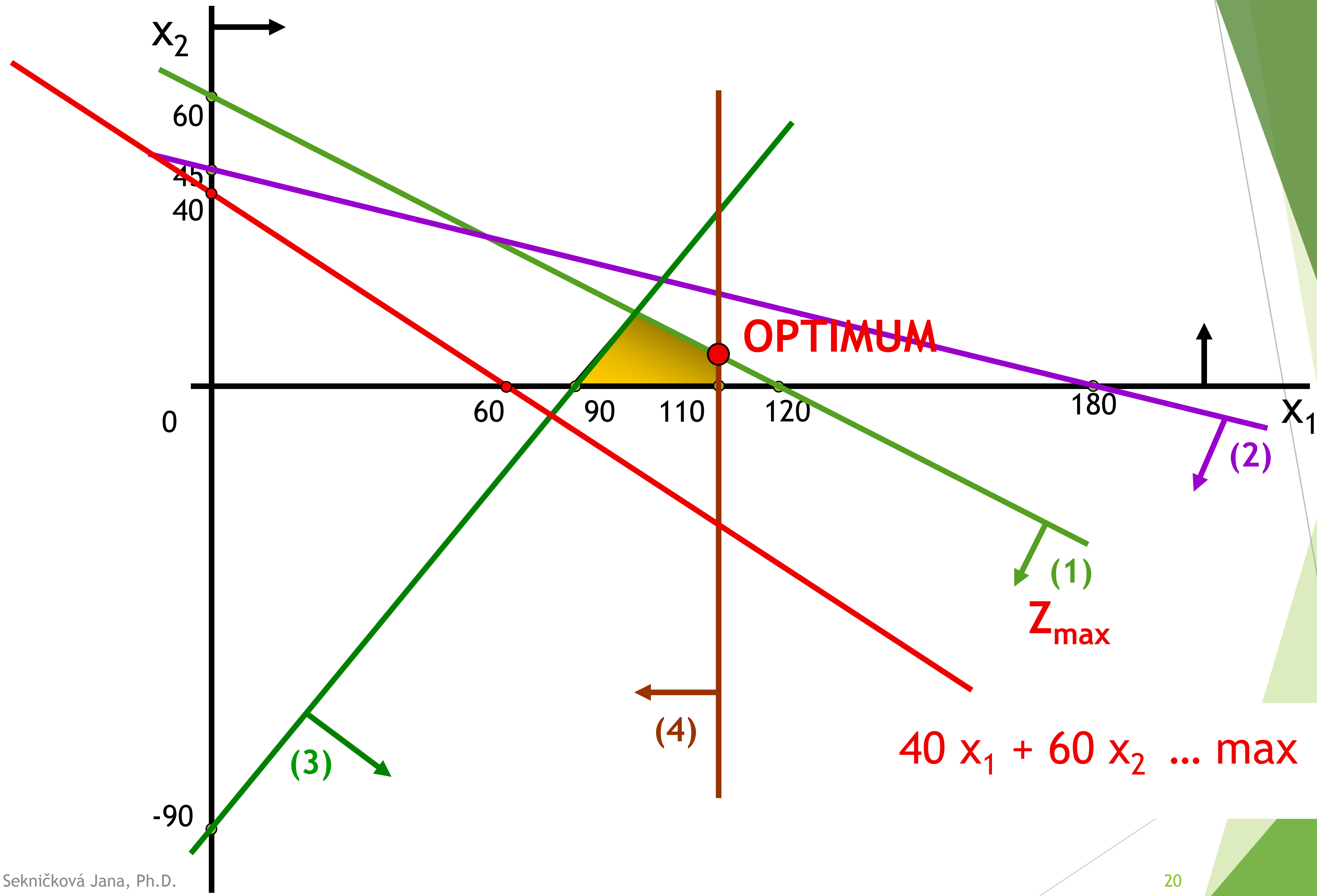
Matematický model:

- **Proměnné**
  - x_1 [Kr. SD]
  - x_2 [Kr. mSD]
- **Omezení**
  - spotřeba ≤ 120 [min.]
  - spotřeba ≤ 180 [min.]
  - Kr.SD – Kr.mSD ≥ 90 [krabičky]
  - Kr.SD ≤ 110 [krabičky]
- **Účelová funkce**
  - Maximální zisk [Kč]

1.5 Grafické řešení úlohy LP

Jednoduchou úlohu vyřešíme **graficky**:

- zvolíme **souřadnicový systém** os x_1 a x_2
- znázorníme všechna **omezení** modelu
- najdeme jejich **průnik** v prvním kvadrantu
- znázorníme **účelovou funkci**
- rovnoběžně ji posuneme tak, aby se dotkla průniku množin (shora nebo zdola)
- v bodě (popř. bodech) dotyku účelové funkce a množiny přípustných řešení je **optimální řešení**



$40\ x_1 + 60\ x_2$ … max

1.5 Grafické řešení úlohy LP

- **Optimální řešení** zadané úlohy leží na průsečíku dvou hraničních přímek omezení (1) a (4):

$$x_1 + 2x_2 = 120$$
$$x_1 \qquad = 110$$

- Odtud je $x_1 = 110, x_2 = 5$
- Bod optimálního řešení je tedy

$$\mathbf{x}^* = [110, 5]$$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
SD karty:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2$ … max [Kč]

- Hodnota účelové funkce je po dosazení

$$z = 40x_1 + 60x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 5 = 4700$$

1.6 Interpretace řešení úlohy LP

- **Ekonomická interpretace optimálního řešení**

  $x_1 = 110, x_2 = 5, z = 4700$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
SD karty:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

- Vyrobíme 110 krabiček SD karet
- Vyrobíme 5 krabiček mikro SD karet
- Celkový zisk bude 4700 Kč
- Kolik spotřebujeme času na lisu?
  - Lis bude v provozu $1\,x_1 + 2\,x_2 = 1 \cdot 110 + 2 \cdot 5 = 120$ minut.
- Kolik zbyde času na lisu?
  - Na lisu zbyde $120 - (1\,x_1 + 2\,x_2) = 120 - 120 = 0$ minut.

1.6 Interpretace řešení úlohy LP

- **Ekonomická interpretace optimálního řešení**

  $x_1 = 110, x_2 = 5, z = 4700$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
SD karty:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

- Kolik spotřebujeme času na balení?
  - 130 minut.
- Kolik zbyde času na balení (jaká je rezerva)?
  - Na balení zbyde $180 - (1\,x_1 + 4\,x_2) = 180 - 130 = 50$ minut.

1.6 Interpretace řešení úlohy LP

- **Ekonomická interpretace optimálního řešení**

  $x_1 = 110, x_2 = 5, z = 4700$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
SD karty:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

- O kolik SD karet vyrobíme více než mikro SD karet?
  - O 105 krabiček.
- Jaká je rezerva v poptávce?
  - Rezerva je $(1\,x_1 - 1\,x_2) - 90 = 105 - 90 = 15$ krabiček.

1.6 Interpretace řešení úlohy LP

- **Ekonomická interpretace optimálního řešení**

  $x_1 = 110, x_2 = 5, z = 4700$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
SD karty:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2$ ... max [Kč]

- Kolik SD karet vyrobíme?
  - 110 krabiček.
- Jaká je technologická rezerva?
  - Rezerva je $110 - (1\,x_1 + 0\,x_2) = 110 - 110 = 0$ krabiček.

1.6 Interpretace řešení úlohy LP

- Vypočtené rezervy jsou ekonomickou interpretací tzv. přídatných proměnných.
- Metody pro řešení úloh lineárního programování pracují s řešením soustavy rovnic (ESR), nikoliv se soustavou nerovnic.

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
SD karty:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]

Zisk: $z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 120 \text{ [min]}\\
1\,x_1 + 4\,x_2 + x_4 &= 180 \text{ [min]}\\
1\,x_1 - 1\,x_2 - x_5 &= 90 \text{ [krabiček]}\\
1\,x_1 + 0\,x_2 + x_6 &= 110 \text{ [krabiček]}\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$z - 40\,x_1 - 60\,x_2 = 0 \ldots \max \text{ [Kč]}$$

1.6 Interpretace řešení úlohy LP

- Strukturní proměnné:
  - $x_1 = 110$
  - $x_2 = 5$
- Přídatné proměnné:
  - $x_3 = 0$
  - $x_4 = 50$
  - $x_5 = 15$
  - $x_6 = 0$
- Optimální řešení: $\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^{\mathrm{T}}$

  $z = 4700$

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \quad\quad\quad\quad &= 120 \text{ [min]} \\
1\,x_1 + 4\,x_2 \quad + x_4 \quad\quad &= 180 \text{ [min]} \\
1\,x_1 - 1\,x_2 \quad\quad - x_5 \quad &= \ \ 90 \text{ [krabiček]} \\
1\,x_1 + 0\,x_2 \quad\quad\quad + x_6 &= 110 \text{ [krabiček]} \\
\\
z - 40\,x_1 - 60\,x_2 = 0 \ldots \max \text{ [Kč]}
\end{aligned}
$$

Detaily k přednášce: skripta

KONEC