4EK212 – Kvantitativní management

2. Lineární programování

1.7 Přídatné proměnné

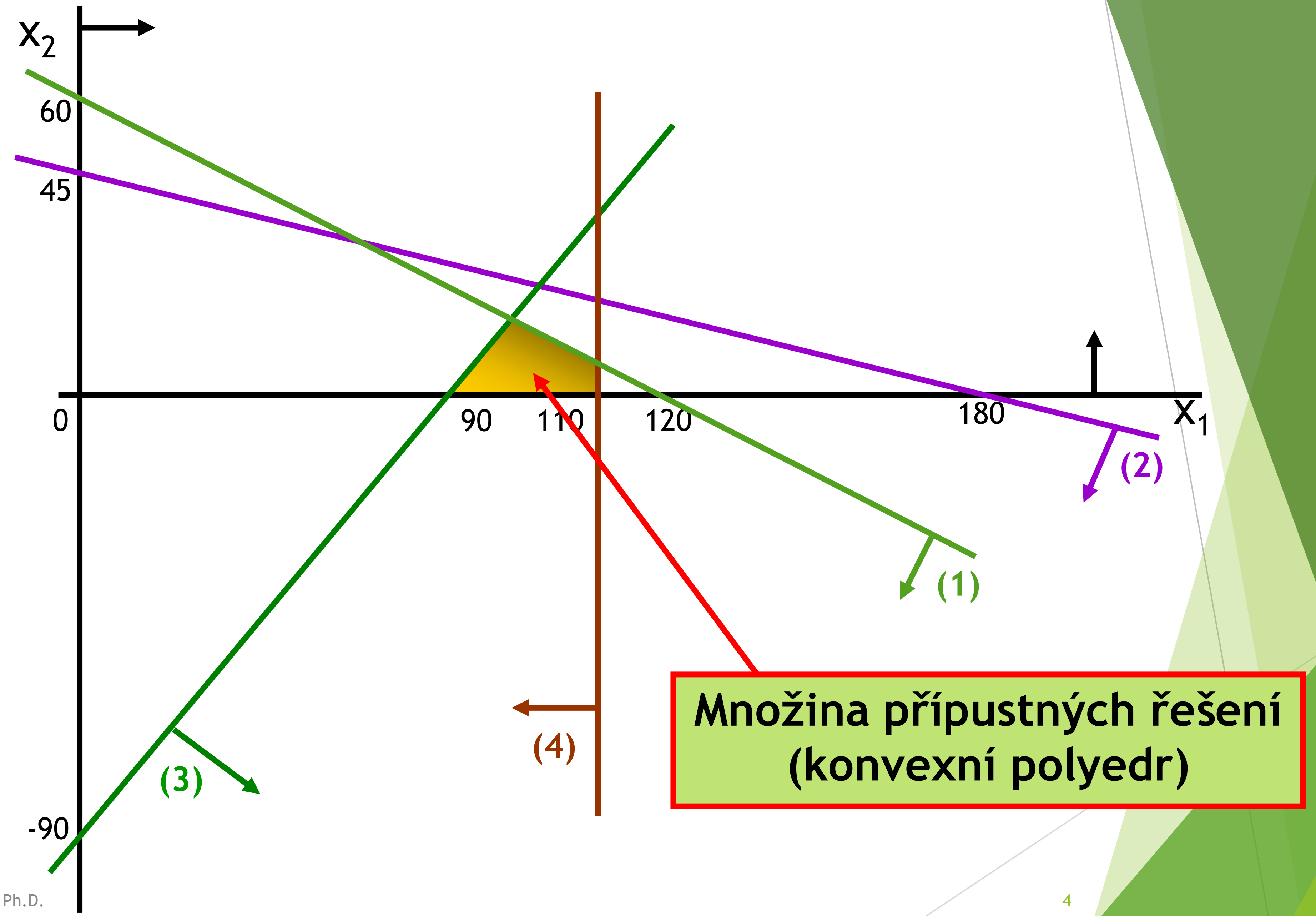
- Přídatné proměnné jsou nezáporné
- Mají svoji ekonomickou interpretaci, která je odvozena od ekonomické interpretace omezení
- Přídatná proměnná v omezení typu $\leq$ ukazuje objem nevyužité kapacity
- Přídatná proměnná v omezení typu $\geq$ ukazuje velikost překročení požadavku
- Cena přídatné proměnné je vzhledem k její ekonomické interpretaci rovna nule

1.8 Základní pojmy LP

Přípustné řešení úlohy LP je vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}$, jehož složky splňují vlastní omezení úlohy a podmínky nezápornosti

- **Počet přípustných řešení (PŘ):**
  - protože v ESR je počet proměnných (n+m) větší než počet rovnic (m), má úloha LP buď:

  1. nekonečně mnoho přípustných řešení nebo
  2. žádné přípustné řešení



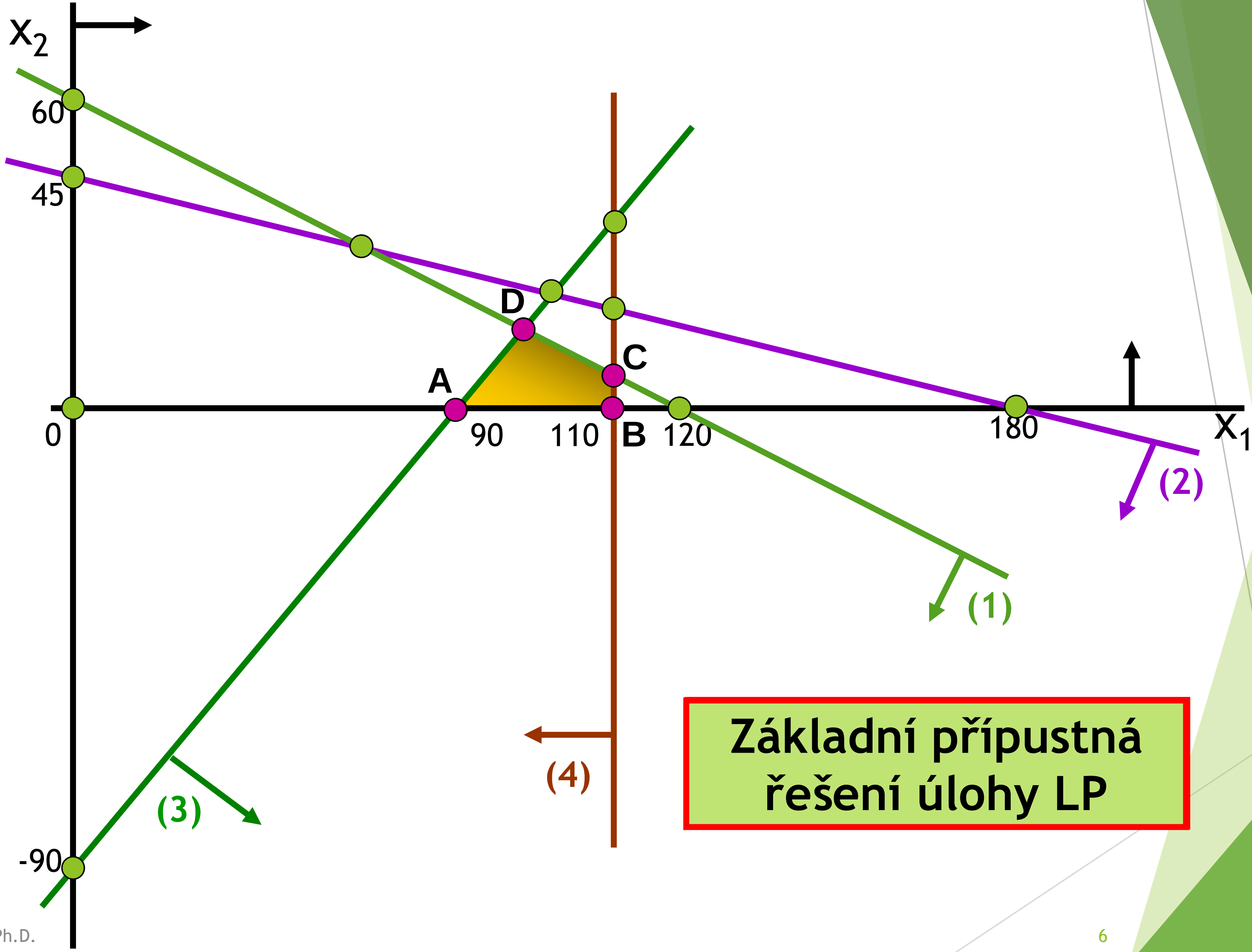
x2
60
45
0
90
110
120
180
x1
(1)
(2)
(3)
(4)
-90
Množina přípustných řešení
(konvexní polyedr)

1.8 Základní pojmy LP

- Průsečík každých dvou omezení odpovídá tzv.

  Základnímu řešení ekvivalentní soustavy rovnic (ESR)
- Vrcholy konvexního polyedru (množiny přípustných řešení)
  - Jsou také základními řešeními
  - Jsou navíc řešeními přípustnými
  - a zobrazují tzv.

    Základní přípustná řešení



Základní přípustná řešení úlohy LP

1.8 Základní pojmy LP

- **Výpočet základních přípustných řešení:**
- Bod A: (3) + ($x_2 \geq 0$) $\quad A = [\ 90, 0],\quad \mathbf{x} = (90, \mathbf{0}, 30, 90, \mathbf{0}, 20)^{\mathrm{T}}$
- Bod B: (4) + ($x_2 \geq 0$) $\quad B = [110, 0],\quad \mathbf{x} = (110, \mathbf{0}, 10, 70, 20, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$
- Bod C: (1) + (4) $\quad C = [110, 5],\quad \mathbf{x} = (110, 5, \mathbf{0}, 50, 15, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$
- Bod D: (1) + (3) $\quad D = [100, 10],\quad \mathbf{x} = (100, 10, \mathbf{0}, 40, \mathbf{0}, 10)^{\mathrm{T}}$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
SD karty:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \quad\quad\quad\quad &= 120 \text{ [min]}\\
1\,x_1 + 4\,x_2 \quad + x_4 \quad\quad\quad &= 180 \text{ [min]}\\
1\,x_1 - 1\,x_2 \quad\quad\quad - x_5 \quad &= \ \ 90 \text{ [krabiček]}\\
1\,x_1 + 0\,x_2 \quad\quad\quad\quad + x_6 &= 110 \text{ [krabiček]}\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1.8 Základní pojmy LP

Optimální řešení úlohy LP je takové přípustné řešení $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}$, které má nejvyšší (nejnižší) hodnotu účelové funkce.

- **Optimální řešení (OŘ):**
  - Přípustné řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce
  - Nejlepší přípustné řešení
  - Z grafického zobrazení je zřejmé, že existuje-li, musí ležet na hranici množiny přípustných řešení

1.8 Základní pojmy LP

- **Počet optimálních řešení:**

Optimální řešení úlohy LP je přípustné řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce.

- Pokud úloha LP nemá žádné přípustné řešení
  - Nemá žádné optimální řešení
- Pokud má úloha LP nekonečně mnoho přípustných řešení
  - Pak je optimální to s nejlepší hodnotou účelové funkce

1.8 Základní pojmy LP

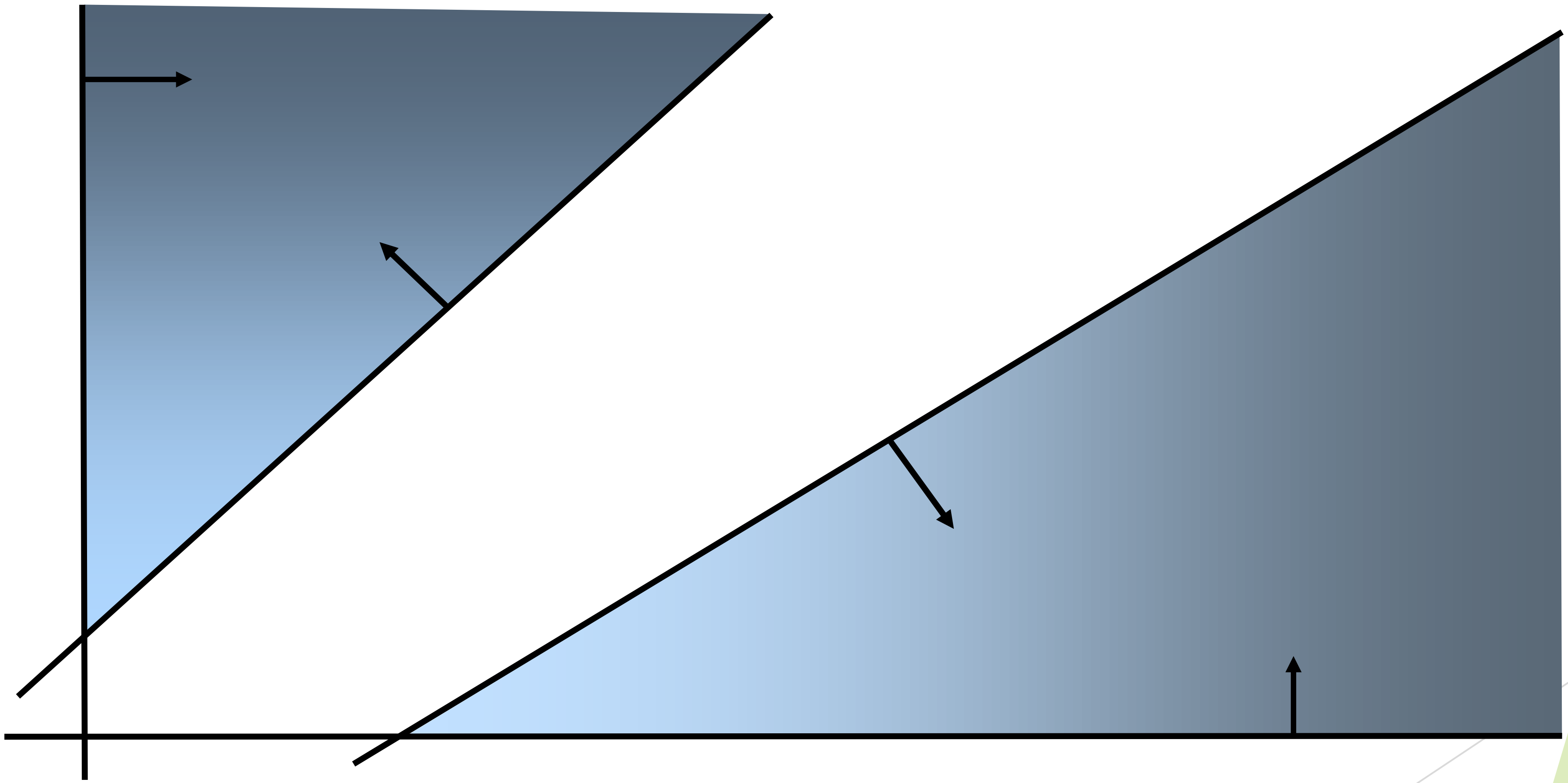
Musí OŘ existovat?
Musí být jediné?
Může jich být více?
Dokážeme ho vždy najít?

1.8 Základní pojmy LP

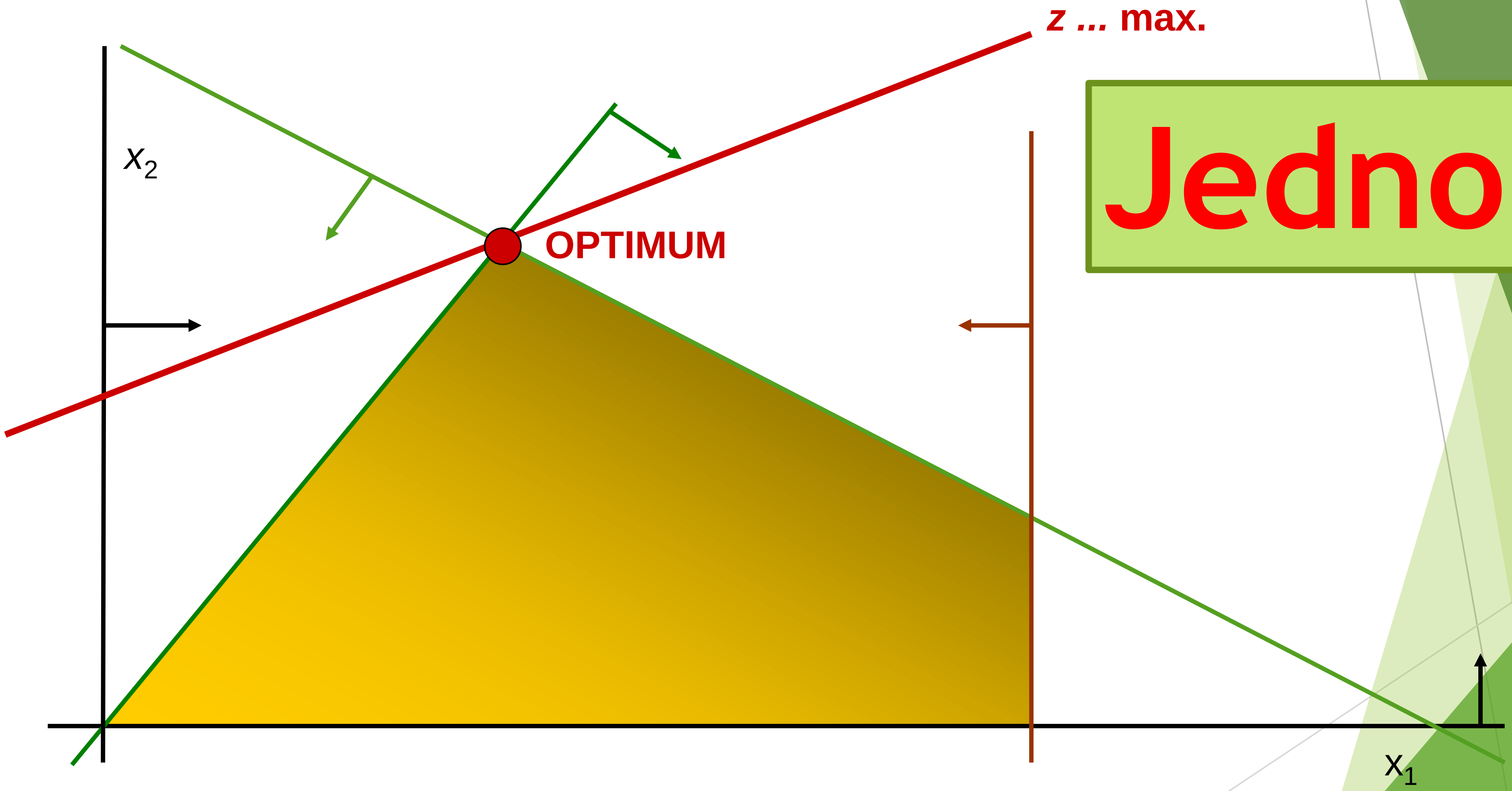
- **O počtu optimálních řešení rozhoduje:**
  - **Množina přípustných řešení**
    - Počet přípustných řešení (žádné, nekonečně mnoho)
    - Tvar množiny přípustných řešení (prázdná, omezená, neomezená)
  - **Účelová funkce**
    - Sklon účelové funkce
    - Extrém účelové funkce

a) MPŘ - prázdná

Žádné OŘ

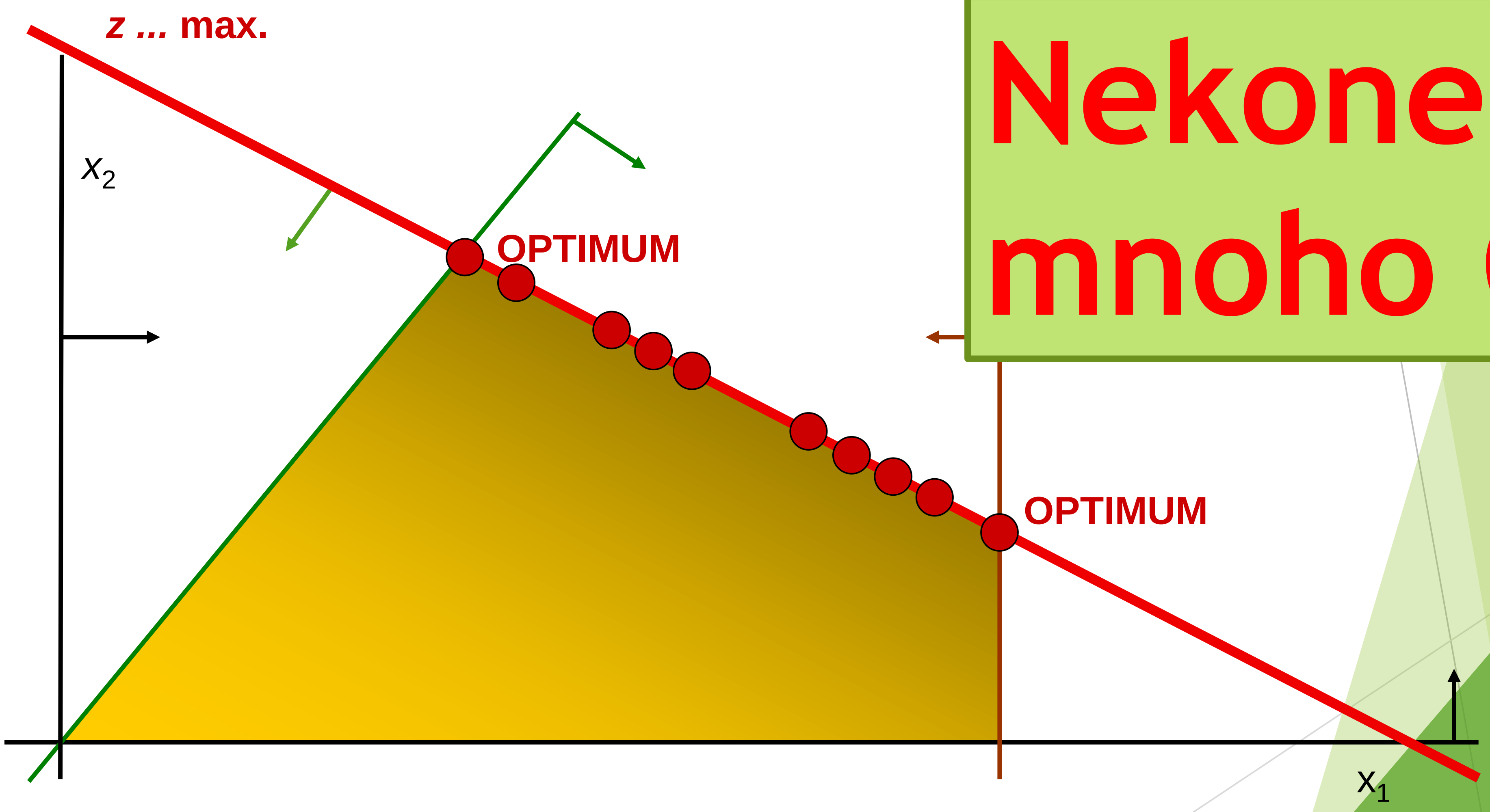


b) MPŘ - omezený konvexní polyedr



Jedno OŘ

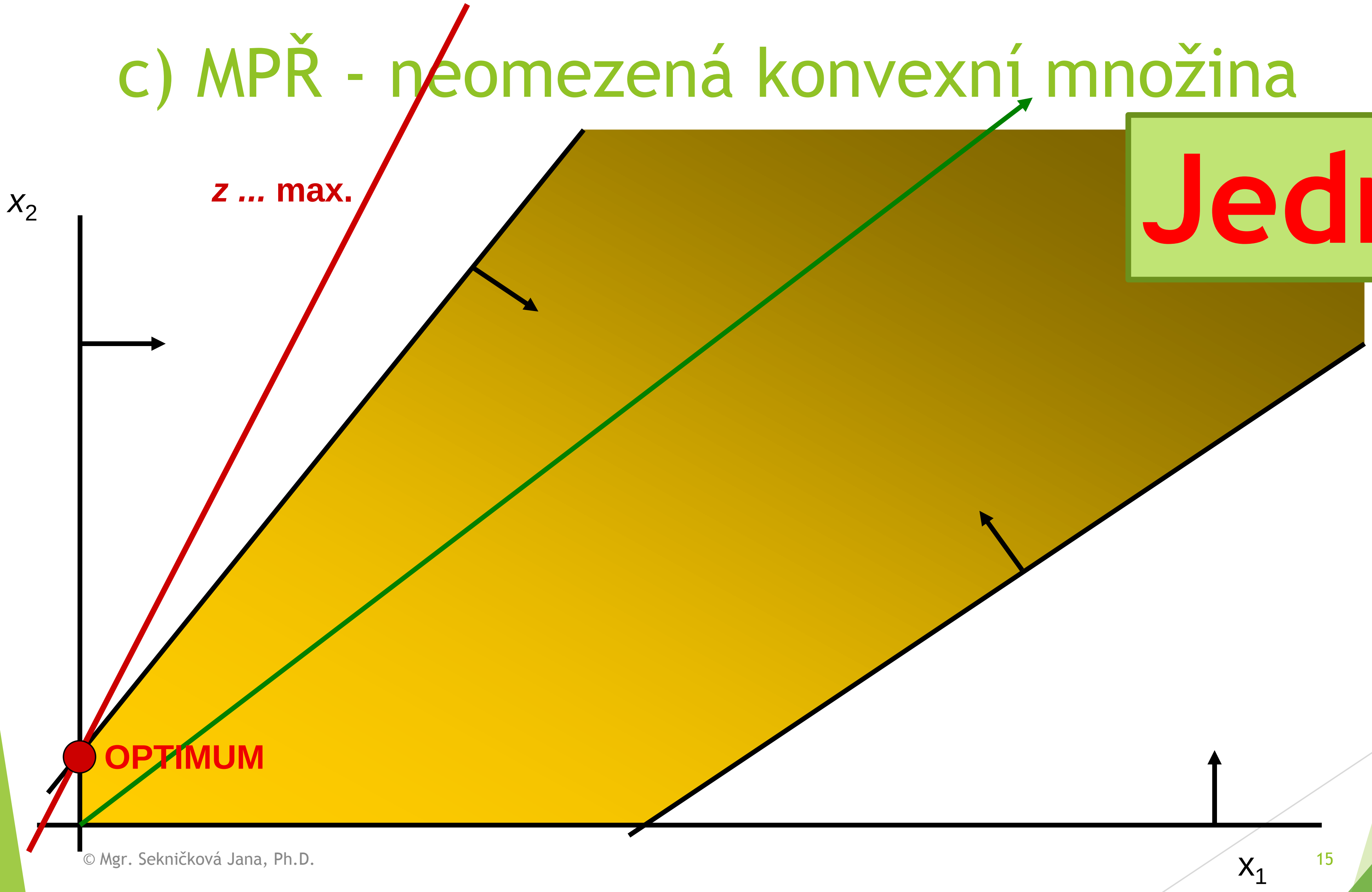
b) MPŘ - omezený konvexní polyedr



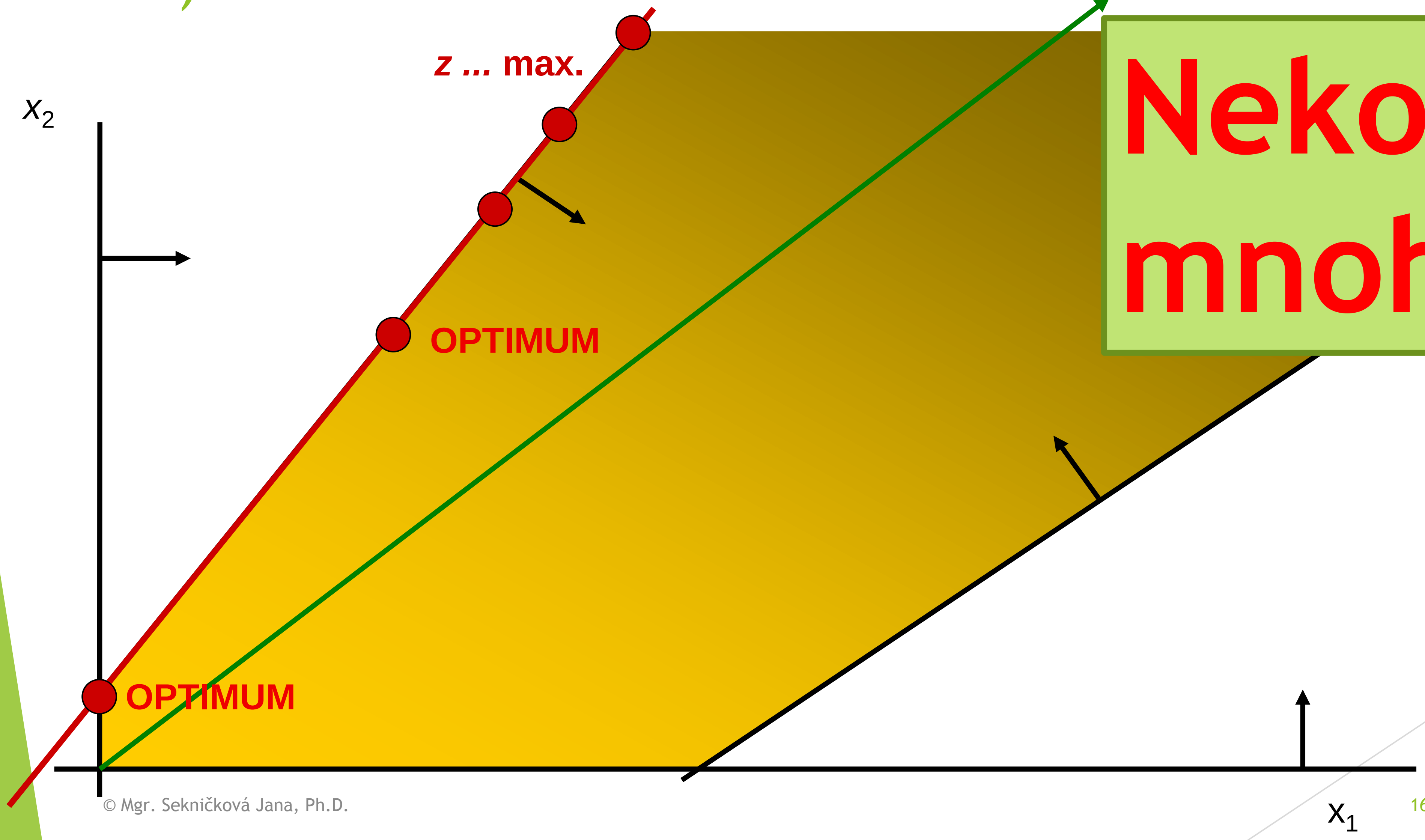
Nekonečně mnoho OŘ

c) MPŘ - neomezená konvexní množina

Jedno OŘ

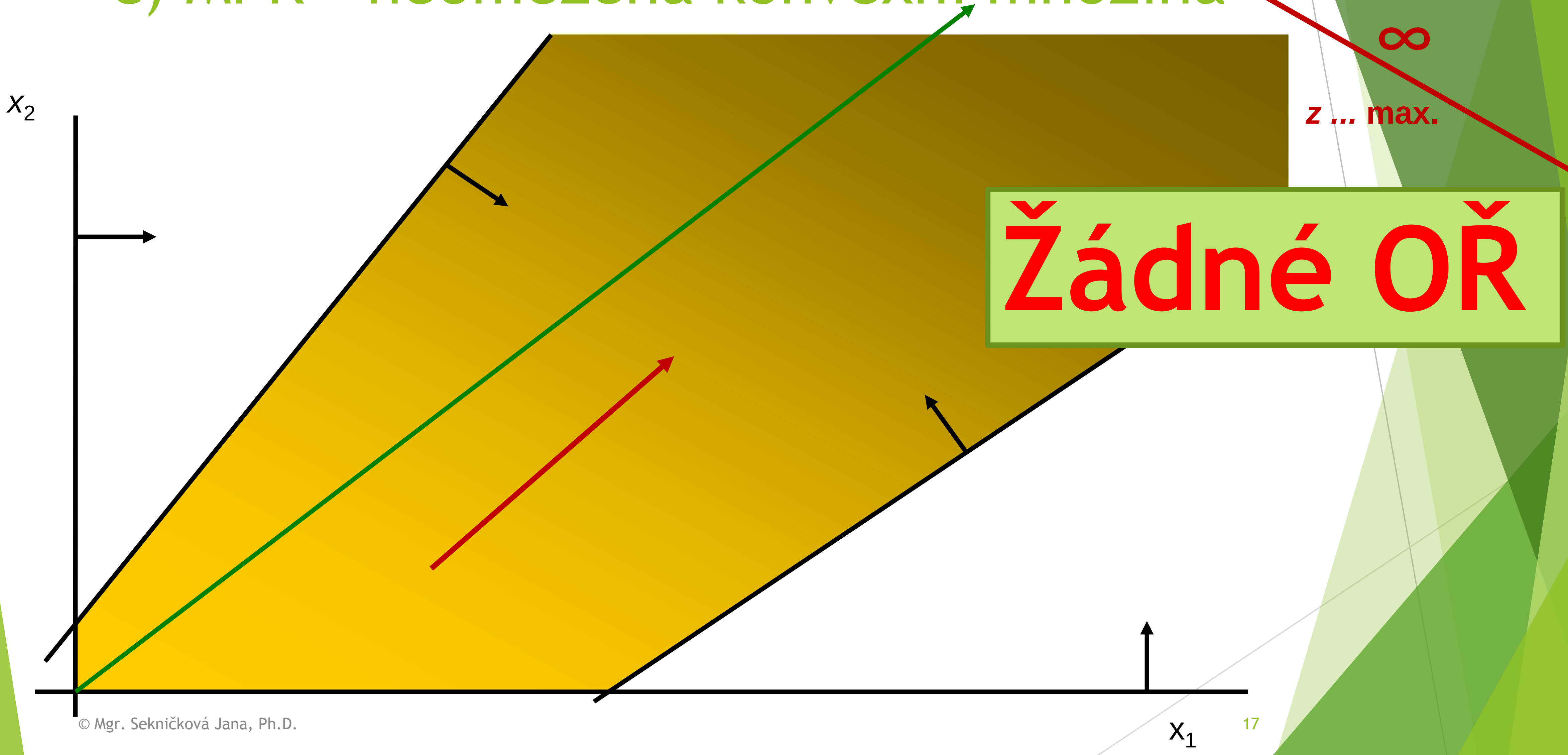


c) MPŘ - neomezená konvexní množina



Nekonečně mnoho OŘ

c) MPŘ - neomezená konvexní množina



1.8 Základní pojmy LP

- **Počet optimálních řešení:**
  - **Žádné** optimální řešení
    - Prázdná množina přípustných řešení nebo
    - Neomezená hodnota účelové funkce
  - Má **jediné** optimální řešení
    - MPŘ je omezená ve směru hledaného optima a
    - Účelová funkce se MPŘ dotkne v jediném bodě
  - Má **nekonečně mnoho** optimálních řešení
    - MPŘ je omezená ve směru hledaného optima a
    - Účelová funkce je rovnoběžná s hranou (stěnou) MPŘ

1.8 Základní pojmy LP

- **Má-li úloha LP optimální řešení:**
  - Buď je toto optimální řešení jediné
    - MPŘ je omezená ve směru hledaného optima a
    - Účelová funkce se MPŘ dotkne v jediném bodě
    - **OŘ je ve vrcholu konvexního polyedru - je ZPŘ**
  - Nebo je optimálních řešení **nekonečně mnoho**
    - MPŘ je omezená ve směru hledaného optima a
    - Účelová funkce je rovnoběžná s hranou (stěnou) MPŘ
    - **Alespoň jedno OŘ je ve vrcholu konvexního polyedru - ZPŘ**

1.8 Základní pojmy LP

**Má-li úloha LP optimální řešení,
pak má také základní optimální řešení**

- Základní věta lineárního programování (ZVLP)
- Věta nic neříká o případu, kdy úloha LP nemá optimální řešení!
- Pokud existuje OŘ, pak existuje také základní OŘ.

1.8 Základní pojmy LP

- **Základní optimální řešení:**
  - Základní řešení
  - Optimální řešení
    - Přípustné řešení
    - Řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce

- **Základní optimální řešení = základní přípustné řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce**

1.8 Základní pojmy LP

- **Důsledek základní věty lineárního programování:**
  - Má-li úloha LP optimální řešení, pak alespoň jedno z nich je základní přípustné řešení.
- **Význam základní věty lineárního programování:**
  - Optimální řešení stačí hledat mezi základními přípustnými řešeními.

ZPŘ je konečný počet

1.8 Základní pojmy LP

- **Výpočet základních přípustných řešení:**
- $\mathrm{A} = [\ 90, 0]$, $\mathbf{x} = (90, \mathbf{0}, 30, 90, \mathbf{0}, 20)^{\mathrm{T}}$
- $\mathrm{B} = [110, 0]$, $\mathbf{x} = (110, \mathbf{0}, 10, 70, 20, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$
- $\mathrm{C} = [110, 5]$, $\boxed{\mathbf{x} = (110, 5, \mathbf{0}, 50, 15, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}}$
- $\mathrm{D} = [100, 10]$, $\mathbf{x} = (100, 10, \mathbf{0}, 40, \mathbf{0}, 10)^{\mathrm{T}}$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
SD karty:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]

Zisk: $z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

- $z_A = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 90 + 60 \cdot 0 = 3600$
- $z_B = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 0 = 4400$
- $z_C = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 5 = \boxed{4700}$
- $z_D = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 100 + 60 \cdot 10 = 4600$

Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^{\mathrm{T}}$$
$$z = 4700$$

1.9 Příklad – matematický model

Lis: $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]

Balení: $1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]

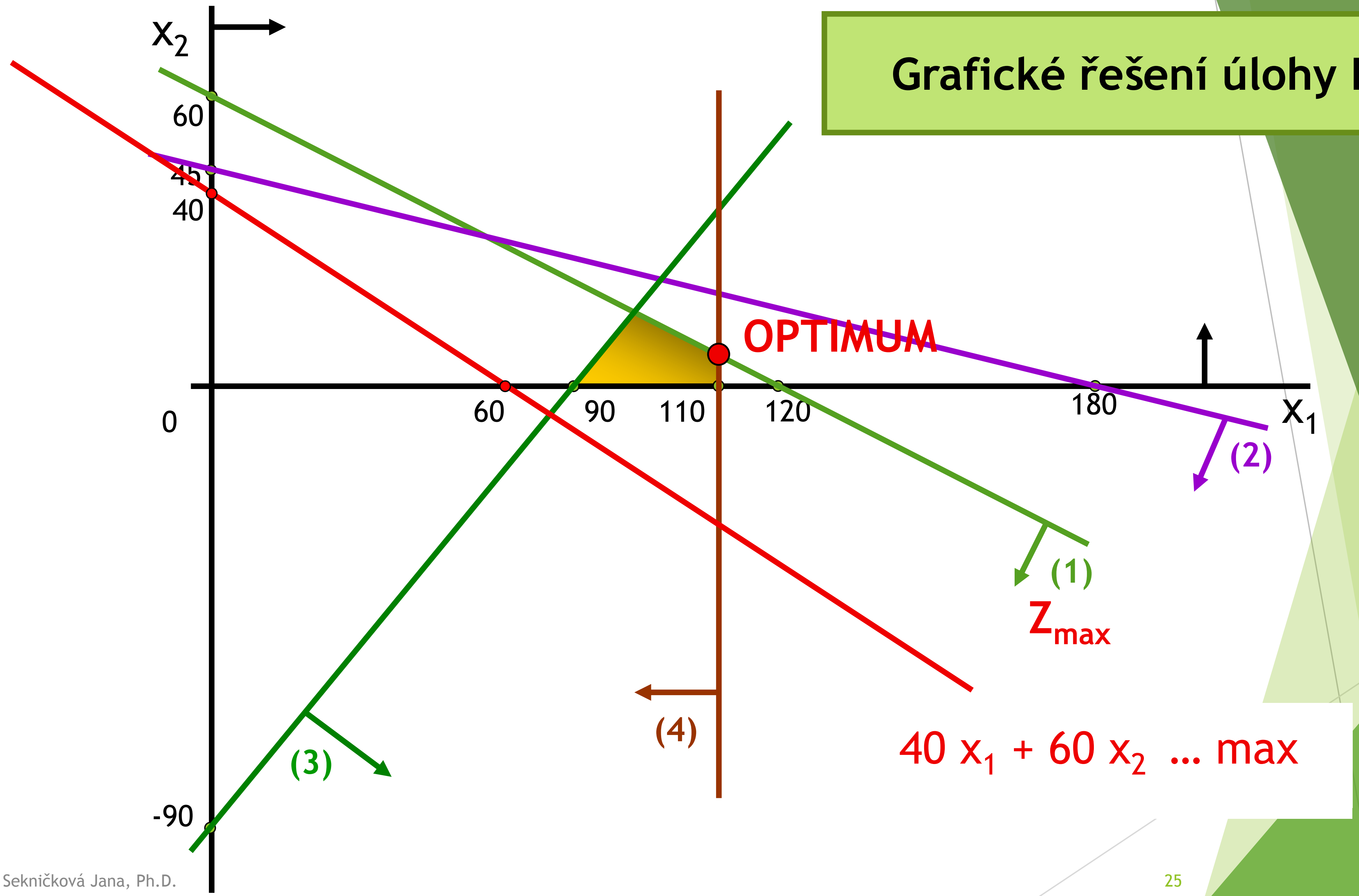
Poptávka: $1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]

SD karty: $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]

Nezápornost: $x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]

Zisk: $40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

Grafické řešení úlohy LP



1.9 Grafické řešení úlohy LP

- **Optimální řešení** zadané úlohy leží na průsečíku dvou hraničních přímek omezení (1) a (4):

$$x_1 + 2x_2 = 120$$
$$x_1 \qquad = 110$$

- Odtud je $x_1 = 110, x_2 = 5$
- Bod optimálního řešení je tedy

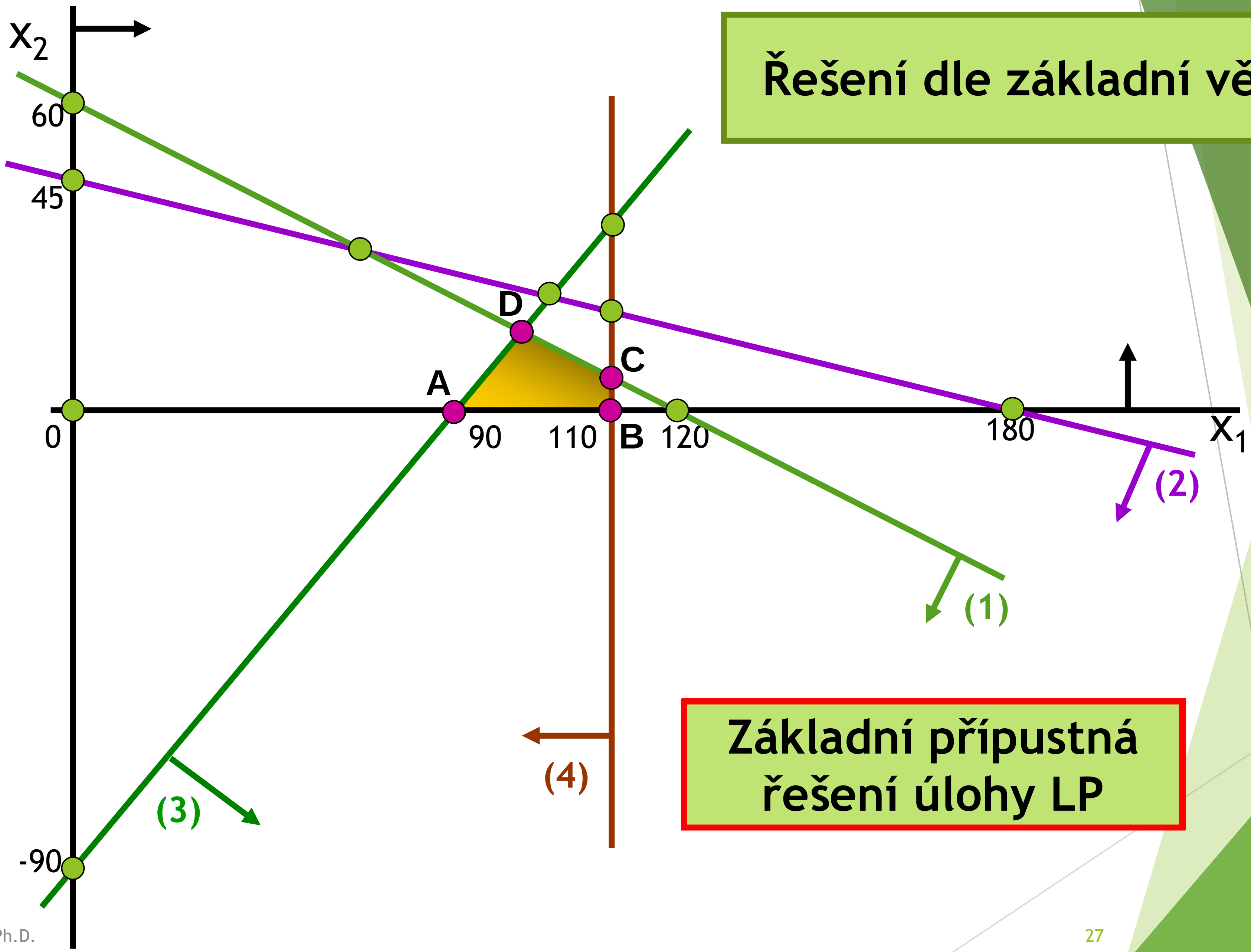
$$\mathbf{x}^* = [110, 5]$$

Lis:	$1\ x_1 + 2\ x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\ x_1 + 4\ x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\ x_1 - 1\ x_2 \geq 90$ [krabiček]
SD karty:	$1\ x_1 + 0\ x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\ x_1 + 60\ x_2 \ldots \max$ [Kč]

- Hodnota účelové funkce je po dosazení

$$z = 40x_1 + 60x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 5 = 4700$$

Řešení dle základní věty LP



Základní přípustná řešení úlohy LP

1.9 Řešení dle základní věty LP

- **Výpočet základních přípustných řešení:**
- $A = [\ 90, 0]$, $\mathbf{x} = (90, \mathbf{0}, 30, 90, \mathbf{0}, 20)^T$
- $B = [110, 0]$, $\mathbf{x} = (110, \mathbf{0}, 10, 70, 20, \mathbf{0})^T$
- $C = [110, 5]$, $\boxed{\mathbf{x} = (110, 5, \mathbf{0}, 50, 15, \mathbf{0})^T}$
- $D = [100, 10]$, $\mathbf{x} = (100, 10, \mathbf{0}, 40, \mathbf{0}, 10)^T$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
SD karty:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

- $z_A = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 90 + 60 \cdot 0 = 3600$
- $z_B = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 0 = 4400$
- $z_C = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 5 = \boxed{4700}$
- $z_D = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 100 + 60 \cdot 10 = 4600$

Optimální řešení:
$\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^T$
$z = 4700$

1.10 Řešení pomocí softwaru

- **Graficky** lze řešit úlohy LP, které obsahují dvě (max. tři) proměnné
- **Dle základní věty LP** lze řešit i mnohem větší úlohy
  - Tzv. metoda hrubé síly
    - Vyčíslení všech ZŘ ESR (kolik jich je?)
    - Redukce na ZPŘ úlohy LP
    - Výpočet hodnoty účelové funkce pro všechna ZPŘ
    - Výběr optimálního řešení
  - I ZPŘ však může být opravdu mnoho
    - $m = 4$, $n = 2$, ZŘ 14 → ZPŘ 4
    - $m = 100$, $n = 10$, ZŘ téměř 47 bilionů → ZPŘ cca 14 bilionů

1.10 Řešení pomocí softwaru

- V praxi se však používá efektivní prohledávání množiny základních přípustných řešení pomocí simplexové metody (či metody vnitřního bodu, apod.)
- Historické optimalizační softwary
  - STORM
  - DS Win
- Současné nástroje
  - LINGO, MPL
  - Řešitel pro MS Excel
  - a další

1.10 LINGO

- Firma LINDO Systems, Inc.
- LINDO (Linear INteractive and Discrete Optimizer)
- www.lindo.com
- LINGO (verze 16.0, 17.0) – Windows, Mac, Linux

LINGO 11.0 - LINGO Model - priklad - 2 prom

File Edit LINGO Window Help

LINGO Model - priklad - 2 prom

```
model:
[lis]              1*x1 + 2*x2 <= 120;
[baleni]           1*x1 + 4*x2 <= 180;
[poptavka]         1*x1 - 1*x2 >=  90;
[SDkarty]            x1        <= 110;

[zisk]       max = 40*x1 + 60*x2;
end
```

priklad - 2 prom

```
Global optimal solution found.
Objective value:                      4700.000
Infeasibilities:                      0.000000
Total solver iterations:                     2
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	110.0000	0.000000
X2	5.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LIS	0.000000	30.00000
BALENI	50.00000	0.000000
POPTAVKA	15.00000	0.000000
SDKARTY	0.000000	10.00000
ZISK	4700.000	1.000000

Range Report - priklad - 2 prom

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	40.00000	INFINITY	10.00000
X2	60.00000	20.00000	60.00000

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
BALENI	180.0000	INFINITY	50.00000
POPTAVKA	90.00000	15.00000	INFINITY
SDKARTY	110.0000	10.00000	10.00000
LIS	120.0000	25.00000	10.00000

1.10 LINGO - model

LINGO Model - priklad - 2 prom

```
model:
[lis]             1*x1 + 2*x2 <= 120;
[baleni]          1*x1 + 4*x2 <= 180;
[poptavka]        1*x1 - 1*x2 >=  90;
[SDkarty]           x1        <= 110;

[zisk]      max = 40*x1 + 60*x2;
end
```

Lis: $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]

Balení: $1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]

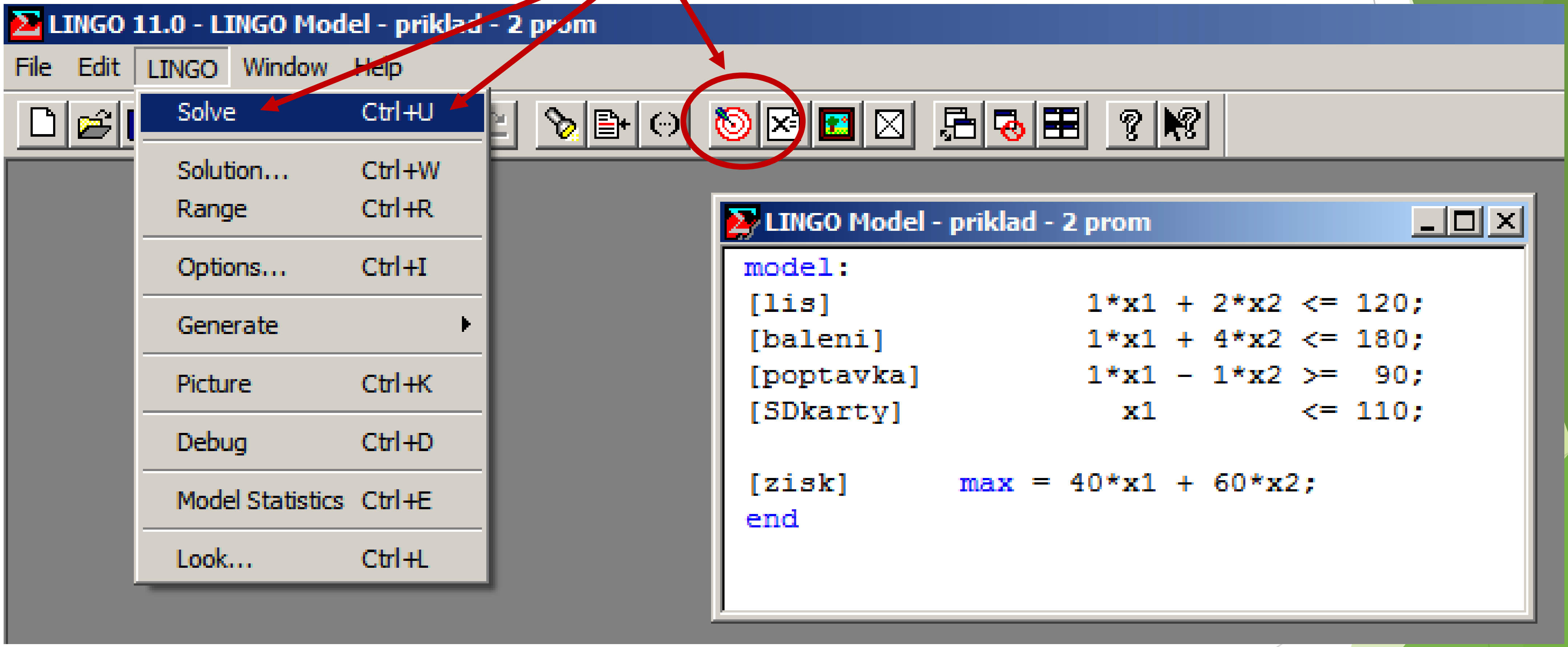
Poptávka: $1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krab.]

SD karty: $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krab.]

Nezápornost: $x_1, x_2 \geq 0$ [krab.]

Zisk: $z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

1.10 LINGO - řešení



1.10 LINGO – výstup řešení

priklad - 2 prom

```
Global optimal soluti
Objective value:                     4700.000
Infeasibilities:                     0.000000
Total solver iterations:                    2
```

Hodnota účelové funkce

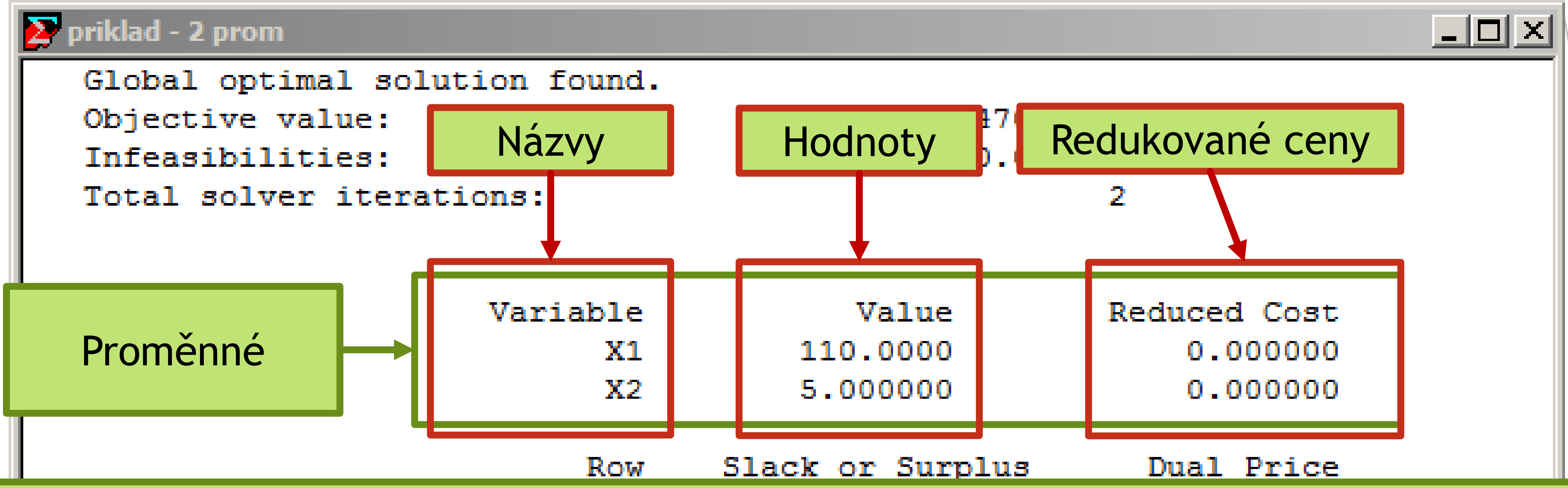
Proměnné

Variable	Value	Reduced Cost
X1	110.0000	0.000000
X2	5.000000	0.000000

Omezení

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LIS	0.000000	30.00000
BALENI	50.00000	0.000000
POPTAVKA	15.00000	0.000000
SDKARTY	0.000000	10.00000
ZISK	4700.000	1.000000

1.10 LINGO - proměnné



Redukovaná cena

⟶ Pokud se proces **nerealizuje** (hodnota strukturní proměnné = 0), udává, o kolik se musí zlepšit cena, aby bylo výhodné proces realizovat.

⟶ Pokud se proces **realizuje** (hodnota strukturní proměnné > 0), je redukovaná cena nulová (není třeba cenu zlepšovat).

1.10 Redukovaná cena

- Předpokládejme nyní v příkladu zavedení výroby třetího výrobku (speciální SD karty na zakázku)
  - Lisování 5 minut
  - Balení 5 minut
  - Zisk 10 Kč

Lis: $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení: $1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka: $1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krab.]
SD karty: $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krab.]
Nezápornost: $x_1, x_2 \geq 0$ [krab.]

Zisk: $z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \dots \max$ [Kč]

Optimální řešení:
$$\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^{\mathrm{T}}$$
$$z = 4700$$

1.10 Redukovaná cena

LINGO Model - priklad - 2 prom

```
model:
[lis]                  1*x1 + 2*x2 <= 120;
[baleni]               1*x1 + 4*x2 <= 180;
[poptavka]             1*x1 - 1*x2 >=  90;
[sroubky]                x1        <= 110;

[zisk]        max = 40*x1 + 60*x2;
end
```

LINGO Model - priklad - 3 prom

```
model:
[lis]                  1*x1 + 2*x2 + 5*x3 <= 120;
[baleni]               1*x1 + 4*x2 + 5*x3 <= 180;
[poptavka]             1*x1 - 1*x2        >=  90;
[sroubky]                x1               <= 110;

[zisk]        max = 40*x1 + 60*x2 + 10*x3;
end
```

Solution Report - priklad - 3 prom

Global optimal solution found.

Objective value:	4700.000
Infeasibilities:	0.000000
Total solver iterations:	2

Variable	Value	Reduced Cost
X1	110.0000	0.000000
X2	5.000000	0.000000
X3	0.000000	140.0000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LIS	0.000000	30.00000
BALENI	50.00000	0.000000
POPTAVKA	15.00000	0.000000
SROUBKY	0.000000	10.00000
ZISK	4700.000	1.000000

Solution Report - priklad - 2 prom

Global optimal solution found.

Objective value:	4700.000
Infeasibilities:	0.000000
Total solver iterations:	2

Variable	Value	Reduced Cost
X1	110.0000	0.000000
X2	5.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LIS	0.000000	30.00000
BALENI	50.00000	0.000000
POPTAVKA	15.00000	0.000000
SROUBKY	0.000000	10.00000
ZISK	4700.000	1.000000

1.10 Redukovaná cena

Variable	Value	Reduced Cost
X1	110.0000	0.000000
X2	5.000000	0.000000
X3	0.000000	140.0000

- O kolik je třeba zlepšit současný cenový koeficient (10 Kč), aby byl příslušný proces realizován.
- O kolik se zhorší hodnota účelové funkce, když budeme nuceni realizovat příslušný proces s jednotkovou intenzitou.

LINGO Model - priklad - 3 prom

```
model:
[lis]              1*x1 + 2*x2 + 5*x3 <= 120;
[baleni]           1*x1 + 4*x2 + 5*x3 <= 180;
[poptavka]         1*x1 - 1*x2        >=  90;
[sroubky]            x1               <= 110;

[zisk]       max = 40*x1 + 60*x2 + 160*x3;
end
```

found.

```
4720.000
0.000000
2
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	110.0000	0.000000
X2	0.000000	4.000000
X3	2.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LIS	0.000000	32.00000
BALENI	60.00000	0.000000
POPTAVKA	20.00000	0.000000
SROUBKY	0.000000	8.000000
ZISK	4720.000	1.000000

LINGO Model - priklad - 3 prom

```
model:
[lis]              1*x1 + 2*x2 + 5*x3 <= 120;
[baleni]           1*x1 + 4*x2 + 5*x3 <= 180;
[poptavka]         1*x1 - 1*x2        >=  90;
[sroubky]            x1               <= 110;
[klic]               x3               >=   1;

[zisk]       max = 40*x1 + 60*x2 + 10*x3;
end
```

```
found.
                       4560.000
                       0.000000
:                             2
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	110.0000	0.000000
X2	2.500000	0.000000
X3	1.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LIS	0.000000	30.00000
BALENI	55.00000	0.000000
POPTAVKA	17.50000	0.000000
SROUBKY	0.000000	10.00000
KLIC	0.000000	-140.0000
ZISK	4560.000	1.000000

Stínová cena (duální cena, duální proměnná)

⟶ Pokud je omezení splněno na hraně, tj. jako rovnost (hodnota přídatné proměnné = 0), udává, o kolik se <u>zlepší</u> z, pokud se kapacita uvolní o jednotku.

⟶ Pokud je omezení splněno s rezervou (hodnota přídatné proměnné > 0), je stínová cena nulová (malá změna kapacity nezpůsobí změnu z).

```
Infeasibilities:                          0.000000
Total solver iterations:                         2

              Variable           Value        Reduced Cost
                                110.0000
                                5.000000

                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                   LIS        0.000000          30.00000
                BALENI        50.00000          0.000000
              POPTAVKA        15.00000          0.000000
               SDKARTY        0.000000          10.00000
                  ZISK        4700.000          1.000000
```

Hodnoty přídatných proměnných

Názvy

Stínové ceny

Omezení

Stínová cena $\longrightarrow$ Pokud je omezení splněno s rezervou (hodnota přídatné proměnné > 0), je stínová cena nulová (malá změna kapacity nezpůsobí změnu z).

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LIS	0.000000	30.00000
BALENI	50.00000	0.000000
POPTAVKA	15.00000	0.000000
SDKARTY	0.000000	10.00000
ZISK	4700.000	1.000000

Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^T$$

$$z = 4700$$

Lis: $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]

Balení: $1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]

Poptávka: $1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krab.]

SD karty: $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krab.]

Nezápornost: $x_1, x_2 \geq 0$ [krab.]

Zisk: $z = 40\,x_1 + 60\,x_2$ ... max [Kč]

Stínová cena ⟶ Pokud je omezení splněno na hraně, tj. jako rovnost (hodnota přídatné proměnné = 0), udává, o kolik se zlepší z, pokud se kapacita uvolní o jednotku.

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LIS	0.000000	30.00000
BALENI	50.00000	0.000000
POPTAVKA	15.00000	0.000000
SDKARTY	0.000000	10.00000
ZISK	4700.000	1.000000

Lis: $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]

Balení: $1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]

Poptávka: $1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krab.]

Šroubky: $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [min]

Nezápornost: $x_1, x_2 \geq 0$ [krab.]

Zisk: $40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$z = 4700$$

LINGO Model - priklad - 2 prom

```
model:
 [lis]              1*x1 + 2*x2 <= 122;
 [baleni]           1*x1 + 4*x2 <= 180;
 [poptavka]         1*x1 - 1*x2 >=  90;
 [SDkarty]            x1        <= 110;

 [zisk]       max = 40*x1 + 60*x2;
end
```

```
n found.
                              4760.000
                              0.000000
s:                                   2

ariable           Value        Reduced Cost
     X1        110.0000            0.000000
     X2        6.000000            0.000000

    Row    Slack or Surplus      Dual Price
    LIS        0.000000            30.00000
 BALENI        46.00000            0.000000
POPTAVKA       14.00000            0.000000
SDKARTY        0.000000            10.00000
   ZISK        4760.000            1.000000
```

Stínové ceny

- Omezení ve tvaru nerovnice typu $\leq$:
  - $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$
  - Zvětšení pravé strany rozšiřuje množinu přípustných řešení
  - Zlepšení řešení
    - maximalizace – zvýšení hodnoty účelové funkce
    - minimalizace – snížení hodnoty účelové funkce
- Omezení ve tvaru nerovnice typu $\geq$:
  - $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$
  - Zvětšení pravé strany zmenšuje množinu přípustných řešení
  - Zhoršení řešení
    - maximalizace – snížení hodnoty účelové funkce
    - minimalizace – zvýšení hodnoty účelové funkce

2. Lineární programování – stabilita a celočíselnost

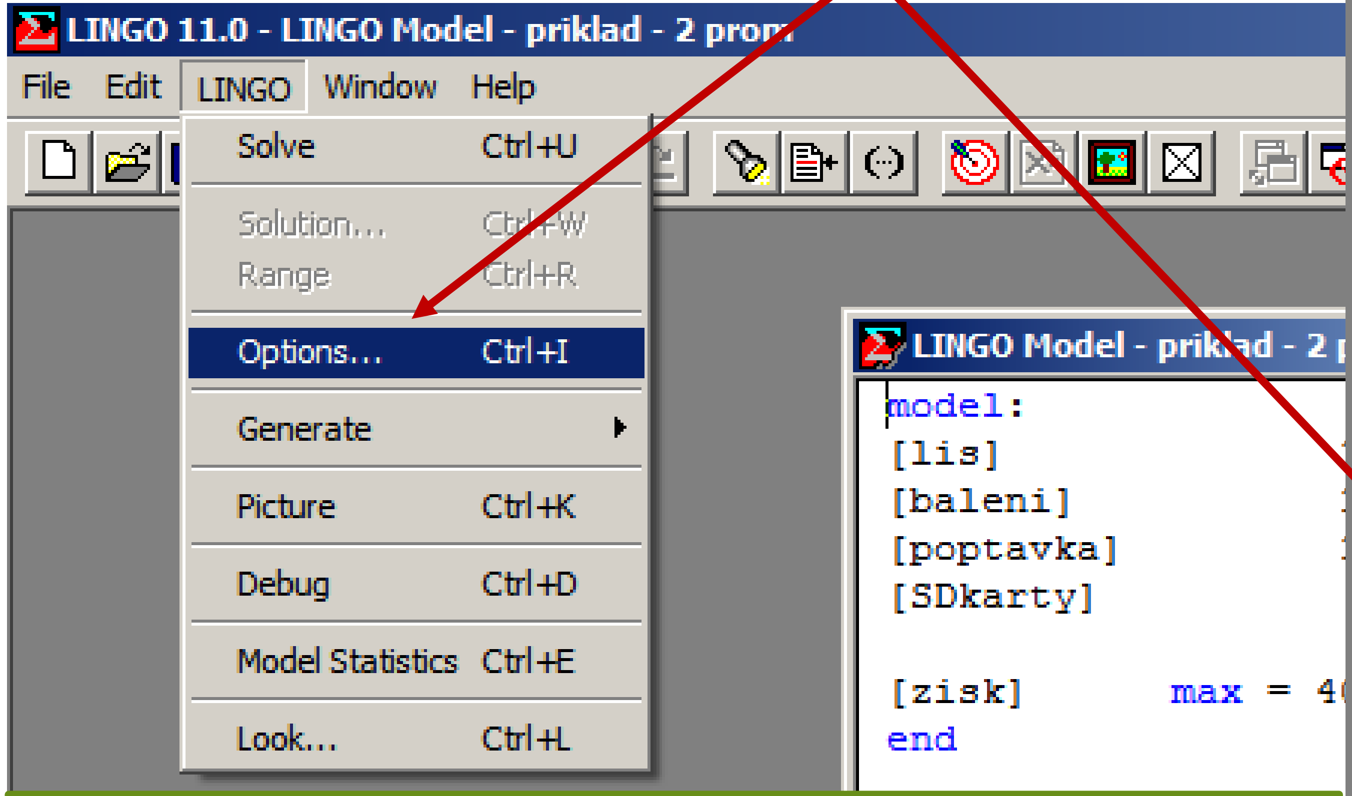
2.1 Redukované a stínové ceny

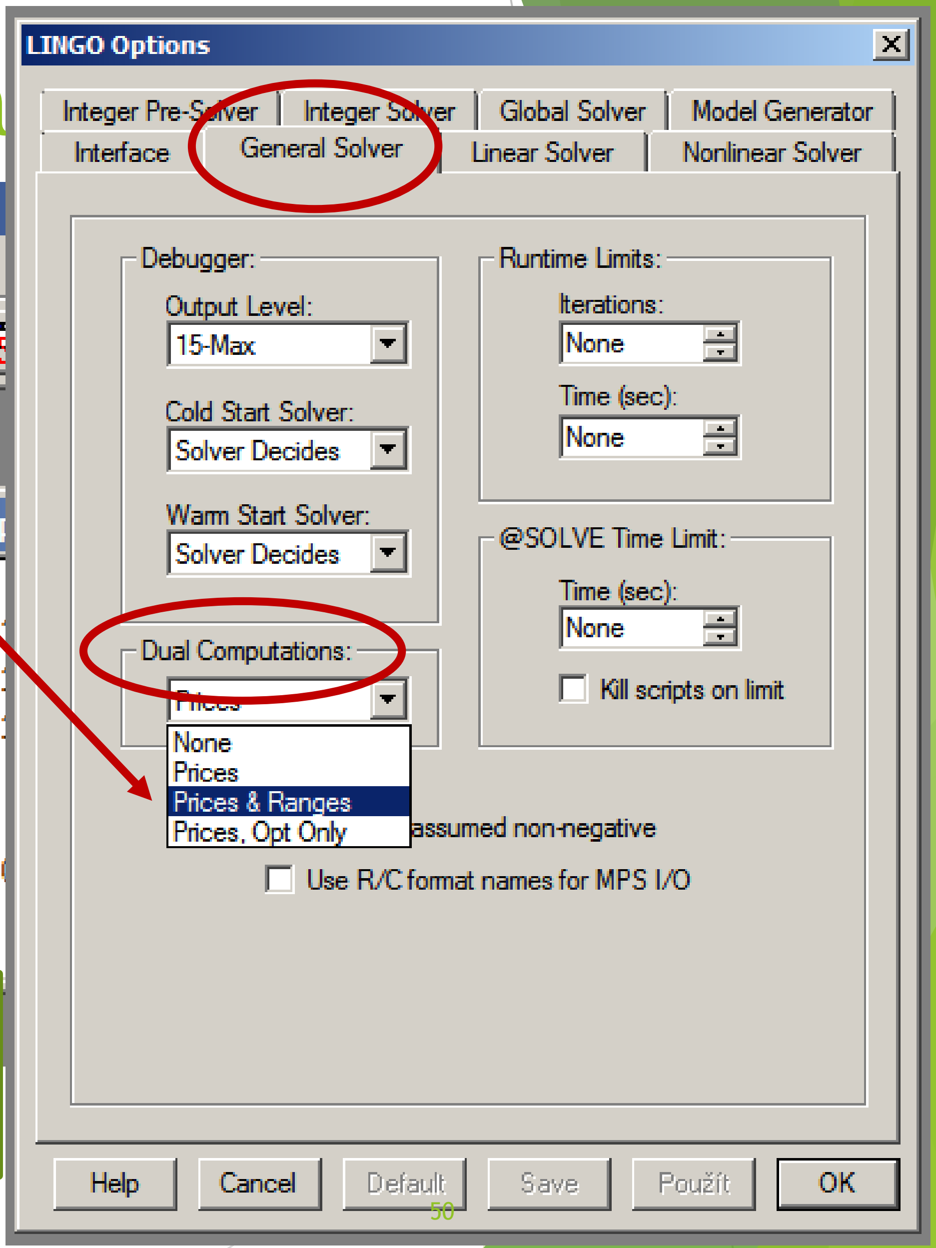
Interpretace pro redukované i stínové ceny platí jen při malých změnách

CO JE MALÁ ZMĚNA ?

Interpretace pro redukované i stínové ceny platí jen při změnách v rámci **intervalu stability**

2.1 LINGO - stabilita

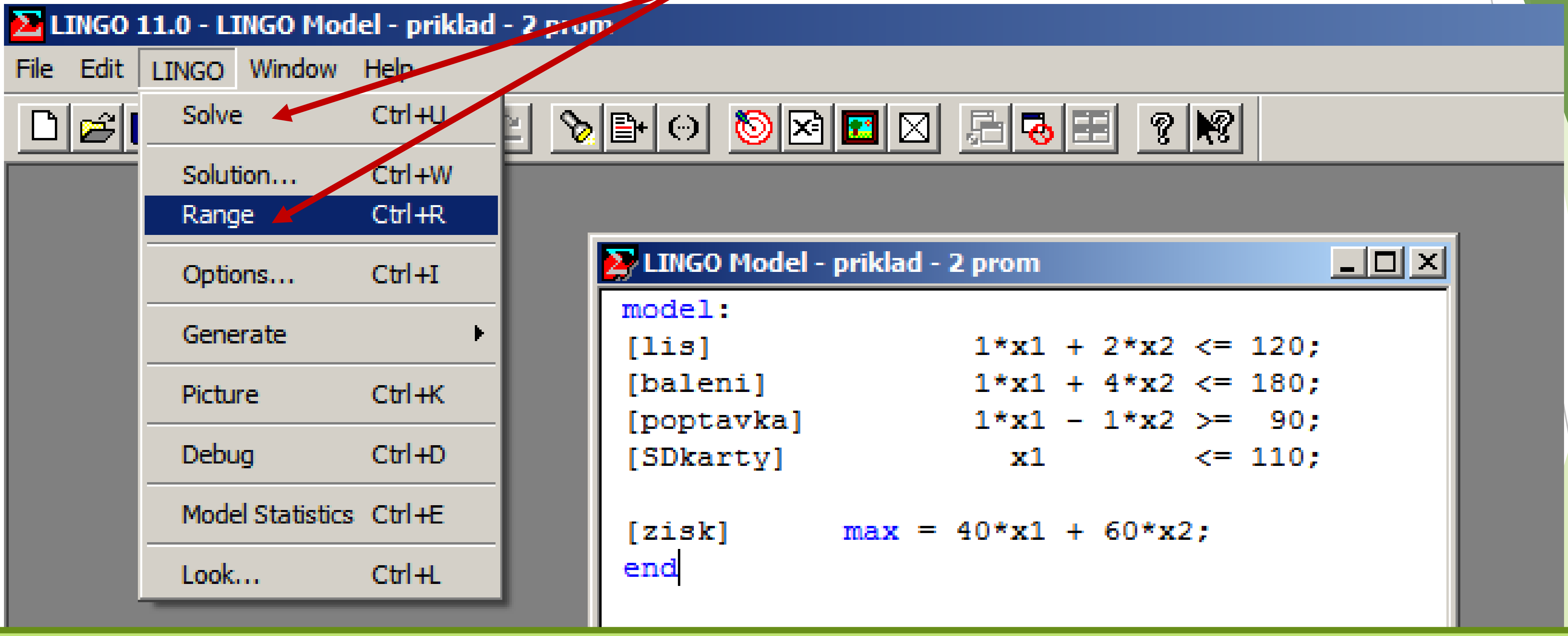




LINGO ⟶ Options… ⟶ General Solver

⟶ Dual Computations ⟶ Prices & Ranges

2.1 LINGO - stabilita



- Vyřešit úlohu (CTRL + U)
- Z okna s modelem (ne s řešením) zobrazit Range report (CTRL + R)

2.1 LINGO - stabilita

Range Report - priklad - 2 prom

Ranges in which th[...]ed

Současná hodnota | Povolený nárůst | Povolený pokles

Proměnné

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	40.00000	INFINITY	10.00000
X2	60.00000	20.00000	60.00000

Omezení

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
BALENI	180.0000	INFINITY	50.00000
POPTAVKA	90.00000	15.00000	INFINITY
SDKARTY	110.0000	10.00000	10.00000
LIS	120.0000	25.00000	10.00000

2.2 Intervaly stability cenových koeficientů

- Účelová funkce: $z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max\ [\text{Kč}]$

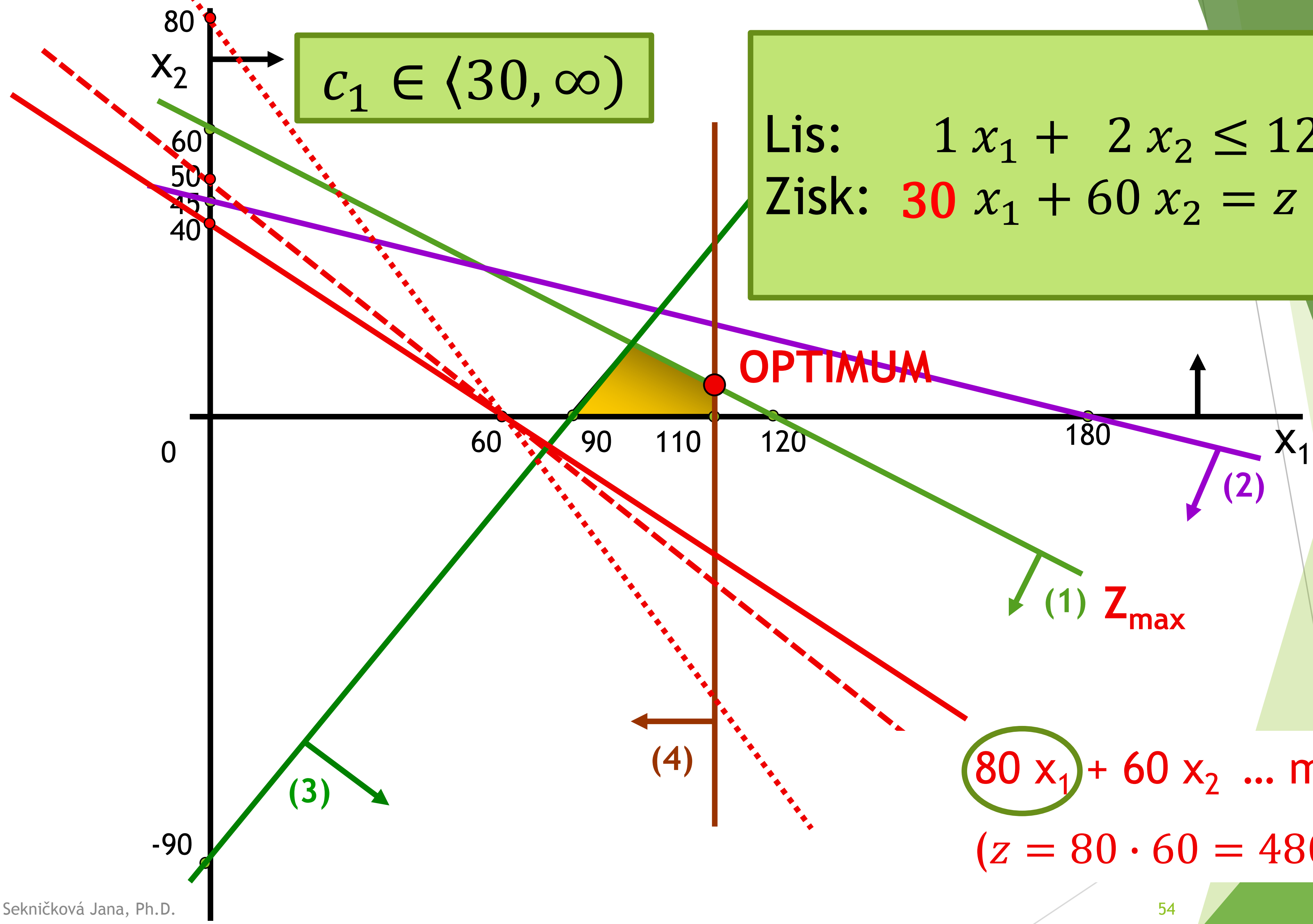
Objective Coefficient Ranges			
	Current	Allowable	Allowable
Variable	Coefficient	Increase	Decrease
X1	40.00000	INFINITY	10.00000
X2	60.00000	20.00000	60.00000

- $c_1 \in \langle 40 - 10, 40 + \infty) \rightarrow c_1 \in \langle 30, \infty)$
- $c_2 \in \langle 60 - 60, 60 + 20 \rangle \rightarrow c_2 \in \langle 0, 80 \rangle$

$c_1 \in \langle 30, \infty)$

Lis: $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]

Zisk: $30\,x_1 + 60\,x_2 = z \ldots \max$ [Kč]



$80\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$

$(z = 80 \cdot 60 = 4800)$

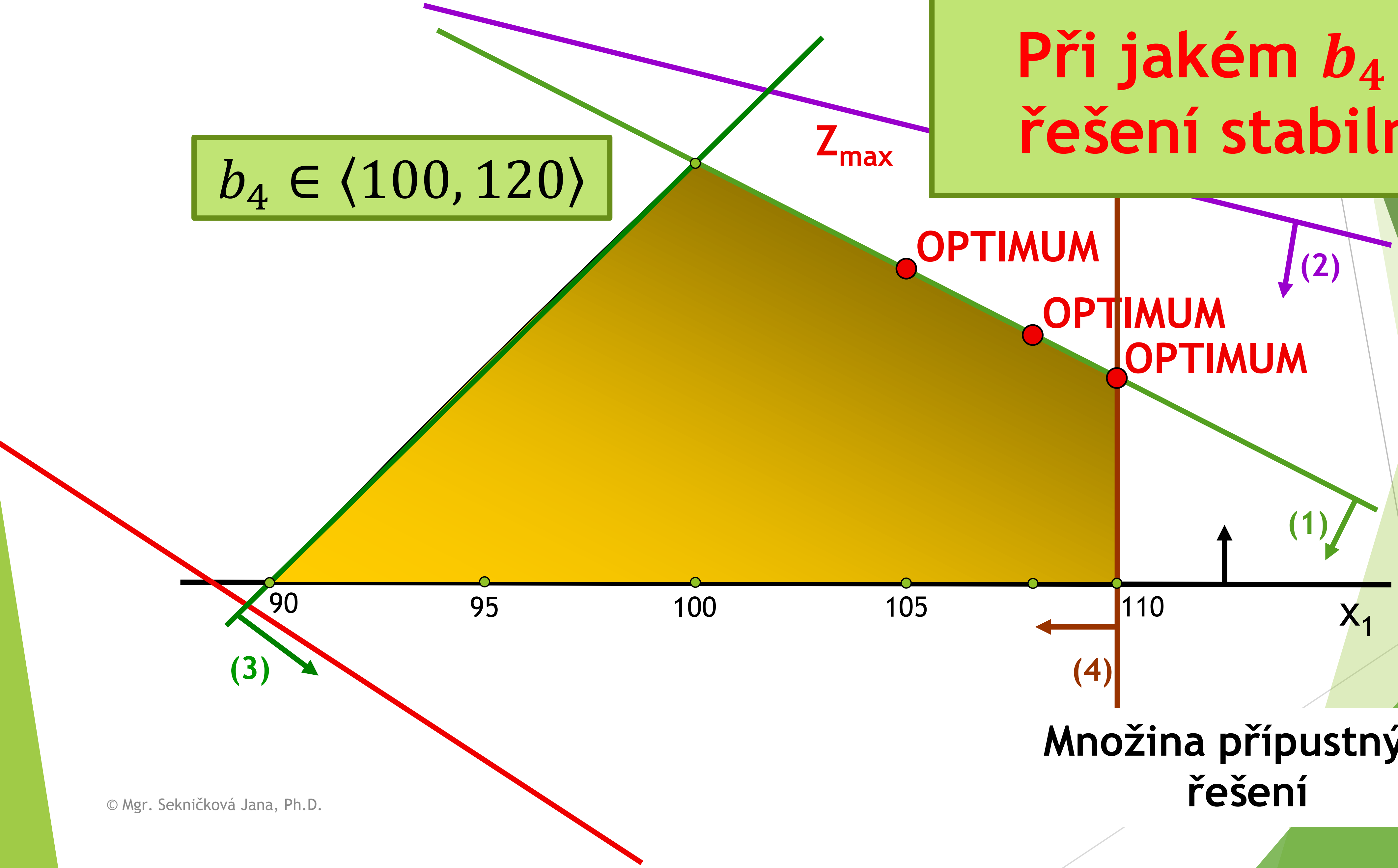
2.3 Intervaly stability pravých stran

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
		Righthand Side Ranges	
BALENI	180.0000	INFINITY	50.00000
POPTAVKA	90.00000	15.00000	INFINITY
SDKARTY	110.0000	10.00000	10.00000
LIS	120.0000	25.00000	10.00000

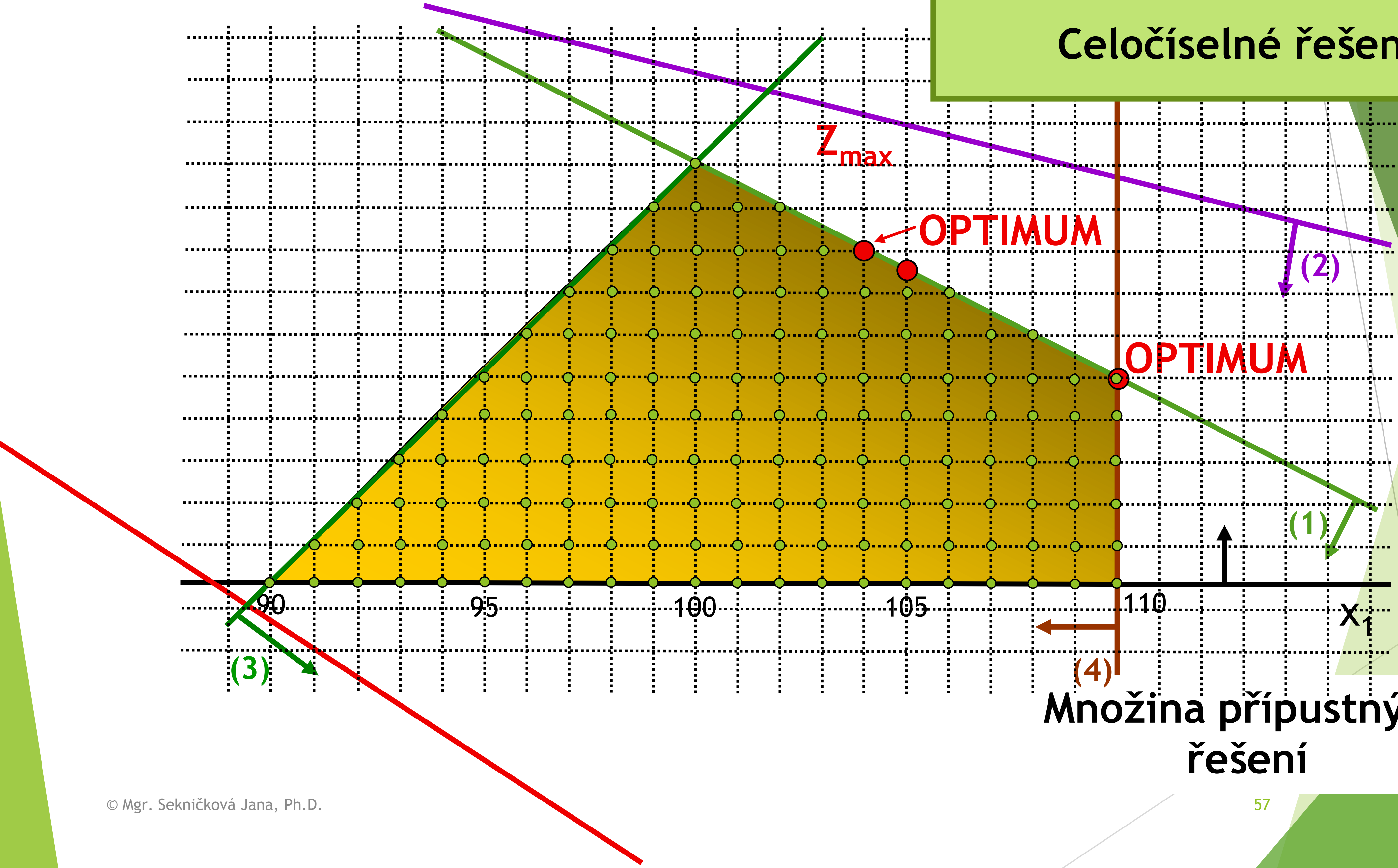
- $b_1 \in \langle 120 - 10, 120 + 25\rangle \rightarrow b_1 \in \langle 110, 145\rangle$
- $b_2 \in \langle 180 - 50, 180 + \infty) \rightarrow b_2 \in \langle 130, \infty)$
- $b_3 \in \langle 90 - \infty, 90 + 15\rangle \rightarrow b_3 \in (-\infty, 105\rangle$
- $b_4 \in \langle 110 - 10, 110 + 10\rangle \rightarrow b_4 \in \langle 100, 120\rangle$

Při jakém b_4 je řešení stabilní?

$b_4 \in \langle 100, 120 \rangle$



Celočíselné řešení



Množina přípustných řešení

2.4 Celočíselnost v úlohách LP

- Množina přípustných řešení obsahuje jen celočíselné body (mřížka)
- Úlohu řešíme nejprve bez podmínek celočíselnosti
  - Pokud vyjde řešení celočíselně, máme OŘ
  - Pokud nevyjde celočíselně, použijeme některou z metod pro hledání celočíselného řešení (větve a meze, Gomoryho apod.) – oříznutí množiny PŘ
- **LINGO:** funkce `@gin(x1);`
- Pozor: při použití podmínek celočíselnosti ztratíme informaci o redukovaných a stínových cenách

2.4 LINGO - celočíselnost

Solution Report - priklad - 2 prom

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              4700.000
Objective bound:                              4700.000
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             0


              Variable           Value        Reduced Cost
                    X1        110.0000           -40.00000
                    X2        5.000000           -60.00000

                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                   LIS        0.000000            0.000000
                BALENI        50.00000            0.000000
              POPTAVKA        15.00000            0.000000
               SDKARTY        0.000000            0.000000
                  ZISK        4700.000            1.000000
```

LINGO Model - priklad - 2 prom

```
model:
[lis]                1*x1 + 2*x2 <= 120;
[baleni]             1*x1 + 4*x2 <= 180;
[poptavka]           1*x1 - 1*x2 >=  90;
[SDkarty]              x1        <= 110;
[celociselnost1]   @gin(x1);
[celociselnost2]   @gin(x2);

[zisk]       max = 40*x1 + 60*x2;
end
```

2.4 LINGO - celočíselnost

Solution Report - priklad - 2 prom

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          4640.000
Objective bound:                          4640.000
Infeasibilities:                          0.000000
Extended solver steps:                           0
Total solver iterations:                         0

        Variable           Value        Reduced Cost
              X1        104.0000           -40.00000
              X2        8.000000           -60.00000

             Row    Slack or Surplus      Dual Price
             LIS        0.000000            0.000000
          BALENI        44.00000            0.000000
        POPTAVKA        6.000000            0.000000
         SDKARTY        1.000000            0.000000
            ZISK        4640.000            1.000000
```

LINGO Model - priklad - 2 prom

```
model:
[lis]               1*x1 + 2*x2 <= 120;
[baleni]            1*x1 + 4*x2 <= 180;
[poptavka]          1*x1 - 1*x2 >=  90;
[SDkarty]             x1        <= 105;
[celociselnost1]   @gin(x1);
[celociselnost2]   @gin(x2);

[zisk]       max = 40*x1 + 60*x2;
end
```

Detaily k přednášce: skripta

KONEC