4EK212 – Kvantitativní management

4. Speciální úlohy lineárního programování

3. Typické úlohy LP

- Úlohy výrobního plánování (alokace zdrojů)
- Úlohy finančního plánování (optimalizace portfolia)
- Směšovací problémy
- Nutriční problém (spec. případ směšovacího problému)
- Úlohy o dělení materiálu (řezné problémy)
- Distribuční úlohy (dopravní a přiřazovací problém)

4. Distribuční úlohy LP

- Úkolem celé velké skupiny distribučních úloh je zajistit distribuci (tj. rozdělení) určité homogenní komodity (např. zboží) z jedné oblasti (např. dodavatelé) do druhé oblasti (např. odběratelé).
- **Proměnné:** přiřazení jednotky z první skupiny k jednotce z druhé skupiny (např. doprava od daného dodavatele k danému odběrateli), hodnoty určují, zda k přiřazení dojde či ne (0/1) nebo jak intenzivní přiřazení je (množství převáženého zboží)
- **Omezení:** kapacity a požadavky
- **Cíl:** obvykle minimalizace nákladů

4. Distribuční úlohy LP

- dopravní problém
- kontejnerový dopravní problém
- obecný distribuční problém
- přiřazovací problém
- úloha o pokrytí
- okružní dopravní problém
- výrobně-přepravní problém atd.

4. Distribuční úlohy LP

- Liší se od běžných úloh LP svým specifickým matematickým modelem
- Řada z nich je charakteristická požadavkem celočíselnosti proměnných
- Řeší se proto specifickými metodami
- Nejjednodušším reprezentantem je dopravní problém (DP)

4.1 Dopravní problém (DP)

- DP řeší distribuci homogenní látky od dodavatelů k odběratelům
- Je dán:
  - počet dodavatelů m (index $i = 1, 2, \dots, m$)
  - počet odběratelů n (index $j = 1, 2, \dots, n$)
  - kapacity dodavatelů a_i
  - požadavky odběratelů b_j
  - „cena" (náklady, vzdálenost atd.) za dodání jedné jednotky od i-tého dodavatele k j-tému odběrateli c_{ij}
- Kapacity dodavatelů jsou zadány ve stejných jednotkách jako požadavky odběratelů

4.1 Dopravní problém (DP)

Úkol:

- určit, kolik jednotek dodá každý dodavatel každému odběrateli

Cíl:

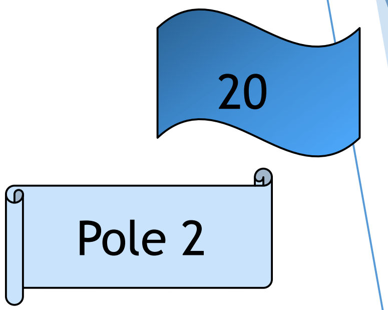
- uspokojit požadavky odběratelů tak, aby hodnota stanoveného cíle byla minimální

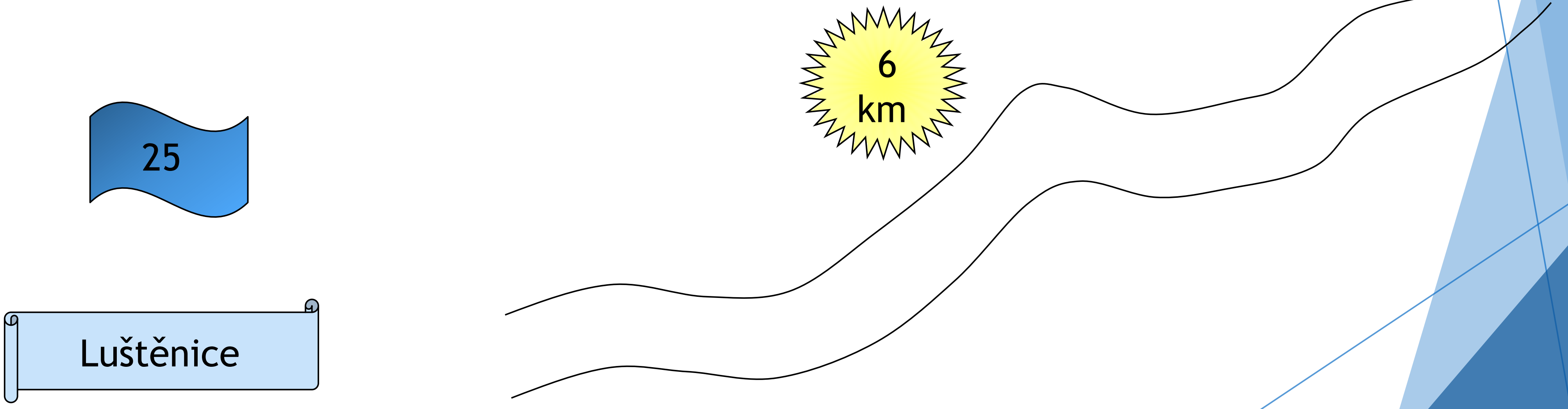
4.1 Příklad - zadání

- V okolí Mladé Boleslavi působí mimo jiné tři zemědělská družstva: Sever Loukovec, Čistá u Mladé Boleslavi a Luštěnice.
- Družstva disponují 15, 20 a 25 kombajny.
- Je potřeba posekat tři pole s obilím, přičemž na první je potřeba poslat 22 kombajnů, na druhé 20 a na třetí 18.
- Vzdálenosti mezi jednotlivými družstvy a poli jsou uvedeny v tabulce.
- Určete přepravované počty kombajnů z jednotlivých družstev na pole tak, aby počet ujetých kilometrů byl minimální.

4.1 Příklad - zadání

[km]	*Pole 1*	*Pole 2*	*Pole 3*	Kapacity
Sever Loukovec	9	3	2	15
Čistá u Mladé Boleslavi	7	8	4	20
Luštěnice	5	6	11	25
Požadavky	22	20	18	60





4.1 Příklad - proměnné

- Proměnné označíme x_{ij}
- Hodnota proměnné x_{ij} určuje množství kombajnů v kusech dodaných $i-$tým dodavatelem (družstvem) $j-$tému odběrateli (poli)
- Proměnných je $m \cdot n = 3 \cdot 3 = 9$
- Vektor proměnných má složky

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33})^{\mathrm{T}}$$

- Na obrázku byla znázorněna volba náhodně zvolené proměnné x_{32}

4.1 Dopravní problém – formulace MM

- Proměnné v DP označíme x_{ij} (dvojitý index)
- Hodnota proměnné x_{ij} určuje množství homogenní látky dodané i–tým dodavatelem j–tému odběrateli
- Počet proměnných: $m \cdot n$
- Vektor proměnných má složky

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})^{\mathrm{T}}$$

- Předpokládá se rovnost součtu kapacit a součtu požadavků (vyrovnaný DP)*
- Omezení jsou proto formulována v rovnicích

4.1 Příklad – matematický model

minimalizovat

$$z = 9x_{11} + 3x_{12} + \cdots + 11x_{33}$$

za podmínek:

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 15$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 25$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 22$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 18$$

x_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	15
D2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	20
D3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	25
b_j	22	20	18	60

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$$

4.1 Příklad – matematický model

minimalizovat

$$z = 9x_{11} + 3x_{12} + \cdots + 11x_{33}$$

za podmínek:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & & & & = & 15 \\
& & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & & & & = & 20 \\
& & & & & & x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & = & 25 \\
& & & & & & & & & & \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & +x_{31} & & & = & 22 \\
& x_{12} & & & +x_{22} & & & +x_{32} & & = & 20 \\
& & x_{13} & & & +x_{23} & & & +x_{33} & = & 18
\end{array}$$

4.1 Dopravní problém – formulace MM

- Počet omezení DP je $m + n$
  - m pro dodavatele (řádková omezení, zajišťují kapacitu)

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

  - n pro odběratele (sloupcová omezení, zajišťují požadavky)

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

4.1 Dopravní problém – formulace MM

- Podmínky nezápornosti:

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$$

- Účelová funkce:

minimalizovat $\quad z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ \ldots + c_{mn}x_{mn}$

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

4.1 Dopravní problém – obecný model

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

4.1 Dopravní problém – LINGO

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

m … počet dodavatelů

n … počet odběratelů

x_{ij} … množství přepravy
od i-tého dodavatele
k j-tému odběrateli

a_i … kapacita dodavatelů

b_j … požadavek odběratelů

c_{ij} … cena dopravy za jednotku zboží
od i-tého dodavatele
k j-tému odběrateli

4.1 Dopravní problém – LINGO

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$$

	O1	O2	O3	O4	a(i)
D1	6	2	6	7	**30**
D2	9	4	9	5	**25**
D3	3	6	8	8	**21**
b(j)	**15**	**17**	**22**	**12**	

```
MODEL:
SETS:
dod/1..3/:a;
odb/1..4/:b;
mat(dod,odb):c,x;
ENDSETS

DATA:
a = 30 25 21;
b = 15 17 22 12;
c = 6 2 6 7
    9 4 9 5
    3 6 8 8;
ENDDATA

min = @sum(mat(i,j):c(i,j)*x(i,j));
@for(dod(i):@sum(odb(j):x(i,j))=a(i));
@for(odb(j):@sum(dod(i):x(i,j))=b(j));
END
```

4.1 Dopravní problém – zápis do LINGA

Součet:

```
@sum(množina(i):vlastnost(i))
@sum(množina(i,j):vlastnost(i,j))
```

For – pro všechna:

```
@for(množina(i):podmínka)
@for(množina(i,j):podmínka)
```

Načtení / uložení dat z/do Excelu:

```
@ole('adresa souboru','název oblasti')
```

4.1 Dopravní problém – formulace MM

- Každý **<u>vyrovnaný dopravní problém</u>**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

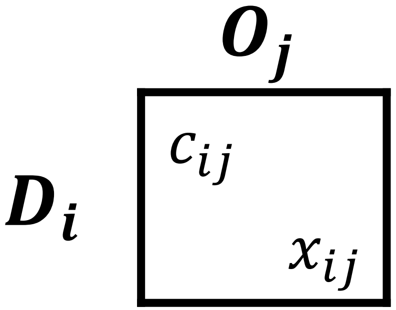
- má vždy přípustné řešení i optimální řešení
- Každý **<u>nevyrovnaný dopravní problém</u>**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- lze převést na vyrovnaný dopravní problém

4.1 Dopravní problém – dopravní tabulka

- Zejména z důvodu přehlednosti
- Řádek tabulky odpovídá řádkovému omezení
- Sloupec tabulky odpovídá sloupcovému omezení
- Řádky a sloupce vymezují políčka
- Políčko tabulky odpovídá jedné dopravní cestě mezi dodavatelem a odběratelem, tj. jedné proměnné x_{ij}



4.1 Příklad – dopravní tabulka

	O_j
D_i	c_{ij} x_{ij}

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 **15**	3 –	2 –	**15**
D_2	7 **7**	8 –	4 **13**	**20**
D_3	5 –	6 **20**	11 **5**	**25**
b_j	**22**	**20**	**18**	**60**

4.1 Příklad – optimální řešení

z = 261

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 –	3 15	2 –	15
D_2	7 2	8 –	4 18	20
D_3	5 20	6 5	11 –	25
b_j	22	20	18	60

4.1 Dopravní problém – nevyrovnaný DP

- Každý <u>**nevyrovnaný dopravní problém**</u>

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- lze převést na vyrovnaný dopravní problém
  - Buď přidáním fiktivního dodavatele
  - Nebo přidáním fiktivního odběratele

4.1 Příklad - zadání

- Předpokládejme nyní, že Pole 3 je již posekané.
- Všechny ostatní informace zůstávají beze změny.
- Určete přepravované počty kombajnů z jednotlivých družstev na pole tak, aby počet ujetých kilometrů byl minimální.

[km]	*Pole 1*	*Pole 2*	Kapacity
Sever Loukovec	9	3	15
Čistá u Mladé Boleslavi	7	8	20
Luštěnice	5	6	25
Požadavky	22	20	42 / 60

4.1 Příklad – fiktivní odběratel

c_{ij}	*O1*	*O2*	a_i
D1	9	3	15
D2	7	8	20
D3	5	6	25
b_j	22	20	

Cenové koeficienty fiktivního odběratele jsou nulové

	O_1	O_2	F_3	a_i
D_1	9	3	0	**15**
D_2	7	8	0	**20**
D_3	5	6	0	**25**
b_j	**22**	**20**	**18**	**60**

4.1 Dopravní problém – nevyrovnaný DP

- Přebytek kapacit nad požadavky

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Přidání fiktivního odběratele (sloupec) s požadavkem

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Představuje neodeslané zboží (nevyčerpaná kapacita)

4.1 Příklad - zadání

- Předpokládejme nyní, že oproti původnímu zadání má zemědělské družstvo Sever Loukovec celodružstevní dovolenou a jejich kombajny nemohou sekat.
- Všechny ostatní informace zůstávají beze změny.
- Určete přepravované počty kombajnů z jednotlivých družstev na pole tak, aby počet ujetých kilometrů byl minimální.

[km]	*Pole 1*	*Pole 2*	*Pole 3*	Kapacity
Čistá u Mladé Boleslavi	7	8	4	20
Luštěnice	5	6	11	25
Požadavky	22	20	18	60 / 45

4.1 Příklad – fiktivní dodavatel

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	7	8	4	20
D2	5	6	11	25
b_j	22	20	18	

	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	7	8	4	**20**
D_2	5	6	11	**25**
F_3	0	0	0	**15**
b_j	**22**	**20**	**18**	**60**

Cenové koeficienty fiktivního dodavatele jsou nulové

4.1 Dopravní problém – nevyrovnaný DP

- Přebytek požadavků nad kapacitami

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Přidání fiktivního dodavatele (řádek) s kapacitou

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

- Představuje nedodané zboží (nesplněný požadavek)

4.2 Kontejnerový dopravní problém (KDP)

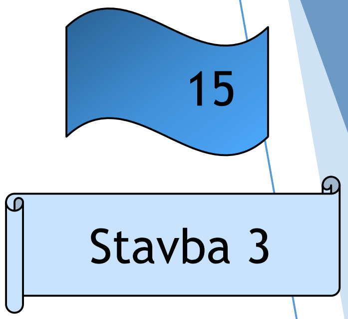
- KDP je modifikací dopravního problému s tím rozdílem, že přeprava zboží se provádí pouze v kontejnerech
- Každý kontejner má kapacitu *K* jednotek
- Náklady na přepravu jsou uvedeny na jeden kontejner
- Náklady jsou stejné bez ohledu na to, je-li kontejner plný nebo poloprázdný
- Celkové náklady na přepravu se minimalizují

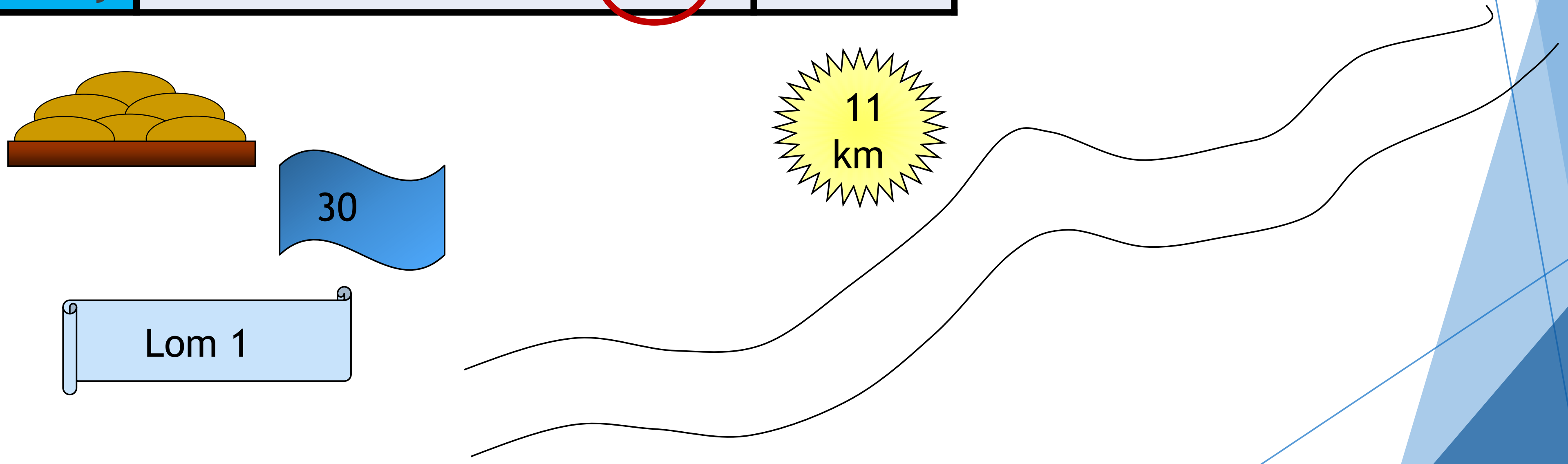
4.2 Příklad - zadání

- Firma Kámen těží ve třech lomech štěrko-písek.
- Štěrkopísek dodává na tři velké stavby.
- Kapacita lomů je 30, 20 a 25 tun (denně).
- Požadavky staveb jsou 25, 35 a 15 tun (denně).
- Vzdálenosti jednotlivých lomů od staveb v km jsou uvedeny v tabulce.
- Doprava je realizována pomocí nákladních vozů Liaz 150 s maximální nosností 10 tun.
- Určete objem dodávek z jednotlivých lomů na stavby tak, aby počet ujetých kilometrů byl minimální.

4.2 Příklad - zadání

[km]	*Stavba 1*	*Stavba 2*	*Stavba 3*	Kapacity
Lom 1	14	10	11	**30**
Lom 2	13	14	12	**20**
Lom 3	11	13	16	**25**
Požadavky	**25**	**35**	**15**	**75**





4.2 KDP – obecný model

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \le K y_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_{ij} \ge 0, \text{celé}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

4.3 Obecný distribuční problém (ObDP)

- Je velmi podobný DP především svým MM
- Ekonomické modely se liší:
  - v DP jde o rozdělení (distribuci) zdrojů, které se nijak nemění, pouze se převážejí
  - v ObDP jde o rozdělení (distribuci) činností, jejichž realizací vznikají nové výrobky
- Cílem je takové rozdělení činností, které minimalizuje náklady

4.3 Příklad - zadání

- Firma Kniha se zabývá tiskem knih.
- Ke své činnosti používá dva tiskařské stroje.
- Každý stroj může pracovat 100 hodin.
- Tiskne dva typy knih (knihy pro děti a romány pro dospělé).
- Dle smlouvy musí tiskárna vytisknout 1500 kusů knih pro děti a 1500 kusů románů pro dospělé.
- Cílem je zajistit tisk požadovaného množství knih s minimálními náklady.

4.3 ObDP – obecný model

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} k_{ij} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

4.4 Přiřazovací problém (PP)

- Jedná se o vzájemně jednoznačné přiřazení dvojice jednotek ze dvou skupin (párování)
- Např. může jít o auta a garáže, stavby a rypadla, pracovníci a pracovní místa apod.
- Toto přiřazení má přinést co nejvyšší efekt
- Můžeme minimalizovat ujetou vzdálenost, náklady, maximalizovat pracovní výkon apod.

4.4 Příklad - zadání

- Nově otevřený obchodní dům testoval ve zkušebním provozu výkonnost pracovních skupin prodavačů na jednotlivých odděleních (v procentech průměrné tržby – viz tabulku)
- Určete, jak rozmístit skupiny pracovníků na jednotlivá oddělení tak, aby celková výkonnost (měřená v % tržby) byla maximální

Tržba [%]	*Potraviny*	*Porcelán*	*Textil*
Pracovní skupina č. 1	101	97	91
Pracovní skupina č. 2	87	96	99
Pracovní skupina č. 3	98	110	102

4.4 Přiřazovací problém (PP)

- Předpokládáme, že obě skupiny mají stejný počet prvků
- Pokud nemají, lze jednu ze skupin doplnit fiktivními jednotkami
- Řeší se speciálními metodami pro bivalentní úlohy nebo heuristickými metodami, které dávají přibližné výsledky (maďarská metoda, metoda větví a mezí)

4.4 Přiřazovací problém (PP)

- Jsou dány:
  - Jednotky první skupiny (n) … $A_i, i = 1, 2, \dots, n$
  - Jednotky druhé skupiny (n) … $B_j, j = 1, 2, \dots, n$
  - Cenové koeficienty c_{ij} určující „cenu“ přiřazení každé dvojice jednotek A_i a B_j
  - Proměnné x_{ij} určující, zda i–tá jednotka z první skupiny bude přiřazena j–té jednotce ze skupiny druhé $(A_i$ k $B_j)$
  - Proměnné x_{ij} jsou bivalentní, mohou nabývat pouze dvou hodnot - nula (0) nebo jedna (1)

4.4 Příklad – matematický model

maximalizovat

$$z = 101x_{11} + 97x_{12} + \cdots + 102x_{33}$$

za podmínek:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

c_{ij}	O1	O2	O3
P1	101	97	91
P2	87	96	99
P3	98	110	102

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

x_{ij}	O1	O2	O3
P1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
P2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
P3	x_{31}	x_{32}	x_{33}

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$$

4.4 PP – formulace MM

- Hodnoty proměnných x_{ij} jsou omezeny jednoznačným přiřazením jednotek první skupiny jednotkám druhé skupiny a naopak
- Počet těchto omezení je tedy $n + n = 2n$
  - n pro jednotky první skupiny A_i (řádková omezení)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

  - n pro jednotky druhé skupiny B_j (sloupcová omezení)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

4.4 PP – formulace MM

- Podmínky nezápornosti a bivalence:
  - Podmínky nezápornosti jsou díky bivalenci splněny automaticky

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } \textbf{je } A_i \text{ přiřazeno k } B_j \\ 0, & \text{pokud } \textbf{není } A_i \text{ přiřazeno k } B_j \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

- Účelová funkce:

maximalizovat (min) $\quad z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{mn}x_{mn}$

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

4.4 PP – obecný model

Maximalizovat (minimalizovat)

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

4.4 Příklad – přípustné řešení

c_{ij}	O1	O2	O3
P1	101	97	91
P2	87	96	99
P3	98	110	102

B_j

A_i $\boxed{c_{ij} \quad x_{ij}}$

	O_1	O_2	O_3	a_i
P_1	101 1	97	91	1
P_2	87	96	99 1	1
P_3	98	110 1	102	1
b_j	1	1	1	

4.4 Příklad – optimální řešení

- Řešení v předchozí tabulce je nejen přípustné, ale i optimální.
- První pracovní skupina (P1) bude umístěna v oddělení potravin (O1)
- Druhá pracovní skupina (P2) bude umístěna v oddělení textilu (O3)
- Třetí (P3) v oddělení porcelánu (O2)

4.4 PP – obecný model - LINGO

Maximalizovat (minimalizovat)

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

n … počet jednotek v každé skupině

x_{ij} … proměnná udávající, zda
i-tá jednotka první skupiny
bude přiřazena
k j-té jednotce druhé skupiny

c_{ij} … ocenění přiřazení
i-té jednotky z první skupiny
k j-té jednotce z druhé skupiny

4.4 PP – obecný model

Maximalizovat (minimalizovat)

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

```
MODEL:
SETS:
prod/1..3/;
odd/1..3/;
mat(prod,odd):c,x;
ENDSETS

DATA:
c = 101  97  91
     87  96  99
     98 110 102;
ENDDATA

min = @sum(mat(i,j):c(i,j)*x(i,j));
@for(prod(i):@sum(odd(j):x(i,j))=1);
@for(odd(j):@sum(prod(i):x(i,j))=1);
END
```

	O1	O2	O3
P1	101	97	91
P2	87	96	99
P3	98	110	102

4.4 PP – obecný model

Maximalizovat (minimalizovat)

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

```
MODEL:
SETS:
prod/1..3/;
odd/1..3/;
mat(prod,odd):c,x;
ENDSETS

DATA:
c = 101  97  91
     87  96  99
     98 110 102;
ENDDATA

min = @sum(mat(i,j):c(i,j)*x(i,j));
@for(prod(i):@sum(odd(j):x(i,j))=1);
@for(odd(j):@sum(prod(i):x(i,j))=1);
END
```

Co chybí?

4.4 PP – obecný model

Maximalizovat (minimalizovat)

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

```
@for(mat(i,j):@bin(x(i,j)));
```

$$\sum_{j=1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n$$

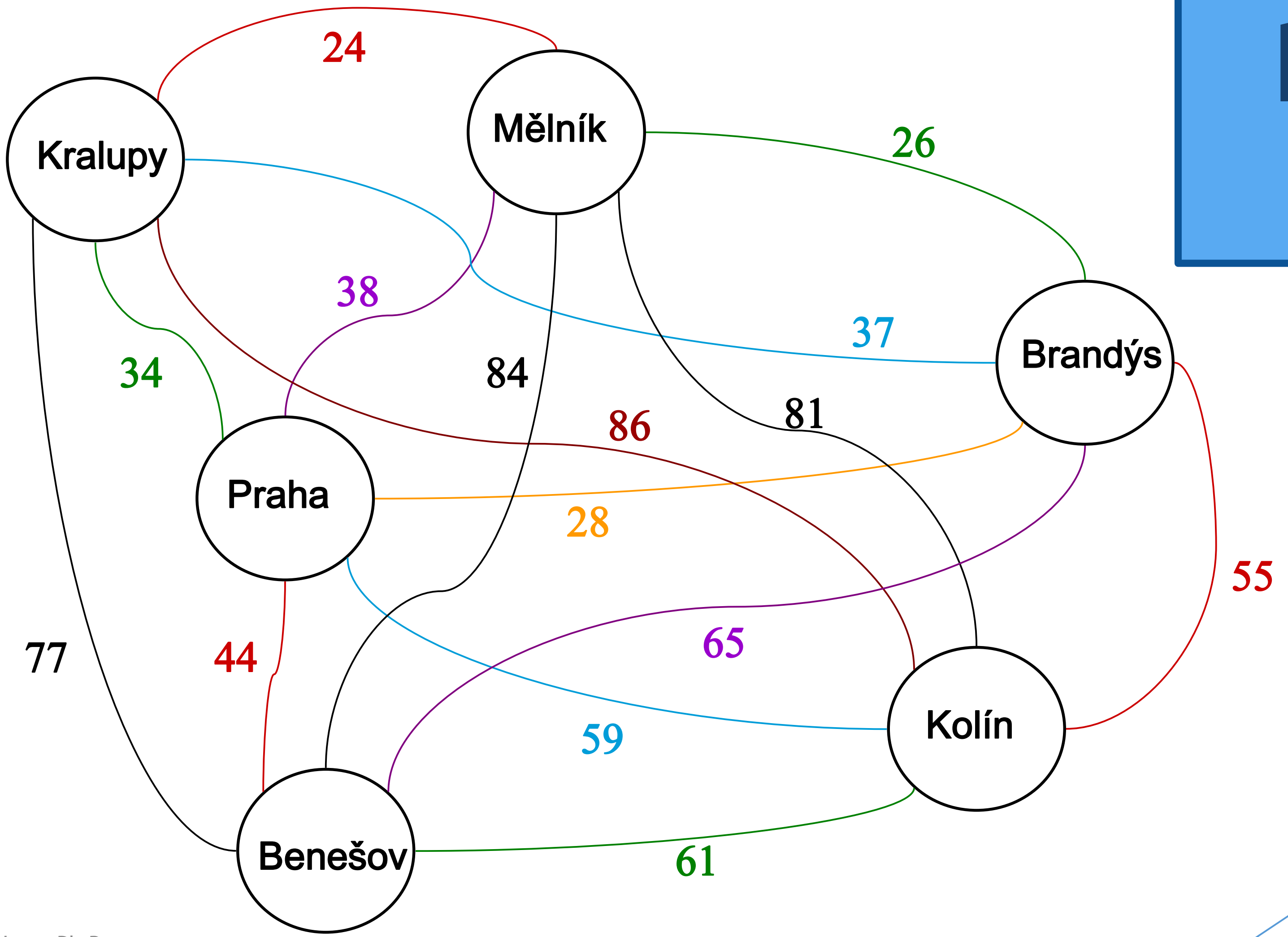
```
MODEL:
SETS:
prod/1..3/;
odd/1..3/;
mat(prod,odd):c,x;
ENDSETS

DATA:

ENDDATA

min = @sum(mat(i,j):c(i,j)*x(i,j));
@for(prod(i):@sum(odd(j):x(i,j))=1);
@for(odd(j):@sum(prod(i):x(i,j))=1);
END
```

	O1	O2	O3
P1	101	97	91
P2	87	96	99
P3	98	110	102

4.5 Okružní dopravní problém (OkDP)

- Historický název tohoto typu úlohy LP je „problém obchodního cestujícího“(anglicky Travelling Salesman Problem – TSP):
  - obchodní cestující má vyjít z místa M1
  - obejít stanovený počet míst tak, aby do každého jednou vešel a jednou z něj vyšel
  - cestu musí absolvovat najednou
  - celková délka cesty musí být minimální
- Na rozdíl od DP nejde o určení přepravovaných množství, ale o stanovení dopravní cesty

4.5 Příklad - zadání



Problém bankovního lupiče

4.5 OkDP – obecný model

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

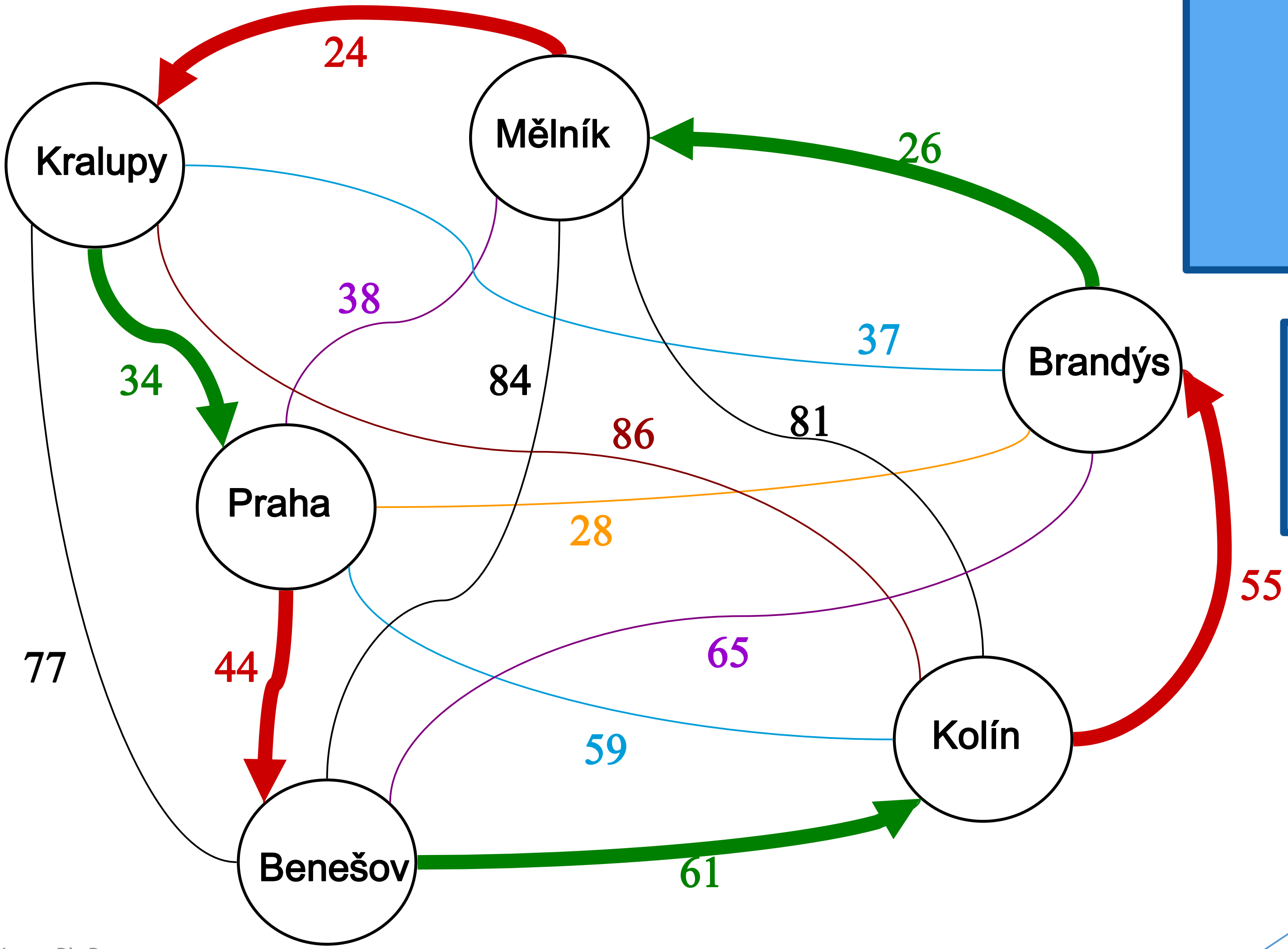
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha_i - \alpha_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1, \qquad i = 1, 2, \dots, n, j = 2, 3, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

4.5 Příklad - řešení



Problém bankovního lupiče

z = 244

	Kr	Mě	Pr	Br	Be	Ko	δ_i
Kralupy	0	0	1	0	0	0	0
Mělník	1	0	0	0	0	0	5
Praha	0	0	0	0	1	0	1
Brandýs	0	1	0	0	0	0	4
Benešov	0	0	0	0	0	1	2
Kolín	0	0	0	1	0	0	3

4.6 Úloha o pokrytí (ÚoP)

- Jde o jednu z variant přiřazovacího problému
- Je třeba rozhodnout o umístění K obslužných stanic (hasičská stanice, první pomoc atd.)
- Území působnosti těchto stanic je rozděleno do n obvodů $(n > K)$
- Každý obvod je obsluhován jednou stanicí
- Je třeba určit, do kterých obvodů bude umístěna určitá obslužná stanice
- Současně je třeba určit území působnosti této stanice

4.6 Příklad - zadání

- Ve dvou z šesti městských obvodů O1, O2, ..., O6 se má postavit stanice rychlé pomoci a určit, které obvody budou mít zřízené stanice na starosti
- V tabulce je:
  - průměrný čas, který potřebuje stanice zřízená v obvodě O_i pro příjezd k pacientovi v obvodě O_j (v minutách)
  - průměrná frekvence zásahů rychlé pomoci v jednotlivých obvodech
- Cílem je navrhnout, kde zřídit stanice a které obvody jim přiřadit tak, aby celková průměrná doba obsluhy byla minimální

4.6 ÚoP – obecný model

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} f_j$$

za podmínek:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq (n - K + 1) y_i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = K,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n$$

4.6 Příklad - řešení

Obvody	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
O_1	4	12	14	17	11	9
O_2	20	7	10	19	24	16
O_3	21	13	5	8	11	15
O_4	9	12	14	3	8	18
O_5	17	25	13	10	6	16
O_6	13	8	9	15	10	5
Četnosti	30	50	42	36	24	28

Obvody	*Stanice*
O_1	0
O_2	0
O_3	0
O_4	1
O_5	0
O_6	1
Celkem	2

4.6 Příklad – optimální řešení

- Řešení v předchozí tabulce je nejen přípustné, ale i optimální.
- Jedna stanice rychlé pomoci bude umístěna v obvodu O_4
  - Bude obsluhovat obvody O_1, O_4, O_5
- Druhá stanice rychlé pomoci bude umístěna v obvodu O_6
  - bude obsluhovat obvody O_2, O_3, O_6
- Plánované zásahy budou trvat přibližně 1488 minut
- Průměrná doba zásahu je odtud 7,09 minut

Detaily k přednášce: skripta

KONEC