4EK212 – Kvantitativní management

5. Celočíselné programování

5.1 Matematický model úlohy ILP

- Nalézt **extrém účelové funkce**

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots + c_nx_n$$

na soustavě vlastních omezení

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ \dots + a_{1n}x_n \mathbf{R}\ b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ \dots + a_{2n}x_n \mathbf{R}\ b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ \dots + a_{3n}x_n \mathbf{R}\ b_3$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ \dots + a_{mn}x_n \mathbf{R}\ b_m$$

za podmínek nezápornosti

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Úloha LP

5.1 Matematický model úlohy ILP

- Nalézt **extrém účelové funkce**

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

na soustavě vlastních omezení

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \,\mathbf{R}\, b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \,\mathbf{R}\, b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \,\mathbf{R}\, b_3$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \,\mathbf{R}\, b_m$$

za podmínek nezápornosti

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$
$$\boldsymbol{x_j} \text{ – celé}, \boldsymbol{j = 1, 2, \dots, n}$$

Úloha ILP

5.1 Matematický model úlohy ILP

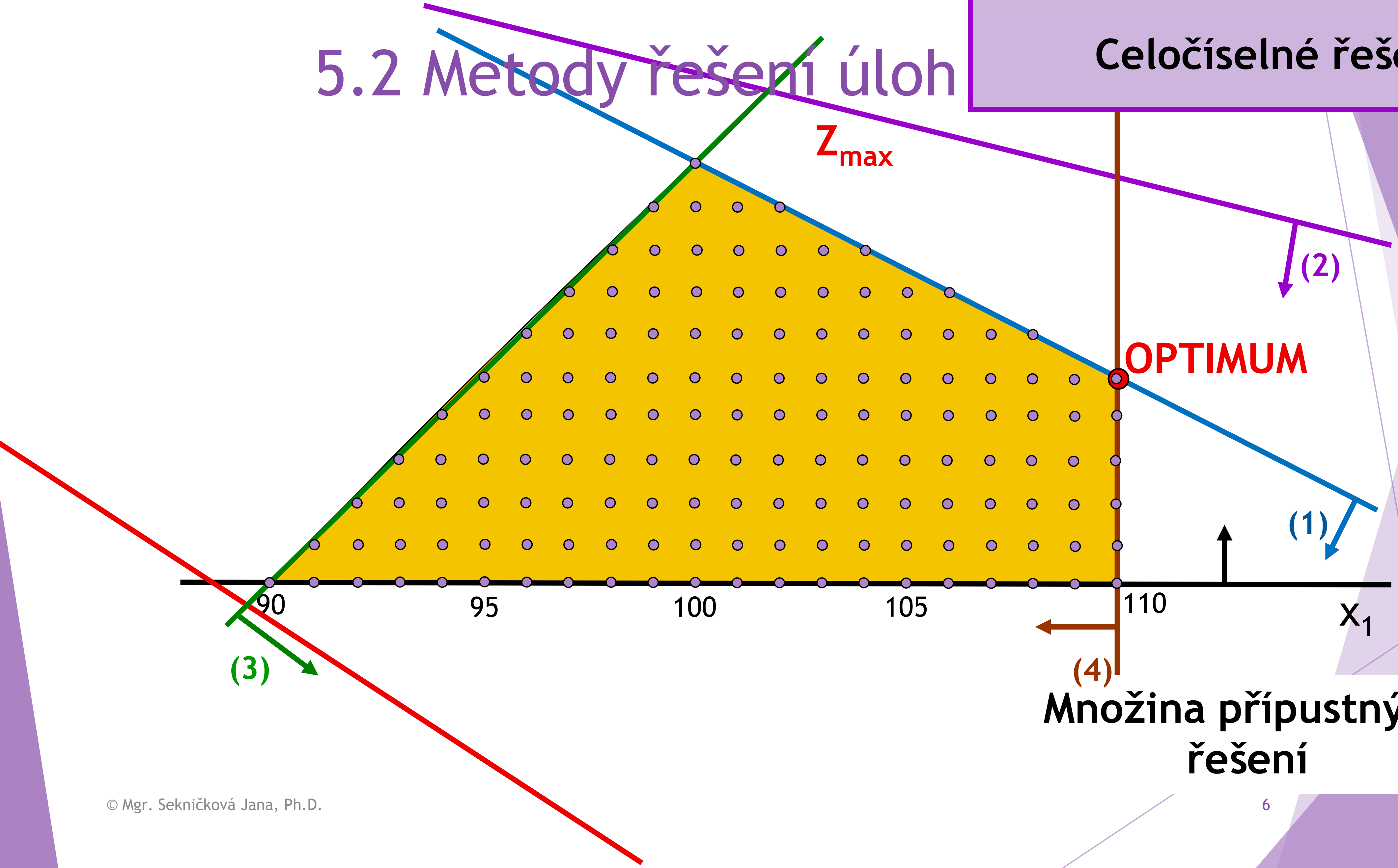
- **LP** – Úlohy lineárního programování
- **ILP** - Úlohy celočíselného lineárního programování
- **PILP** – Úlohy ryze celočíselného lineárního programování
- **MILP** – Úlohy smíšeně celočíselného lineárního programování

5.1 Matematický model úlohy ILP

- **Množina přípustných řešení úlohy ILP**
  - Množina (omezená nebo neomezená) izolovaných bodů (pro PILP)
  - Celočíselná mřížka
  - Diskrétní množina – již ne spojitá

5.2 Metody řešení úloh

Celočíselné řešení



Množina přípustných řešení

5.2 Metody řešení úloh ILP

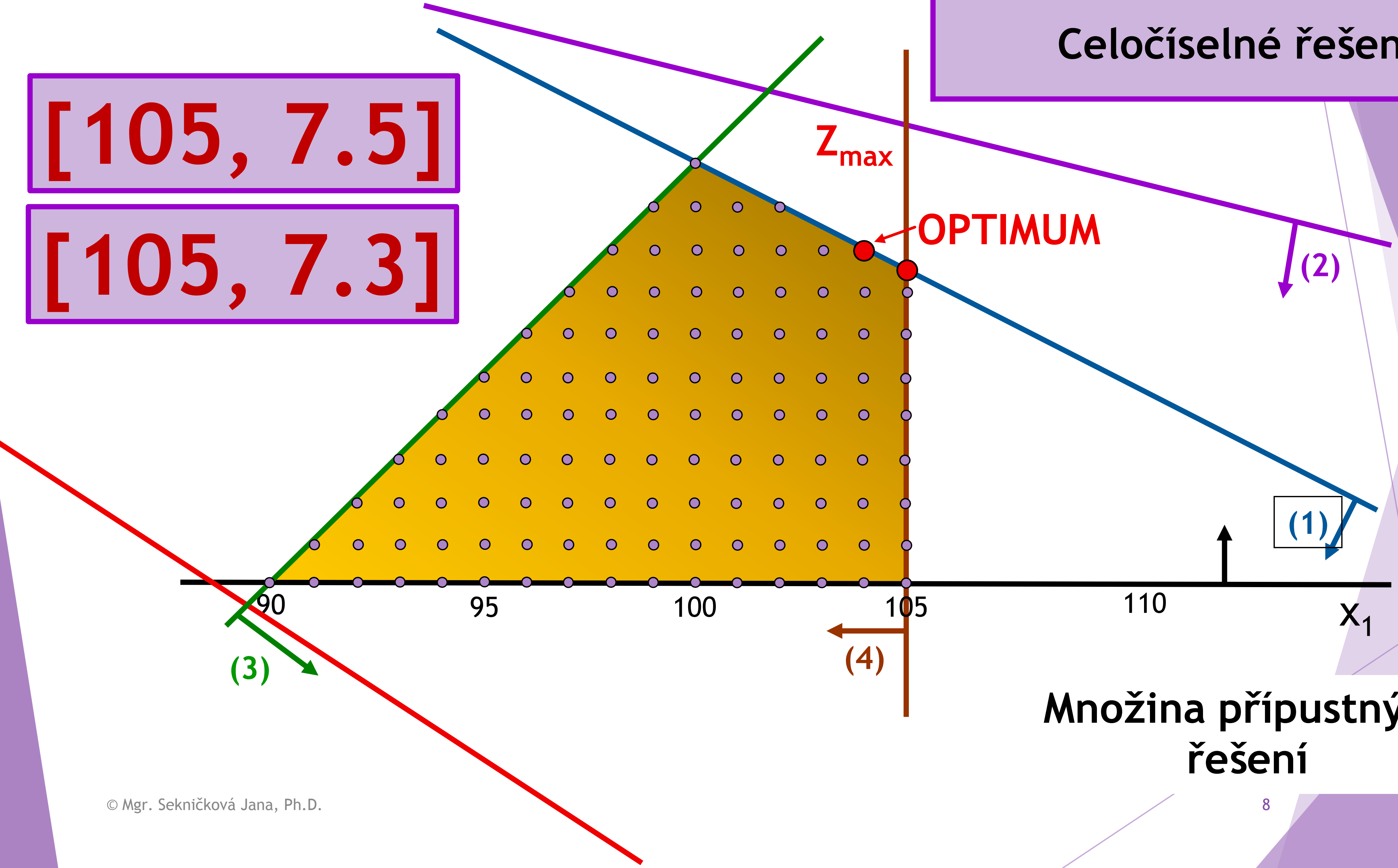
- **Metody pro řešení úloh LP**
  - Pokud je nalezené OŘ úlohy LP celočíselné, je zároveň OŘ úlohy ILP
  - Pokud celočíselné není, musíme použít některou metodu pro ILP

Můžeme výsledek zaokrouhlit?

Celočíselné řešení

[105, 7.5]

[105, 7.3]



Množina přípustných řešení

5.2 Metody řešení úloh ILP

- **Metody pro řešení úloh LP**
  - Pokud je nalezené OŘ úlohy LP celočíselné, je zároveň OŘ úlohy ILP
- **Metody pro řešení úloh ILP**
  - Grafické řešení
  - Metody řezných nadrovin (Gomoryho metoda)
  - Kombinatorické metody (metoda větvení a mezí)
  - Dekompoziční metody
  - Heuristické metody

5.3 Metoda větvení a mezí

- Metoda větvení a mezí
- Metoda větví a mezí
- Metoda větvení a hranic
- Metoda větví a hranic
- Metoda B and B
- Branch and bound method
- Branches and bounds method

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - větve a meze**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ x_1 &\leq \ \ 3 \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 &\ , \text{celé} \end{aligned}$$

$$z = 9x_1 + 10x_2 \ldots \text{max.}$$

- **Označme tuto úlohu LP$^{(0)}$**

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - větve a meze**
  - Řešení úlohy LP$^{(0)}$ simplexovou metodou
  - Např. pomocí LINGO či graficky
  - Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (3, 9/5)^{\mathrm{T}}, z^{(0)} = 45$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 \quad\quad &\le \ 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 &, \text{ celé} \\ z = 9x_1 + 10x_2 & \ldots \text{ max.} \end{aligned}$$

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - meze**
  - Optimální řešení

$$\mathbf{x}^{(0)} = (3, 9/5)^{\mathrm{T}}, z^{(0)} = 45$$

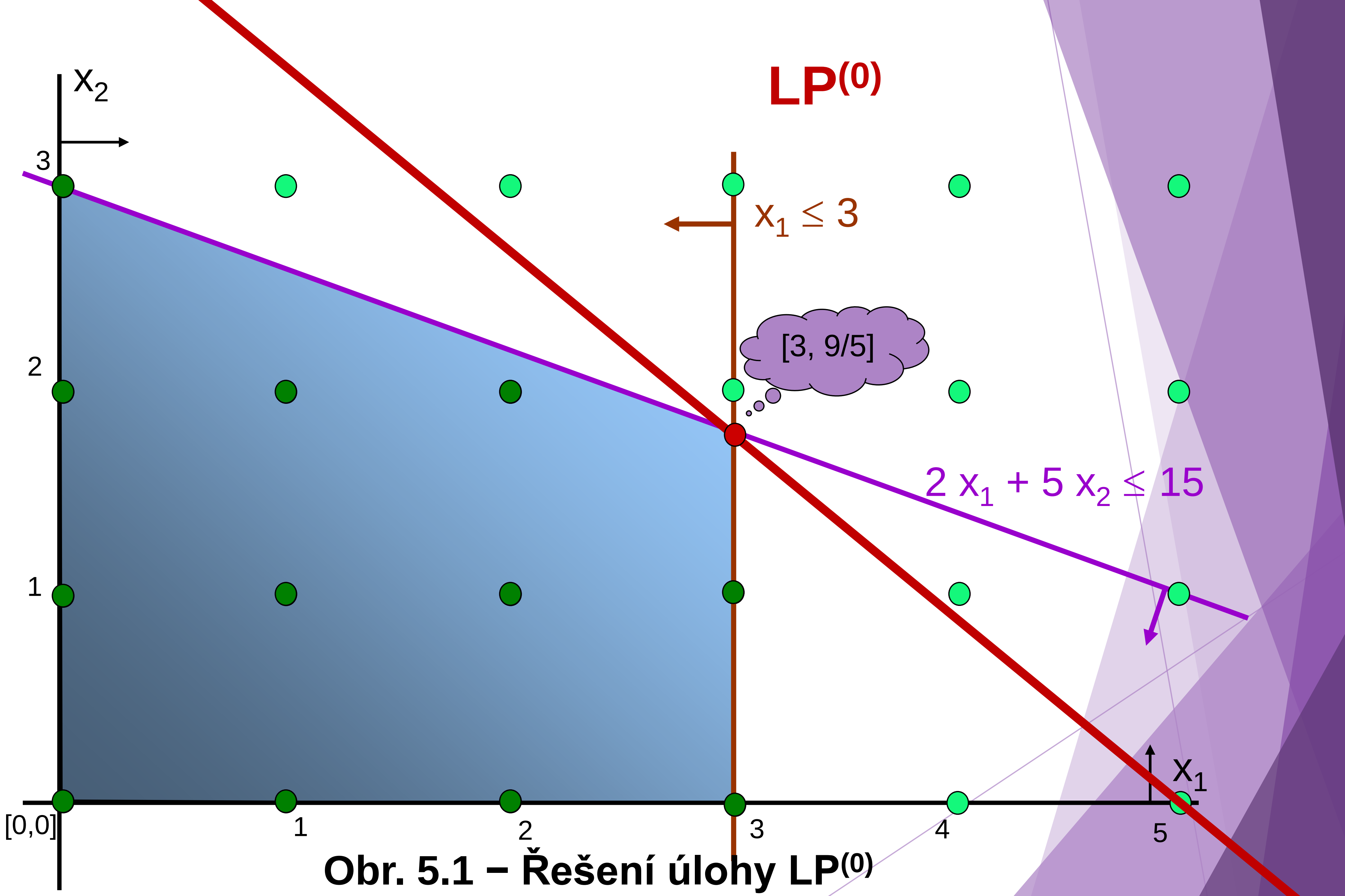
není celočíselné

  - Hodnota účelové funkce

$$z^{(0)} = h^{(0)} = [45]$$

je **horní mezí** hodnoty účelové funkce celočíselné úlohy

  - Řešení úlohy znázorníme graficky



Obr. 5.1 – Řešení úlohy $LP^{(0)}$

$$2x_1 + 5x_2 \le 15$$
$$x_1 \qquad \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\text{ , celé}$$
$$z = 9x_1 + 10x_2 \ldots \text{max.}$$

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - větvení**
  - $\mathbf{x}^{(0)} = (3, 9/5)^T, z^{(0)} = 45$
  - Proměnná x_2 porušuje podmínku celočíselnosti, vybereme ji jako **větvící proměnnou**
  - Vytvoříme **levou větev:** $x_2 \le [x_2]$**, tj.**

    $$x_2 \le 1$$
  - a **pravou větev:** $x_2 \ge [x_2] + 1$**, tj.**

    $$x_2 \ge 2$$
- Formulujeme úlohy $\mathrm{LP}^{(1)}$ a $\mathrm{LP}^{(2)}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0\text{, celé} \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \text{max.} \end{aligned}$$

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - větvení úlohy LP$^{(0)}$**

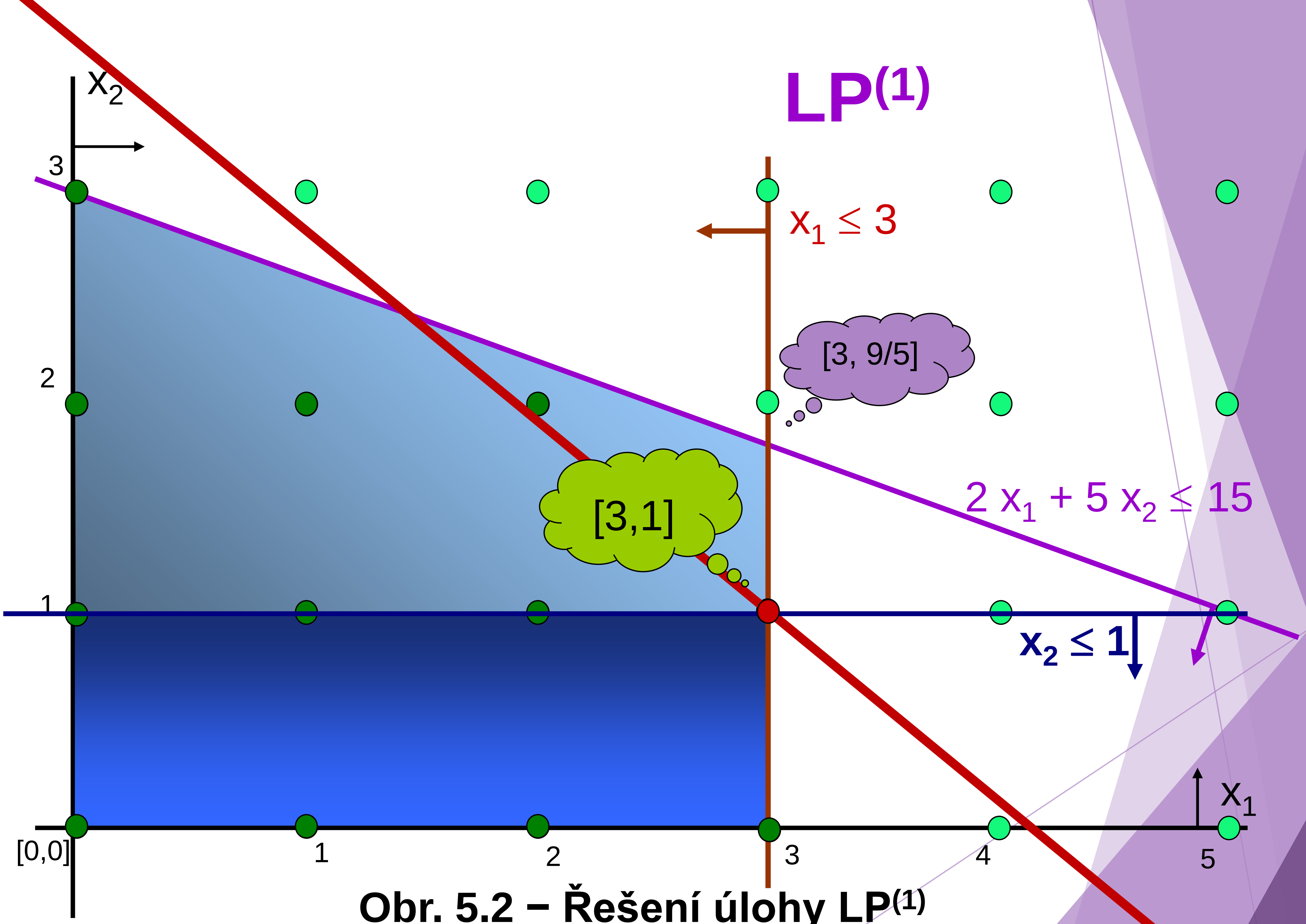
Levá větev: LP$^{(1)}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ x_1 &\leq 3 \\ \boldsymbol{x_2} &\leq \mathbf{1} \\ x_j &\geq 0 \\ j &= 1,2 \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \text{max.} \end{aligned}$$

Pravá větev: LP$^{(2)}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ x_1 &\leq 3 \\ \boldsymbol{x_2} &\geq \mathbf{2} \\ x_j &\geq 0 \\ j &= 1,2 \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \text{max.} \end{aligned}$$

LP^(1)



Obr. 5.2 – Řešení úlohy LP$^{(1)}$

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(1)}$**
- Optimální řešení úlohy **LP$^{(1)}$** je celočíselné:

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{3}, \mathbf{1})^{\mathrm{T}},\ z^{(1)} = 37$$

- Dosadíme $z^* = \mathbf{37}$

KONEC VĚTVE

Je to OŘ?

$LP^{(0)}$

$\mathbf{x}^{(0)} = (3;\ \mathbf{9/5})$

$z^{(0)} = 45$

Mez = 45

$x_2 \leq 1$

$x_2 \geq 2$

$LP^{(1)}$

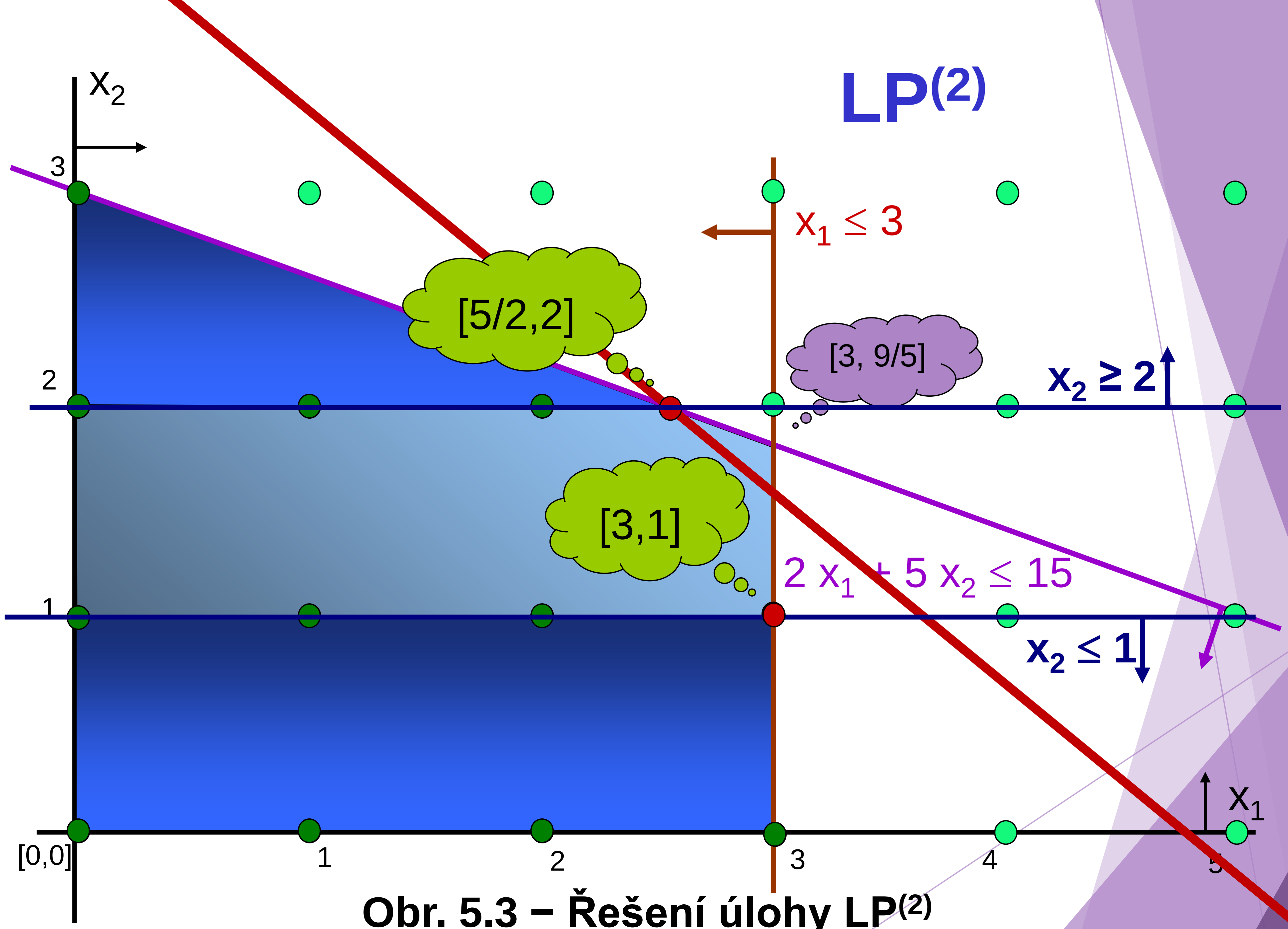
$\mathbf{x}^{(1)} = (3;\ 1)$

$z^{(1)} = 37$

$\boldsymbol{z^* = 37}$

KONEC VĚTVE

LP$^{(2)}$



Obr. 5.3 – Řešení úlohy LP$^{(2)}$

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(2)}$**
- Optimální řešení úlohy **LP$^{(2)}$** není celočíselné:

$$\mathbf{x^{(2)} = (5/2,\ 2),\ z^{(2)} = 85/2 = 42{,}5}$$

- $h^{(2)} = [85/2] > z^* = 37 \rightarrow$ větvíme **LP$^{(2)}$**

$LP^{(0)}$

$\mathbf{x}^{(0)} = (3;\ \mathbf{9/5})$

$z^{(0)} = 45$

Mez = 45

$x_2 \leq 1$

$LP^{(1)}$

$\mathbf{x}^{(1)} = (3;\ 1)$

$z^{(1)} = 37$

$\boldsymbol{z^{*} = 37}$

KONEC VĚTVE

$x_2 \geq 2$

$LP^{(2)}$

$\mathbf{x}^{(2)} = (\mathbf{5/2};\ 2)$

$z^{(2)} = 42{,}5$

Mez = 42

$$2x_1 + 5x_2 \le 15$$
$$x_1 \le 3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\text{ , celé}$$
$$z = 9x_1 + 10x_2 \ldots \max.$$

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - větvení úlohy LP$^{(2)}$, $x_1 = 5/2$**

Levá větev: LP$^{(3)}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 &\le 3 \\ x_2 &\ge 2 \\ x_1 &\le 2 \\ x_j &\ge 0 \\ j &= 1, 2 \end{aligned}$$

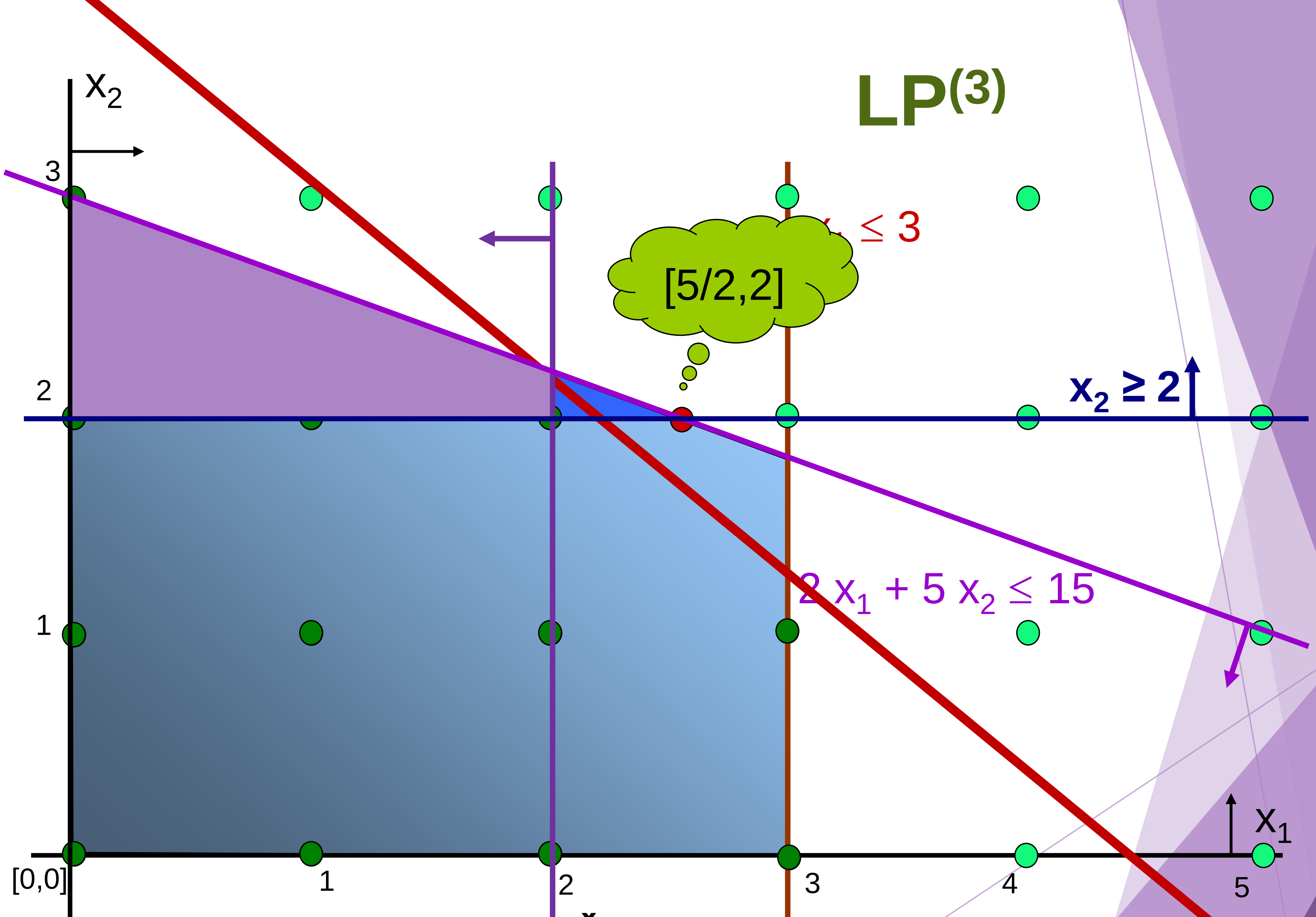
$z = 9x_1 + 10x_2 \ldots \max.$

Pravá větev: LP$^{(4)}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 &\le 3 \\ x_2 &\ge 2 \\ x_1 &\ge 3 \\ x_j &\ge 0 \\ j &= 1, 2 \end{aligned}$$

$z = 9x_1 + 10x_2 \ldots \max.$

$LP^{(3)}$



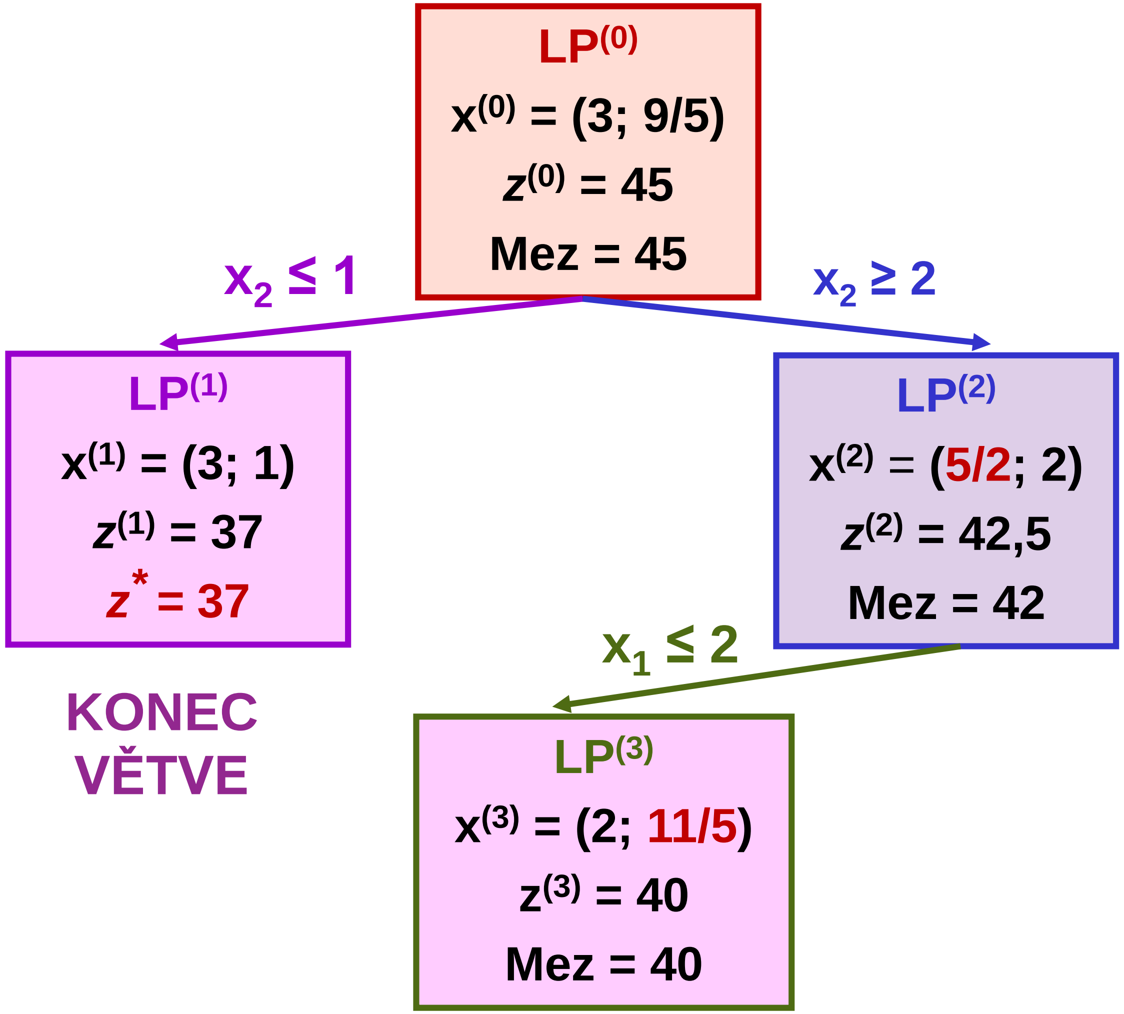
Obr. 5.4 – Řešení úlohy $LP^{(3)}$

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(3)}$**
- Optimální řešení úlohy **LP$^{(3)}$** není celočíselné:

$$x^{(3)}=(2,\ 11/5),\ z^{(3)} = 40$$

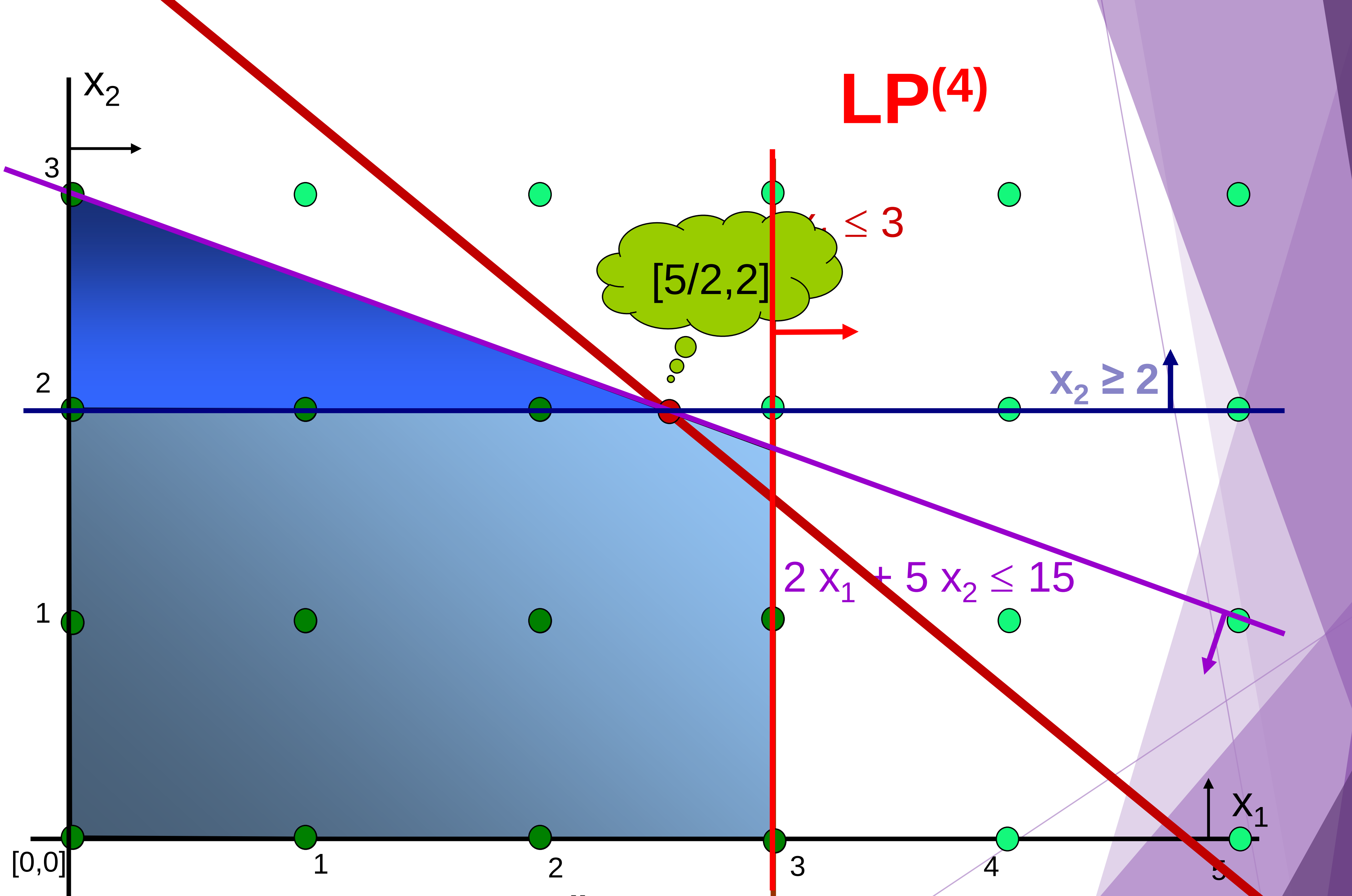
- $h^{(3)} = [40] > z^* = 37 \rightarrow$ větvíme **LP$^{(3)}$**


$LP^{(0)}$
$x^{(0)} = (3; 9/5)$
$z^{(0)} = 45$
Mez = 45
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
$LP^{(1)}$
$x^{(1)} = (3; 1)$
$z^{(1)} = 37$
$z^{*} = 37$
KONEC VĚTVE
$LP^{(2)}$
$x^{(2)} = (5/2; 2)$
$z^{(2)} = 42{,}5$
Mez = 42
$x_1 \leq 2$
$LP^{(3)}$
$x^{(3)} = (2; 11/5)$
$z^{(3)} = 40$
Mez = 40

Kudy dál?

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(4)}$**
- Úloha LP$^{(4)}$ **má vyšší horní mez** než úlohy vzniklé větvením LP$^{(3)}$
- K OŘ úlohy LP$^{(2)}$ přidáme omezení $x_1 \geq 3$



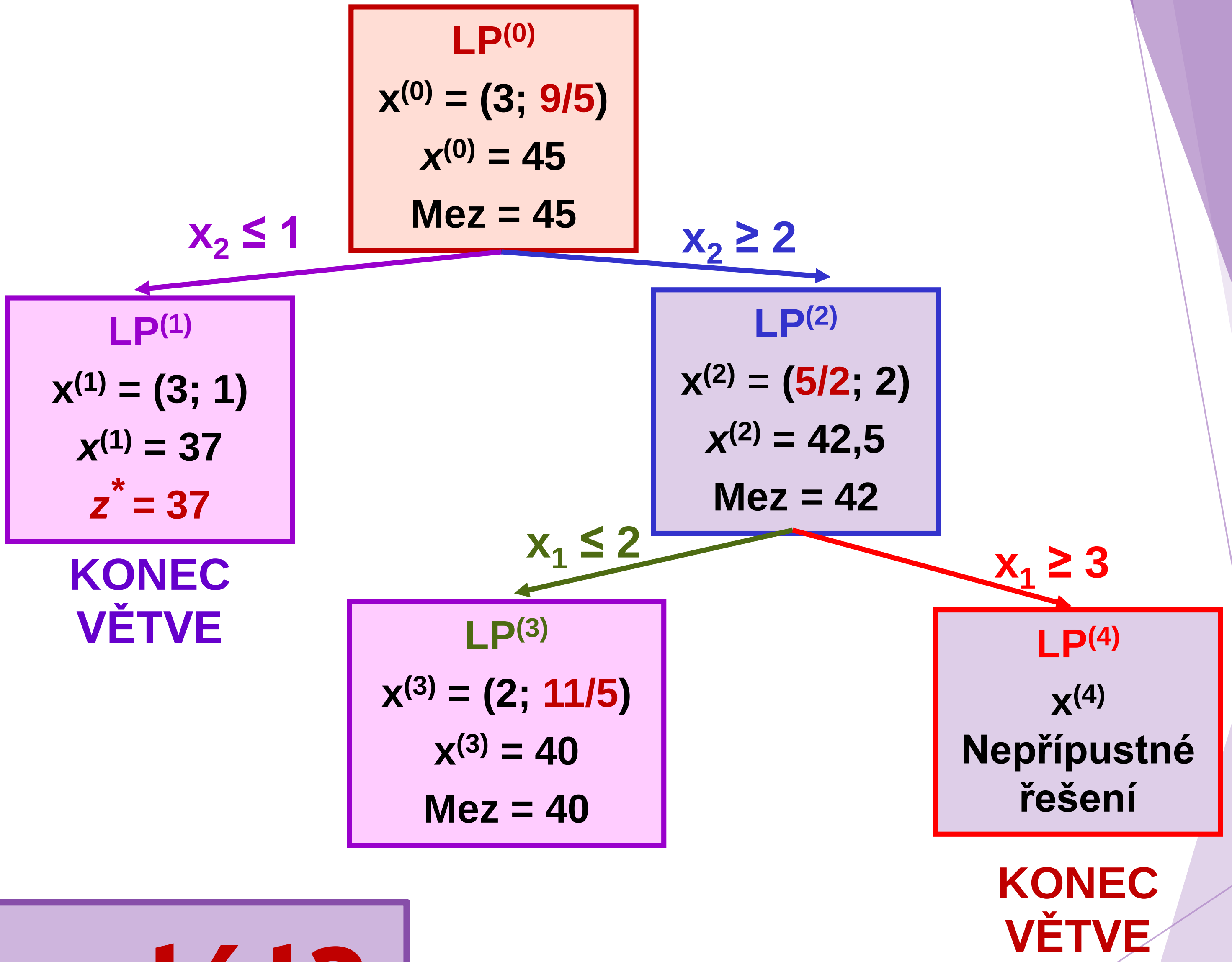
Obr. 5.5 – Řešení úlohy LP$^{(4)}$

11.2 Metoda větví a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(4)}$**
- K OŘ úlohy **LP$^{(2)}$** přidáme omezení $\mathbf{x_1 \geq 3}$

Úloha LP$^{(4)}$ nemá žádné přípustné (ani optimální) řešení

KONEC VĚTVE


$LP^{(0)}$
$x^{(0)} = (3; 9/5)$
$x^{(0)} = 45$
Mez = 45
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
$LP^{(1)}$
$x^{(1)} = (3; 1)$
$x^{(1)} = 37$
$z^* = 37$
KONEC VĚTVE
$LP^{(2)}$
$x^{(2)} = (5/2; 2)$
$x^{(2)} = 42,5$
Mez = 42
$x_1 \leq 2$
$x_1 \geq 3$
$LP^{(3)}$
$x^{(3)} = (2; 11/5)$
$x^{(3)} = 40$
Mez = 40
$LP^{(4)}$
$x^{(4)}$
Nepřípustné řešení
KONEC VĚTVE

Kudy dál?

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 \quad\quad &\le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0,\ \text{celé} \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \max. \end{aligned}$$

5.3 Metoda větvení a mezí

- Příklad - větvení úlohy LP(3), $x_2 = 11/5$

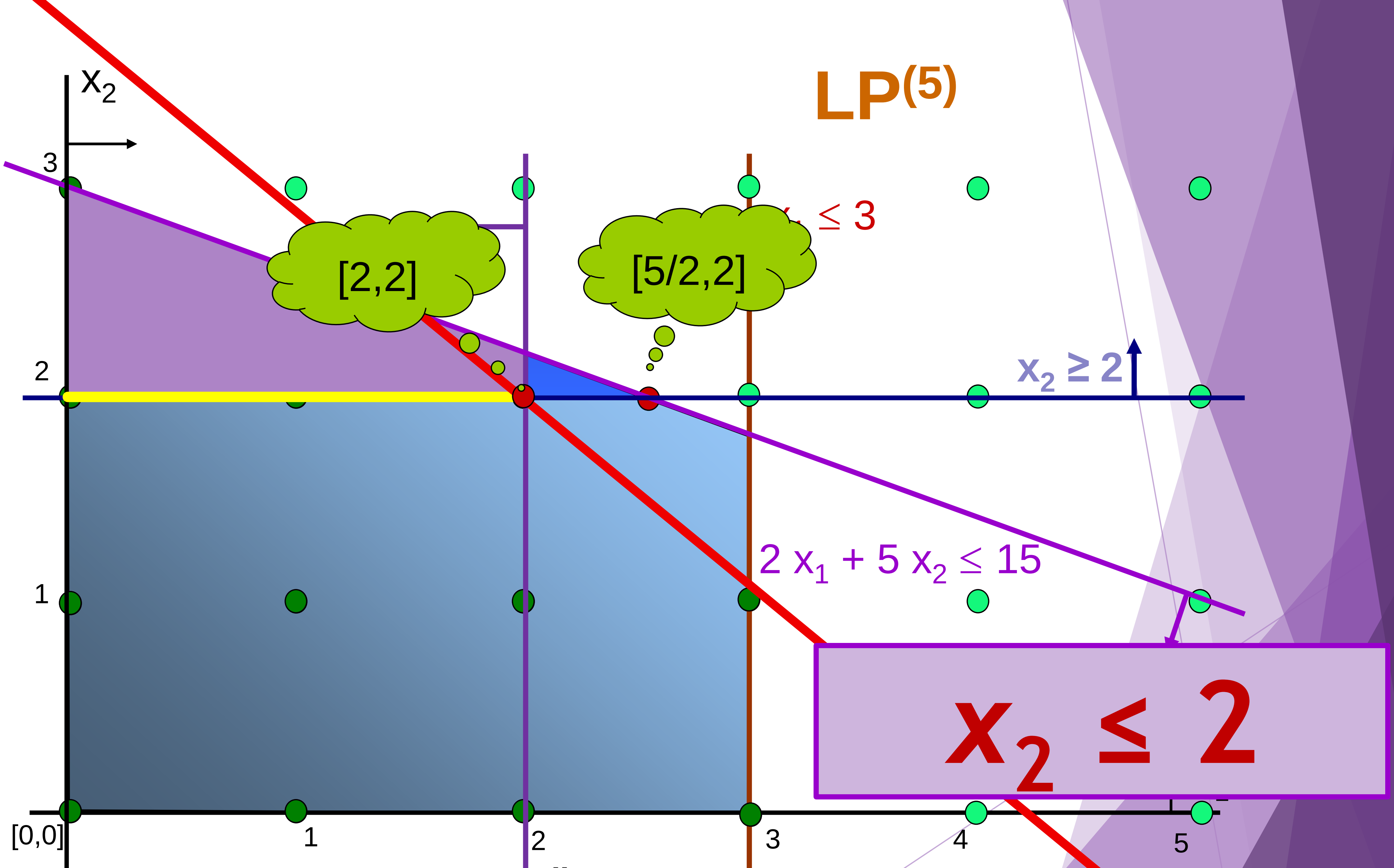
Levá větev: LP(5)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 \quad\quad &\le 3 \\ x_2 &\ge 2 \\ x_1 \quad\quad &\le 2 \\ x_2 &\le 2 \\ x_j &\ge 0 \\ j &= 1, 2 \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \max. \end{aligned}$$

Pravá větev: LP(6)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 \quad\quad &\le 3 \\ x_2 &\ge 2 \\ x_1 \quad\quad &\le 2 \\ x_2 &\ge 3 \\ x_j &\ge 0 \\ j &= 1, 2 \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \max. \end{aligned}$$

$LP^{(5)}$



Obr. 5.6 – Řešení úlohy $LP^{(5)}$

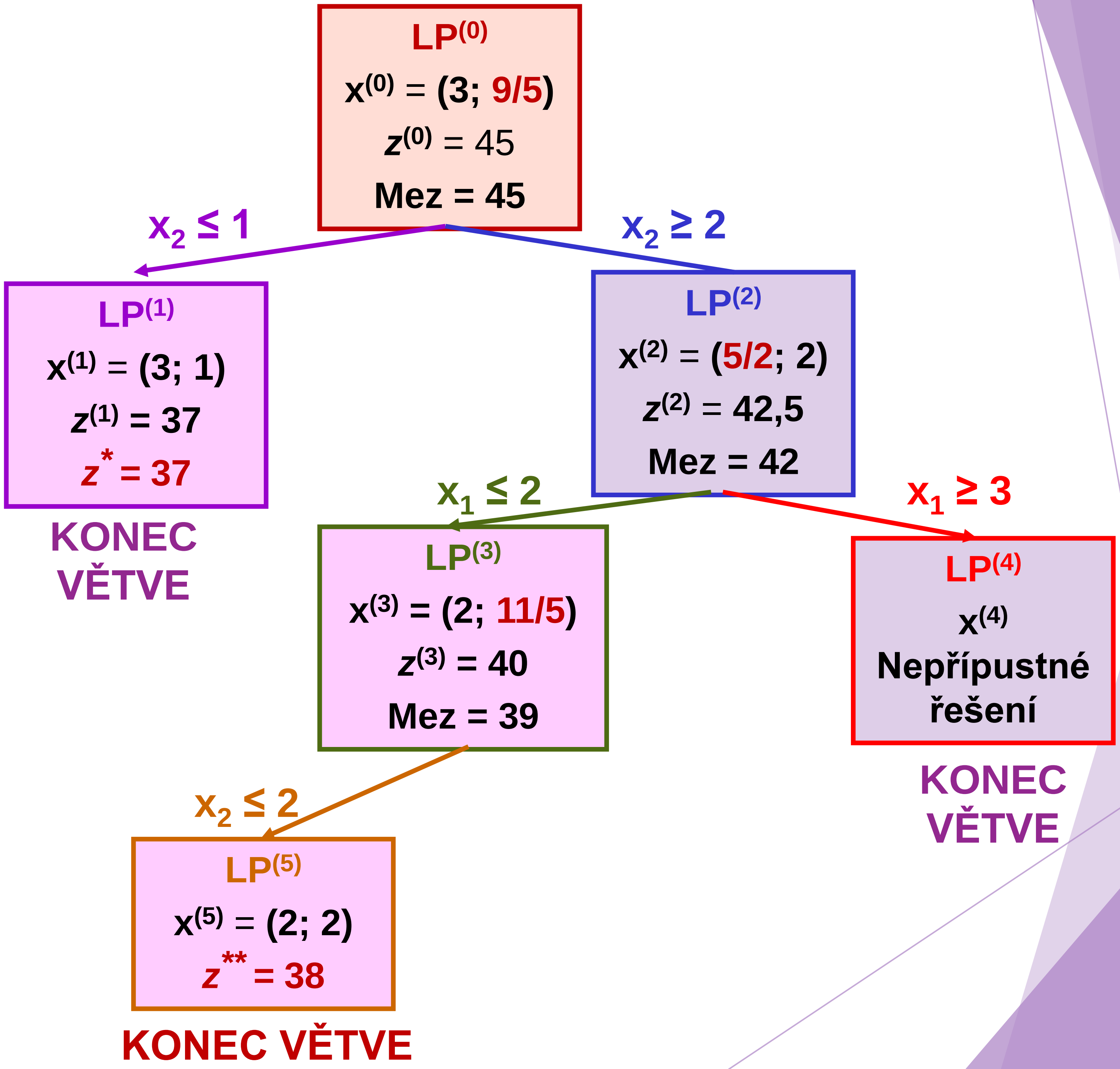
5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(5)}$**
- K OŘ úlohy **LP$^{(3)}$** přidáme omezení $x_2 \leq 2$
- Optimální řešení úlohy **LP$^{(5)}$** je celočíselné:

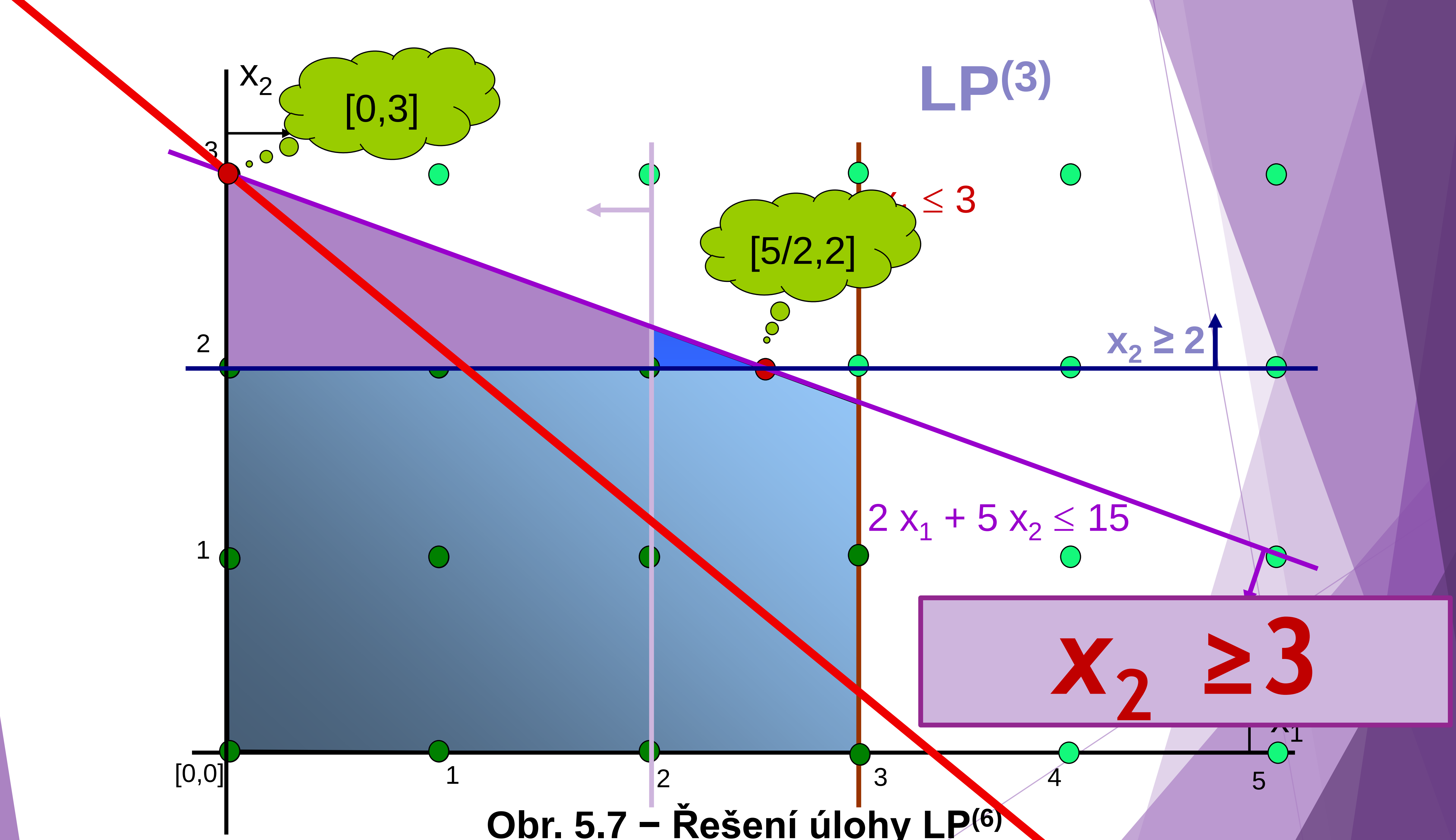
$$x^{(5)} = (2, 2),\ z^{(5)} = 38$$

- $h^{(5)} = 38 > z^{*} \rightarrow z^{**} = 38$

  KONEC VĚTVE


LP(0)
x(0) = (3; 9/5)
z(0) = 45
Mez = 45
x2 ≤ 1
x2 ≥ 2
LP(1)
x(1) = (3; 1)
z(1) = 37
z* = 37
KONEC VĚTVE
LP(2)
x(2) = (5/2; 2)
z(2) = 42,5
Mez = 42
x1 ≤ 2
x1 ≥ 3
LP(3)
x(3) = (2; 11/5)
z(3) = 40
Mez = 39
LP(4)
x(4)
Nepřípustné řešení
KONEC VĚTVE
x2 ≤ 2
LP(5)
x(5) = (2; 2)
z** = 38
KONEC VĚTVE

LP$^{(3)}$



Obr. 5.7 − Řešení úlohy LP$^{(6)}$

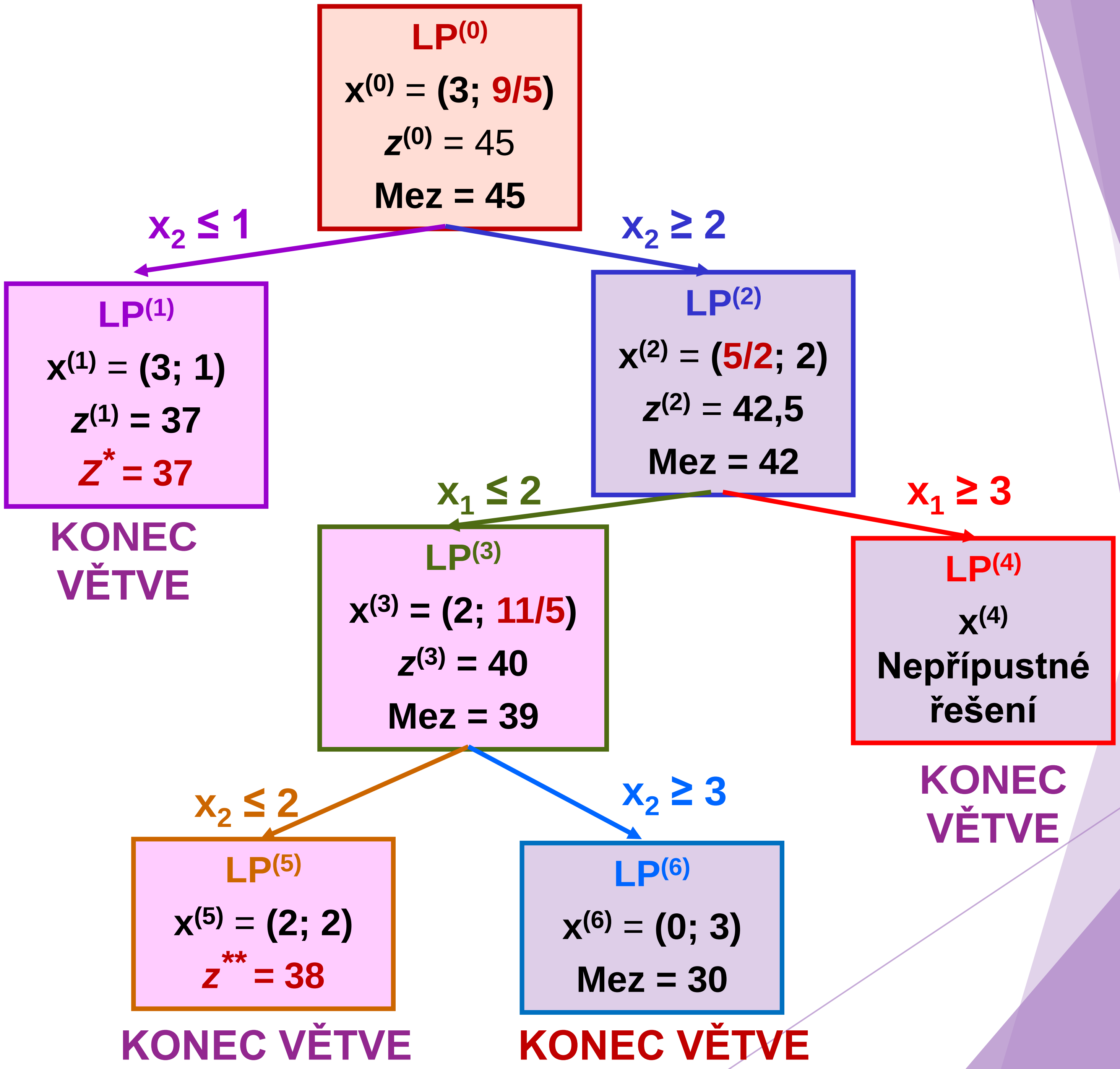
5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(6)}$**
- K OŘ úlohy **LP$^{(3)}$** přidáme omezení $x_2 \geq 3$
- Optimální řešení úlohy **LP$^{(6)}$** je celočíselné:

$$x^{(6)} = (0, 3),\ z^{(6)} = 30$$

- $h^{(6)} = 30 < z^{**} = 38$

  KONEC VĚTVE



LP(0)
x(0) = (3; 9/5)
z(0) = 45
Mez = 45
x2 ≤ 1
x2 ≥ 2
LP(1)
x(1) = (3; 1)
z(1) = 37
Z* = 37
KONEC VĚTVE
LP(2)
x(2) = (5/2; 2)
z(2) = 42,5
Mez = 42
x1 ≤ 2
x1 ≥ 3
LP(3)
x(3) = (2; 11/5)
z(3) = 40
Mez = 39
LP(4)
x(4)
Nepřípustné řešení
KONEC VĚTVE
x2 ≤ 2
x2 ≥ 3
LP(5)
x(5) = (2; 2)
z** = 38
KONEC VĚTVE
LP(6)
x(6) = (0; 3)
Mez = 30
KONEC VĚTVE

5.3 Metoda větvení a mezí

- **Příklad - zakončení výpočtu**
- Všechny větve jsou ukončeny
- Optimální hodnota účelové funkce celočíselné úlohy

$$z^{**} = 38$$

- Optimálním řešením úlohy ILP je

$$\mathbf{x}^{(5)} = (2,\ 2),\ z^{(5)} = 38$$

Detaily k přednášce: skripta

KONEC