Transformační vztahy pro simplexovou metodu

Řešme následující úlohu LP a ukažme si na ní algoritmus simplexové metody.

Maximalizovat $z = 48x_1 + 30x_2$,

za podmínek
$$3x_1 + x_2 \leq 360 \,,$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 300 \,,$$
$$x_2 \leq 120 \,,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \,.$$

Tuto úlohu převedeme na soustavu ekvivalentních rovnic (v kanonickém tvaru) a sestavíme výchozí simplexovou tabulku.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	3	1	1	0	0	360
x_4	1	2	0	1	0	300
x_5	0	1	0	0	1	120
z_j	−48	−30	0	0	0	0

Následuje první iterace simplexového algoritmu:

1.) Test optima pro maximalizační účelovou funkci: $z_j \geq 0$ není splněn, prvé dva koeficienty v řádce účelové funkce jsou záporné, řešení tedy není optimální.
2.) Volba vstupující proměnné – tj. proměnné, která nejvíce porušuje test optima, tedy proměnné, které v řádce účelové funkce odpovídá záporný prvek v absolutní hodnotě nejvyšší – vstupující proměnnou je tudíž x_1 (a klíčový sloupec je první, a tedy $k = 1$)
3.) Volba vystupující proměnné – počítáme poměry t_i pravých stran b_i a prvků v klíčovém sloupci a_{ik}, ale jen těch, které jsou kladné ($a_{ik} > 0$) … proto nepočítáme poměr pro třetí řádek.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$t_i = b_i/a_{ik}$
x_3	3	1	1	0	0	360	360/3 = **120**
x_4	1	2	0	1	0	300	300/1 = 300
x_5	0	1	0	0	1	120	*xxx*
z_j	−48	−30	0	0	0	0	

Vystupující proměnnou je ta základní proměnná, která odpovídá řádku s nejnižším poměrem t_i (tedy hodnotou nejblíže k nule) – v našem případě je to proměnná x_3, klíčový řádek je tedy první a $q = 1$.

Připomeňme, že pokud by v klíčovém sloupci byly všechny koeficienty nekladné, řešená úloha by neměla optimální řešení, protože hodnota účelové funkce by byla neomezená. Výpočet by v takovém případě skončil.

4.) Klíčový prvek je potom prvek, který leží zároveň v klíčovém sloupci (k) i klíčovém řádku (q). Tento prvek má tedy hodnotu $a_{qk} = a_{11} = 3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$t_i = b_i/a_{ik}$
x_3	3	1	1	0	0	360	360/3 = **120**
x_4	1	2	0	1	0	300	300/1 = 300
x_5	0	1	0	0	1	120	*xxx*
z_j	−48	−30	0	0	0	0	

5.) Následuje transformace tabulky klasickou Gaussovou-Jordanovou metodou úplné eliminace. Cílem je upravit simplexovou tabulku tak, že nahradíme vystupující proměnnou (x_3) proměnnou vstupující (x_1) a celou tabulku přepočítáme tak, abychom na místě klíčového sloupce dostali jednotkový vektor s jedničkou na místě klíčového prvku a_{qk}. Platí pravidlo, že v celém řádku děláme stejnou lineární úpravu.

a. V bázi tedy místo x_3 napíšeme x_1, ostatní základní (bazické) proměnné zůstávají beze změny.

b. Nejprve upravíme klíčový řádek (první, $q = 1$). Klíčový prvek $a_{qk} = 3$ a na jeho místě potřebujeme dostat jedničku. Celý klíčový řádek tedy dělíme třemi.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	1/3	1/3	0	0	120
x_4	0					
x_5	0					
z_j	0					

Obecně tedy libovolný prvek nové simplexové tabulky v s+1 iteraci v klíčovém řádku (q) dostaneme tak, že příslušný prvek staré simplexové tabulky v s-té iteraci a_{qj}^s vydělíme klíčovým prvkem získaným v s-té iteraci a_{qk}^s. Tedy $a_{qj}^{s+1} = a_{qj}^s / a_{qk}^s$.

Stejnou úpravou počítáme i pravou stranu, tedy $b_q^{s+1} = b_q^s / a_{qk}^s$.

c. Dále platí pravidlo, že nový klíčový řádek násobíme jakoukoliv konstantou a sčítáme s upravovaným řádkem původní tabulky, a to tak, abychom v klíčovém sloupci dostali nulu.
V druhém řádku v klíčovém sloupci původní tabulky máme $a_{21} = 1$. Upravený nový klíčový řádek (v nové tabulce) tedy násobíme −1 a sčítáme s řádkem původním (druhým):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	1/3	1/3	0	0	120
x_4	0	5/3	−1/3	1	0	180
x_5	0					
z_j	0					

Podobně ve třetím řádku původní tabulky máme v klíčovém sloupci $a_{31} = 0$. Upravený nový klíčový řádek tedy násobíme 0 a sčítáme s řádkem původním (třetím) – ve skutečnosti řádek jen opisujeme:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	1/3	1/3	0	0	120
x_4	0	5/3	−1/3	1	0	180
x_5	0	1	0	0	1	120
z_j	0					

Všechny řádky tedy upravujeme stejnou úpravou. Libovolný prvek a_{ij}^{s+1} v řádku i a sloupci j v $s+1$ iteraci získáme tak, že prvek ve stejném sloupci v novém klíčovém řádku a_{qj}^{s+1} přenásobíme hodnotou ve stejném řádku původní simplexové tabulky v klíčovém sloupci a_{ik}^s, ale s opačným znaménkem (tedy $-a_{qj}^{s+1} \cdot a_{ik}^s$) a toto přičteme k upravovanému prvku a_{ij}^s.
Tedy $a_{ij}^{s+1} = a_{ij}^s - a_{qj}^{s+1} \cdot a_{ik}^s$.

Stejnou úpravou opět počítáme i pravé strany, tedy $b_i^{s+1} = b_i^s - b_q^{s+1} \cdot a_{ik}^s$.

d. Úpravy v řádce účelové funkce jsou analogické. V tomto řádku máme v klíčovém sloupci původní tabulky $z_1 = -48$. Upravený nový klíčový řádek tedy násobíme 48 a sčítáme s řádkem původním (řádek z_j):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	1/3	1/3	0	0	120
x_4	0	5/3	−1/3	1	0	180
x_5	0	1	0	0	1	120
z_j	0	-14	16	0	0	5760

I řádek účelové funkce tedy upravujeme stejně jako řádky předchozí. Libovolný prvek z_j^{s+1} ve sloupci j v s+1 iteraci získáme tak, že prvek ve stejném sloupci v novém klíčovém řádku a_{qj}^{s+1} přenásobíme hodnotou v řádku účelové funkce původní simplexové tabulky v klíčovém sloupci z_k^s, ale s opačným znaménkem (tedy $-a_{qj}^{s+1} \cdot z_k^s$) a toto přičteme k upravovanému prvku z_j^s. Tedy $z_j^{s+1} = z_j^s - a_{qj}^{s+1} \cdot z_k^s$.

Stejnou úpravou opět počítáme i pravou stranu (hodnotu účelové funkce), tedy $z^{s+1} = z^s - b_q^{s+1} \cdot z_k^s$.

Jsme na konci první iterace a následuje iterace druhá s identicky stejným postupem:

1.) Test optima pro maximalizační účelovou funkci: $z_j \geq 0$ není splněn, druhý koeficient v řádce účelové funkce je záporný, řešení tedy není optimální.
2.) Volba vstupující proměnné – proměnné, která nejvíce porušuje test optima, tedy proměnné, které v řádce účelové funkce odpovídá záporný prvek v absolutní hodnotě nejvyšší – vstupující proměnnou je tedy x_2 (a klíčový sloupec je druhý, a tedy $k = 2$)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	1/3	1/3	0	0	120
x_4	0	5/3	−1/3	1	0	180
x_5	0	1	0	0	1	120
z_j	0	-14	16	0	0	5760

3.) Volba vystupující proměnné – počítáme poměry pravých stran b_i a prvků v klíčovém sloupci a_{ik}, ale jen těch, které jsou kladné ($a_{ik} > 0$).

   Vystupující proměnnou je ta základní proměnná, která odpovídá řádku s nejnižším poměrem t_i (tedy hodnotou nejblíže k nule) – v našem případě je to proměnná x_4, klíčový řádek je tedy druhý a $q = 2$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$t_i = b_i/a_{ik}$
x_1	1	1/3	1/3	0	0	120	120/(1/3) = 360
x_4	0	5/3	−1/3	1	0	180	**180/(5/3) = 108**
x_5	0	1	0	0	1	120	120/1 = 120
z_j	0	-14	16	0	0	5760	

4.) Klíčový prvek je potom prvek, který leží zároveň v klíčovém sloupci (k) i klíčovém řádku (q). Tento prvek má tedy hodnotu $a_{qk} = a_{22} = 5/3$

5.) Následuje transformace tabulky klasickou Gaussovou-Jordanovou metodou úplné eliminace. Cílem je upravit simplexovou tabulku tak, že nahradíme vystupující proměnnou (x_4) proměnnou vstupující (x_2) a celou tabulku přepočítáme tak, abychom na místě klíčového sloupce dostali jednotkový vektor s jedničkou na místě klíčového prvku a_{qk}. Platí pravidlo, že v celém řádku děláme stejnou lineární úpravu.

a. V bázi tedy místo x_4 napíšeme x_2, ostatní základní (bazické) proměnné zůstávají beze změny.

b. Nejprve tedy upravíme klíčový řádek (druhý, q = 2). Klíčový prvek a_{qk} = 5/3 a na jeho místě potřebujeme dostat jedničku. Celý klíčový řádek tedy dělíme 5/3, neboli násobíme 3/5.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1		0				
x_2	0	1	−1/5	3/5	0	108
x_5		0				
z_j		0				

c. Dále platí pravidlo, že nový klíčový řádek násobíme jakoukoliv konstantou a sčítáme s původním upravovaným řádkem, a to tak, abychom v klíčovém sloupci dostali nulu.

V prvním řádku v klíčovém sloupci máme $a_{12} = 1$. Upravený nový klíčový řádek tedy násobíme −1/3 a sčítáme s řádkem původním (prvním):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	2/5	−1/5	0	84
x_2	0	1	−1/5	3/5	0	108
x_5		0				
z_j		0				

Podobně ve třetím řádku máme v klíčovém sloupci a_{32} = 1. Upravený nový klíčový řádek tedy násobíme −1 a sčítáme s řádkem původním (třetím):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	2/5	−1/5	0	84
x_2	0	1	−1/5	3/5	0	108
x_5	0	0	1/5	−3/5	1	12
z_j		0				

d. Úpravy v řádce účelové funkce jsou analogické. V tomto řádku máme v klíčovém sloupci $z_2 = -14$. Upravený nový klíčový řádek tedy násobíme 14 a sčítáme s řádkem původním (řádek z_j):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	2/5	−1/5	0	84
x_2	0	1	−1/5	3/5	0	108
x_5	0	0	1/5	−3/5	1	12
z_j	0	0	66/5	42/5	0	7272

V další iteraci bychom provedli test optima $z_j \geq 0$ a zjistili, že uvedené řešení je optimální. Řešení z tabulky vypíšeme tak, že hodnoty základních proměnných najdeme ve sloupci pravých stran v simplexové tabulce, tedy $x_1 = 84$, $x_2 = 108$ a $x_5 = 12$. Proměnné, které nejsou v bázi, jsou proměnné nezákladní a jejich hodnoty se rovnají 0, tedy $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Hodnotu účelové funkce pak najdeme v řádce účelové funkce ve sloupci pravých stran, tedy $z = 7272$. Řešení pak můžeme zapsat jako vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (84, 108, 0, 0, 12)^T$.