Cvičení 5 – Dvoufázová simplexová metoda I. (řešení)

Příklad 1 – Simplexová metoda

Uvažujte následující úlohu LP:

$$z = 3x_1 - 4x_2 \quad \dots \textit{extrém}$$

za podmínek:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\geq 0 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Sestavte výchozí simplexovou tabulku (pozor na první omezení).
b) Lze úlohu řešit jednofázovou simplexovou metodou? Proč?
c) Zobrazte množinu přípustných řešení, nalezněte optimální řešení podle ZVLP.
d) Nalezněte řešení úlohy pro případ maximalizace účelové funkce.
e) Nalezněte řešení úlohy pro případ minimalizace účelové funkce, vypište řešení včetně duálních proměnných a hodnoty účelové funkce.
f) Ověřte výsledky z bodu *c* a *d* graficky.

<u>Řešení:</u>

a) Sestavte výchozí simplexovou tabulku (pozor na první omezení).

Díky nulové pravé straně první omezující podmínky můžeme úlohu velmi snadno vyřešit tak, že toto omezení přenásobíme (-1). Změníme tím typ nerovnosti a celou úlohu můžeme řešit „jednofázovou" simplexovou metodou.

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\leq 0 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 9 \end{aligned}$$

Soustavu nerovnic převedeme na ekvivalentní soustavu rovnic v kanonickém tvaru (v tomto případě pouze přičtením přídatných proměnných).

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\ x_2 + x_5 &= 9 \end{aligned}$$

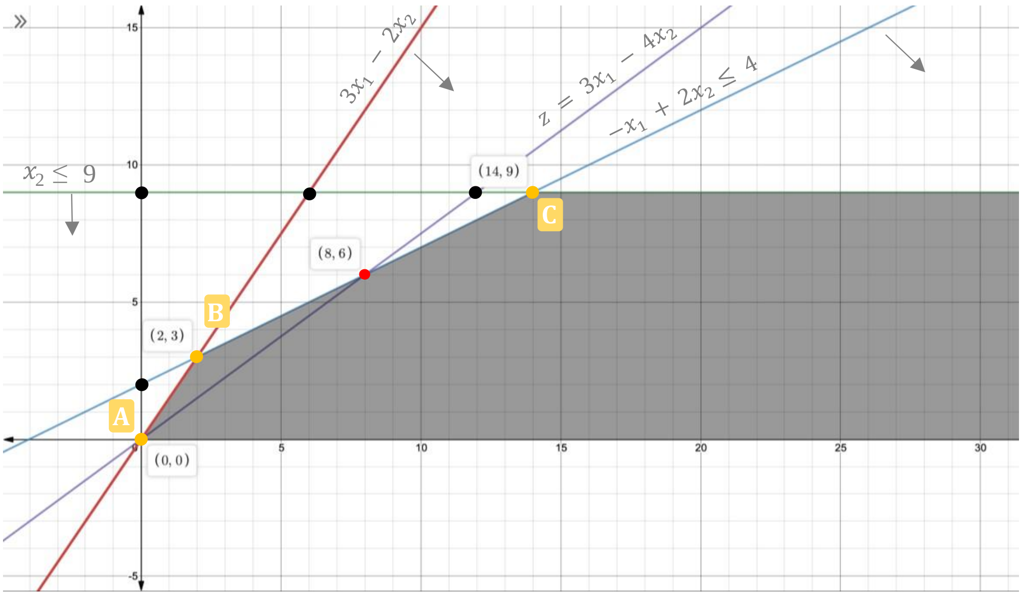
A zapíšeme výchozí simplexovou tabulku.

proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-3	2	1	0	0	0
x_4	-1	2	0	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	9
z	-3	4	0	0	0	0

b) Lze úlohu řešit jednofázovou simplexovou metodou? Proč?

Ano, úlohu lze řešit jednofázovou simplexovou metodou, protože výchozí řešení (nulový vektor) je řešením přípustným. Jak bylo uvedeno v bodě a), první omezení lze přenásobit (-1) a tím otočit první nerovnost. Všechna omezení jsou pak ve tvaru nerovnic typu „menší nebo rovno“ a pro nalezení optimálního řešení lze použít jednofázovou simplexovou metodu.

c) Zobrazte množinu přípustných řešení, nalezněte optimální řešení podle ZVLP.



V grafu je množina přípustných řešeních (PŘ) zobrazena šedou barvou. Je evidentní, že směrem doprava množina není omezená. Základní řešení ekvivalentní soustavy rovnic jsou zobrazena černými body, základní přípustná řešení úlohy LP pak představují body žluté (A, B, C). Červený bod je pouze pomocným bodem pro správné zobrazení sklonu účelové funkce.

Podle základní věty lineárního programování platí: Má-li úloha LP optimální řešení, pak má také základní optimální řešení. V naší úloze LP máme tři základní přípustná řešení (ZPŘ) (A, B, C).

- Pro případ maximalizace účelové funkce: hodnota účelové funkce je neomezená, úloha tedy nemá optimální řešení (i když PŘ a ZPŘ existují).
- Pro případ minimalizace účelové funkce: optimální řešení existuje, protože množina PŘ je ve směru hledaného minima omezená. Podle ZVLP musí být alespoň jedno ze ZPŘ optimální. To bude to, které má nejmenší hodnotu účelové funkce. Dopočítáme souřadnice všech tří ZPŘ a dopočítáme k nim hodnotu účelové funkce:
  - A: $\mathbf{x}_A = (0, 0)^{\mathrm{T}}, z_A = 0$
  - B: $\mathbf{x}_B = (2, 3)^{\mathrm{T}}, z_B = -6$
  - C: $\mathbf{x}_C = (14, 9)^{\mathrm{T}}, z_C = 6$

Nejnižší hodnotu a optimálním je tedy řešení $\mathbf{x}_B = (2, 3)^{\mathrm{T}}, z_B = -6$.

d) Nalezněte řešení úlohy pro případ maximalizace účelové funkce.

proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-3	2	1	0	0	0
x_4	-1	2	0	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	9
z	-3	4	0	0	0	0

Protože jsou všechny koeficienty v klíčovém sloupci nekladné, má úloha neomezenou účelovou funkci a optimální řešení proto neexistuje. Ke stejnému závěru jsme došli při grafickém řešení.

e) Nalezněte řešení úlohy pro případ minimalizace účelové funkce, vypište řešení včetně duálních proměnných a hodnoty účelové funkce.

proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	t_i
x_3	-3	2	1	0	0	0	0
x_4	-1	2	0	1	0	4	2
x_5	0	1	0	0	1	9	9
z	-3	4	0	0	0	0	

Všimněme si, že řešení v tabulce je degenerované (na grafu bod A, ve kterém se protínají obě podmínky nezápornosti a jedno omezení). Vstupující proměnná je x_2 (jediná porušuje test optima, kladný koeficient v řádce z). Vzhledem k tomu, že minimální podíl pravých stran a kladných prvků klíčového sloupce je 0 (degenerace), je vystupující proměnnou x_3. Klíčový prvek má hodnotu 2 a transformujeme tabulku.

proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	t_i
x_2	-3/2	1	1/2	0	0	0	x
x_4	2	0	-1	1	0	4	2
x_5	3/2	0	-1/2	0	1	9	6
z	3	0	-2	0	0	0	

Nové řešení je opět degenerované, ale stále není optimální. Graficky jsme zůstali v bodě A (stagnaci způsobila právě degenerace). Novou vstupující proměnnou je x_1, která jediná porušuje test optima. Vystupující proměnnou je podle nejmenšího poměru t_i proměnná x_4. Klíčový prvek má opět hodnotu 2 a standardně transformujeme tabulku.

proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	-1/4	3/4	0	3
x_1	1	0	-1/2	1/2	0	2
x_5	0	0	1/4	-3/4	1	6
z	0	0	-1/2	-3/2	0	-6

Nyní jsou již všechny koeficienty v řádce z nekladné, řešení je duálně přípustné, a tedy i optimální. Graficky jsme se posunuli z bodu A do bodu B.

$$\mathbf{x}^{opt} = (2, 3, 0, 0, 6)^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{u}^{opt} = (1/2, 3/2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$$
$$z^{opt} = -6$$

Ke stejnému závěru jsme došli i při grafickém řešení.

f) Ověřte výsledky z bodu *c* a *d* graficky.

Výpočty v části d) a e) odpovídají grafickým výsledkům v části c).