Cvičení 7 – Dualita a duálně simplexová metoda (řešení)

Příklad 3 – Duálně simplexová metoda
Uvažujte následující úlohu lineárního programování:

$$
\begin{aligned}
-1/2x_1 + x_2 &\le 3 \\
-3/2x_1 + x_2 &\ge 1 \\
-2/3x_1 + x_2 &= 2 \\
x_j &\ge 0,\ j = 1, 2 \\
z = 4x_1 + 5x_2 &\ \ldots \text{min.}
\end{aligned}
$$

a) Formulujte symetrickou a nesymetrickou duální úlohu.
b) Ověřte podle věty o dualitě a rovnováze, zda řešení x = $(0, 2)^T$ a u = $(0, 0, -5)^T$ jsou optimálními řešeními primární a duální úlohy.
c) Nalezněte optimální řešení primární i duální úlohy duálně simplexovou metodou.

<u>Řešení:</u>

a) Formulujte symetrickou a nesymetrickou duální úlohu

Úlohu nejprve převedeme do vybraného standardního tvaru (např. na maximalizaci s vlastními omezeními ve tvaru ≤).

Primární problém – zadání	Primární problém – standardní tvar
$z = 4x_1 + 5x_2 \ \ldots \text{min}$	$z = -4x_1 - 5x_2 \ \ldots \text{max}$
$-1/2\,x_1 + x_2 \le 3$ $-3/2\,x_1 + x_2 \ge 1$ $-2/3\,x_1 + x_2 = 2$	$-1/2\,x_1 + x_2 \le 3$ $3/2\,x_1 - x_2 \le -1$ $-2/3\,x_1 + x_2 \le 2$ $2/3\,x_1 - x_2 \le -2$
$x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$	$x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$

Dále formulujeme standardním způsobem symetrickou duální úlohu.

I. Primární problém – standardní tvar	II. Symetrický duální problém
$z = -4x_1 - 5x_2 \;\ldots\max$	$f = 3u_1 - u_2 + 2u_3 - 2u_4 \;\ldots\min$
$-1/2\,x_1 + x_2 \leq 3$ $3/2\,x_1 - x_2 \leq -1$ $-2/3\,x_1 + x_2 \leq 2$ $2/3\,x_1 - x_2 \leq -2$	$u_1 \geq 0$ $u_2 \geq 0$ $u_3 \geq 0$ $u_4 \geq 0$
$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$	$-1/2\,u_1 + 3/2\,u_2 - 2/3\,u_3 + 2/3\,u_4 \geq -4$ $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \geq -5$

Podobně bychom formulovali nesymetrickou duální úlohu.

I. Primární problém – standardní tvar	II. Nesymetrický duální problém
$z = -4x_1 - 5x_2 \;\ldots\max$	$f = 3u_1 - u_2 + 2u_3 \;\ldots\min$
$-1/2\,x_1 + x_2 \leq 3$ $3/2\,x_1 - x_2 \leq -1$ $-2/3\,x_1 + x_2 = 2$	$u_1 \geq 0$ $u_2 \geq 0$ u_3 – libovolné
$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$	$-1/2\,u_1 + 3/2\,u_2 - 2/3\,u_3 \geq -4$ $u_1 - u_2 + u_3 \geq -5$

b) Ověřte podle věty o dualitě a rovnováze, zda řešení x = $(0, 2)^T$, $u^T = (0, 0, -5)$ jsou optimálními řešeními primární a duální úlohy.

Věta o dualitě

Podle prvního důsledku věty o dualitě musí být vektory **x** a $\mathbf{u}^T$ přípustným řešením úlohy LP. Složky vektoru **x** = $(0\,,2)^T$, u_1 *a* u_2 splňují podmínky nezápornosti. Dosazením do soustavy omezení zjistíme, že vektory **x** a $\mathbf{u}^T$ jsou přípustným řešením primární, resp. Duální úlohy.

$$-1/2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 < 3 \qquad\qquad -1 \cdot 0 + 3/2 \cdot 0 - 2/3 \cdot (-5) > -4$$
$$3/2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 < -1 \qquad\qquad 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) = -5$$
$$-2/3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$$

Vzhledem k tomu, že platí rovnost $z(\boldsymbol{x}) = -10 = f(\boldsymbol{u})$, jsou tedy optimálními řešeními obou sdružených úloh.

Věta o rovnováze

$2 < 3$	splněno jako <	$u_1 = 0$	splněno jako =
$-2 < -1$	splněno jako <	$u_2 = 0$	splněno jako =
$-2 < -1$	splněno jako =	$u_3 = -5$ – libovolné	splněno jako <
$x_1 = 0$	splněno jako =	$10/3 > -4$	splněno jako >
$x_2 = 2 > 0$	splněno jako >	$-5 = -5$	splněno jako =

Podle testu v tabulce splňují vektory $\mathbf{x} = (0\,,2)^{\mathrm{T}}$ a $\mathrm{u}^{\mathrm{T}} = (0\,,0,-5)$ podmínky věty o rovnováze, takže jsou optimálním řešením obou sdružených úloh.

c) Nalezněte optimální řešení primární i duální úlohy duálně simplexovou metodou.

Pro řešení můžeme použít např. primární problém ve standardním tvaru. Výchozí řešení maximalizační úlohy je duálně přípustné, protože v anulované účelové funkci jsou všechny koeficienty nezáporné. Je ale primárně nepřípustné, takže je možno úlohu řešit duálně simplexovou metodou.

proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	-1/2	1	1	0	0	0	3
x_4	3/2	-1	0	1	0	0	-1
x_5	-2/3	1	0	0	1	0	2
x_6	2/3	-1	0	0	0	1	-2
z_j	4	5	0	0	0	0	0
t_j	8	5	x	x	x	x	x

proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	1/6	0	1	0	0	0	1
x_4	5/6	0	0	1	0	-1	1
x_5	0	0	0	0	1	1	0
x_2	-2/3	1	0	0	0	-1	2
z_j	22/3	0	0	0	0	5	-10

V první iteraci zvolíme podle g = min (3, −1,2, −2) = −2 vystupující proměnnou x_6. Klíčový řádek je čtvrtý. Podle podílů t_j koeficientů v řádce účelové funkce z_j a koeficientů v klíčovém řádku a_{qj} je vstupující proměnná x_2 a klíčový sloupec je druhý. Ve následující iteraci jsou všechny pravé strany nezáporné, řešení je tedy také primárně přípustné a tudíž optimální. Můžeme vypsat optimální řešení této primární i duální úlohy.

$$\mathbf{x}^* = (0,2,1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, z^{opt} = -10$$

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} = \left(0,0,0,5,{}^{22}\!/_{3},0\right), f = -10$$

Nyní již stačí přepsat řešení do tvaru, který odpovídá původnímu zadání úlohy.
Primární úloha měla dvě strukturní proměnné a tři omezení, přičemž třetí bylo ve tvaru rovnosti.
Optimální řešení bude tedy:

$$\mathbf{x}^{opt} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} = (0, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}, z^{opt} = -10$$

Podobně upravíme optimální řešení duální úlohy. To má tolik strukturních duálních proměnných, kolik měla primární úloha vlastních omezení, tedy tři (viz nesymetrický duál), přičemž ze symetrického duálu je vidět, že třetí duální proměnná vznikne rozdílem $u_3 - u_4 = 0 - 5 = -5$. Všimněme si, že duální proměnná, která odpovídá rovnici v primární úloze, může být záporná. Dále obsahuje řešení duální úlohy dvě přídatné proměnné (redukované ceny), a proto tedy bude mít tvar:

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} = (0, 0, -5, 22/3\,, 0), f = -10$$

Zároveň můžeme potřetí potvrdit, že řešení zadaná v bodě b) jsou opravdu optimálními řešeními obou duálně sdružených úloh.