Cvičení 8 – Postoptimalizační analýza (řešení)

Příklad 1 – Analýza citlivosti

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\leq 240 \\
4x_1 + x_2 &\leq 240 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\
x_j &\geq 0, \; j = 1, 2 \\
z = 170x_1 + 130x_2 &\dots \max.
\end{aligned}
$$

Tato úloha má inverzní matici báze optimálního řešení:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}
$$

Dále víme, že x_2 je základní proměnnou ve výsledné simplexové tabulce.

a) Sestavte výslednou simplexovou tabulku.
b) Určete interval stability pro b_2.
c) Určete interval stability pro c_2.
d) Určete interval stability pro c_1. Lze výpočet zjednodušit?

Řešení:

a) Sestavte výslednou simplexovou tabulku

proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	– 5/2	0	1	0	– 3/2	60
x_4	5/2	0	0	1	– 1/2	180
x_2	3/2	1	0	0	1/2	60
z_j	25	0	0	0	65	7800

b) Určete interval stability pro b_2.

1. možnost – přímý výpočet

Sestavíme soustavu nerovnic zajišťující primární přípustnost řešení.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 240 \\ b_2 \\ 120 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Po rozepsání:

$$
\begin{aligned}
240 - 3/2 \cdot 120 = 60 &\geq 0 \\
b_2 - 1/2 \cdot 120 = b_2 - 60 &\geq 0 \\
1/2 \cdot 120 = 60 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Vznikla jediná relevantní podmínka (první i třetí podmínka platí bez ohledu na b_2): $b_2 - 60 \geq 0$, neboli $b_2 \geq 60$. Odtud získáme přímo hledaný interval stability $b_2 \in \langle 60, \infty)$.

2. možnost – přírůstek pravé strany

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -3/2\\0 & 1 & -1/2\\0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\\Delta b_2\\0\end{bmatrix}\geq-\begin{bmatrix}60\\180\\60\end{bmatrix}$$

Po rozepsání:

$$0 \geq -60$$
$$\Delta b_2 \geq -180$$
$$0 \geq -60$$

Vznikla jediná relevantní podmínka: $\Delta b_2 \geq -180$, neboli $\Delta b_2 \in \langle -180, \infty)$. Protože $b_2 = 240$, je hledaný interval stability $b_2 \in \langle 60, \infty)$.

c) Určete interval stability pro c_2.

1. možnost – přímý výpočet

Sestavíme soustavou nerovnic zajišťující duální přípustnost řešení.

$$[0 \quad 0 \quad c_2]\cdot\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2}\\\frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}-[170 \quad c_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\geq[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Po rozepsání:

$$\frac{3}{2}\cdot c_2-170\geq 0$$
$$c_2-c_2\geq 0$$
$$0 \geq 0$$
$$0 \geq 0$$
$$1/2\cdot c_2 \geq 0$$

Dostáváme dvě relevantní podmínky.
Z první vyplývá $c_2 \geq 340/3$ a páté $c_2 \geq 0$. Protože obě podmínky musí platit současně, $c_2 \geq 340/3$, neboli hledaný interval stability je $c_2 \in \langle 340/3, \infty)$ či $c_2 \in \langle 113.\overline{3}, \infty)$.

2. možnost – přírůstek ceny

Sestavíme soustavou nerovnic pro proměnnou x_2, která je základní proměnnou ve třetím řádku.

$$[0 \quad 0 \quad \Delta c_2]\cdot\begin{bmatrix}-5/2 & 0 & 1 & 0 & -3/2\\5/2 & 0 & 0 & 1 & -1/2\\3/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\geq-[25 \quad \Delta c_2 \quad 0 \quad 0 \quad 65]$$

Po rozepsání:

$$3/2\cdot\Delta c_2 \geq -25$$
$$\Delta c_2 \geq \Delta c_2$$

$$0 \geq 0$$
$$0 \geq 0$$
$$1/2 \cdot \Delta c_2 \geq -65$$

Dostáváme dvě relevantní podmínky.
Z první vyplývá $\Delta c_2 \geq -50/3$ a páté $\Delta c_2 \geq -130$. Protože obě podmínky musí platit současně, $\Delta c_2 \geq -50/3$, neboli $\Delta c_2 \in \langle -50/3, \infty)$. Protože $c_2 = 130$, je hledaný interval stability $c_2 \in \langle 340/3, \infty)$, neboli $c_2 \in \langle 113.\overline{3}, \infty)$.

d) Určete interval stability pro c_1. Lze výpočet zjednodušit?

Použít bychom samozřejmě mohli opět postup uvedený v části c). Pokud si ale uvědomíme, že počítáme interval stability cenového koeficientu nezákladní proměnné, lze výpočet zjednodušit, a tak významně urychlit.

Proměnná x_1 je nezákladní, její hodnota je tedy nulová. Z ekonomického pohledu není realizace příslušného procesu výhodná (cenový koeficient je příliš nízký).

Ze simplexové tabulky optimálního řešení snadno přečteme, že redukovaná cena pro proměnnou x_1 je 25. Ekonomická interpretace této hodnoty říká, že dokud se cenový koeficient nezvýší alespoň o 25, tento proces bude stále nevýhodný (a tedy nedojde ke změně báze). Cena x_1 je nyní $c_1 = 170$. Proces tedy bude nevýhodný (a proměnná bude základní) až dokud cena nepřesáhne $170 + 25 = 195$.

Hledaný interval stability je tedy $c_1 \in (\infty, 195\rangle$. Ke stejnému závěru bychom došli i použitím postupu z části c).