Cvičení 8 – Postoptimalizační analýza (řešení)

Příklad 4 – Postoptimalizační analýza – opakování

Jak by se změnilo optimální řešení, kdybychom k zadání Příkladu 1 přidali

a) omezení $x_1 + x_2 \geq 30$
b) omezení $x_1 + x_2 \geq 100$
c) omezení $x_1 + x_2 \leq 50$
d) proměnnou w se strukturními koeficienty $a_w = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$ a cenou $c_w = 200$
e) proměnnou w se strukturními koeficienty $a_w = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$ a cenou $c_w = 180$

<u>Řešení:</u>

Příklad 1 má optimální řešení **x** = (0, 60, 60, 180, 0)$^{\mathrm{T}}$, kterému odpovídá následující simplexová tabulka.

proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	−5/2	0	1	0	−3/2	60
x_4	5/2	0	0	1	−1/2	180
x_2	3/2	1	0	0	1/2	60
z_j	25	0	0	0	65	7800

a) Omezení $x_1 + x_2 \geq 30$

Stávající optimální řešení příkladu 1 je **x** = (0, 60, 60, 180, 0)$^{\mathrm{T}}$. Dosazením do nového omezení zajistíme, že stávající řešení splňuje toto nové omezení, neboť $0 + 60 \geq 30$. Nové omezení je tedy redundantní (nepodstatné) a nijak neovlivní současné optimální řešení.

b) Omezení $x_1 + x_2 \geq 100$

Je evidentní, že stávající řešení této podmínce nevyhovuje, protože po dosazení platí, že $0 + 60 = 60 \ngeq 100$. Nové omezení přenásobíme (-1), čímž změníme typ nerovnosti, přičteme přídatnou proměnnou a eliminační metodou (přičtením řádku simplexové tabulky pro základní proměnnou x_2) upravíme nové omezení tak, aby ve sloupcích základních proměnných byly nulové koeficienty. Výsledkem je transformované omezení:

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5 + x_6 = -40$$

Pravá strana v novém omezení je záporná, pokračujeme ve výpočtu duálně simplexovou metodou.

proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	−5/2	0	1	0	−3/2	0	60
x_4	5/2	0	0	1	−1/2	0	180
x_2	3/2	1	0	0	1/2	0	60
x_6	1/2	0	0	0	1/2	1	−40
z_j	25	0	0	0	65	0	7800

Vzhledem k tomu, že jsou všechny koeficienty klíčového řádku nezáporné, nemá primární úloha přípustné řešení. Přidáním omezení tedy vznikne neřešitelná úloha.

c) Omezení $x_1 + x_2 \leq 50$

Je evidentní, že stávající řešení také této podmínce nevyhovuje, protože $0 + 60 = 60 \nleq 50$. V novém omezení přičteme přídatnou proměnnou a eliminační metodou (odečtením řádku simplexové tabulky pro základní proměnnou x_2) upravíme nové omezení tak, aby ve sloupcích základních proměnných byly nulové koeficienty. Výsledkem je transformované omezení:

$$-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 = -10$$

Pravá strana v novém omezení je záporná, pokračujeme ve výpočtu duálně simplexovou metodou.

proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	$-5/2$	0	1	0	$-3/2$	0	60
x_4	$5/2$	0	0	1	$-1/2$	0	180
x_2	$3/2$	1	0	0	$1/2$	0	60
x_6	$-1/2$	0	0	0	$-1/2$	1	-10
z_j	25	0	0	0	65	0	7800

proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	0	0	1	0	1	-5	110
x_4	0	0	0	1	-3	5	130
x_2	0	1	0	0	-1	3	30
x_1	1	0	0	0	1	-2	20
z_j	0	0	0	0	40	50	7300

Optimální řešení jsme vypočetli ve druhé iteraci $\mathbf{x}^{opt} = (20, 30, 110, 130, 0, 0)^T$ *a* $\mathbf{z} = 7300$.

d) Proměnnou w se strukturními koeficienty $a_w = (1, 2, 3)^T$ a cenou $c_w = 200$

Spočítáme transformovaný vektor strukturních koeficientů a odpovídající koeficient v řádce účelové funkce (redukovanou cenu):

$$\alpha_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$z_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 65 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 200 = -5$$

Vzhledem k tomu, že koeficient z_w je záporný, je porušena optimalita řešení, nová proměnná je výhodná. Ve výpočtu je třeba pokračovat simplexovou metodou.

proměnné	x_1	x_2	w	x_3	x_4	x_5	b_i	t
x_3	$-5/2$	0	$-7/2$	1	0	$-3/2$	60	x
x_4	$5/2$	0	$1/2$	0	1	$-1/2$	180	360
x_2	$3/2$	1	$3/2$	0	0	$1/2$	60	40
z_j	25	0	-5	0	0	65	7800	x

proměnné	x_1	x_2	w	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	$7/3$	0	1	0	$-1/3$	200
x_4	2	$-1/3$	0	0	1	$-2/3$	160
w	1	$2/3$	1	0	0	$1/3$	40
z_j	30	$10/3$	0	0	0	$200/3$	8000

Optimální řešení jsme vypočetli ve druhé iteraci $\mathbf{x}^{opt} = (0, 0, 40{,}200, 160{,}0\ )^{\mathrm{T}}\ a\ \mathbf{z} = 8000.$

e) Proměnnou w se strukturními koeficienty a_w = (1 , 2, 3)$^{\mathrm{T}}$ a cenou c_{w} = 180

Opět spočítáme transformovaný vektor strukturních koeficientů a odpovídající koeficient v řádce účelové funkce (redukovanou cenu):

$$\alpha_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$z_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 65 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 180 = 15$$

Vzhledem k tomu, že koeficient z_w není záporný, není nová proměnná výhodná a optimální řešení není přidáním nové proměnné nijak ovlivněno.