4EK213 – Lineární modely

1. Úvod do LP

Mgr. Jana SEKNIČKOVÁ, Ph.D.

- Nová budova, místnost 433
- Konzultační hodiny – InSIS
- E-mail: jana.seknickova@vse.cz
- Web: jana.seknicka.eu/vyuka

- **Garant a přednášející kurzu: prof. Ing. Josef Jablonský, CSc.**
- Nová budova, místnost 437
- Konzultační hodiny – InSIS
- E-mail: jablon@vse.cz
- Omluvy předmětu bez udání důvodu do konce března / října

Literatura, hodnocení

- **Doporučená literatura:**
- Lagová M., Jablonský J.: *Lineární modely*
- **Hodnocení (dle ECTS):**
- 1. průběžný test ve 4. týdnu na cvičení – 10 bodů
- 2. průběžný test cca v 10. týdnu – 14 bodů
- Práce na cvičení – 6 bodů
- Seminární práce – 6 bodů
- Aktivita na přednáškách – kahoot – 4 body
- Zkouškový test – 40 bodů + ústní zkouška – 20 bodů
- Na posledním termínu nelze získat 4+

Body	Známka
90-100	1
75-89	2
60-74	3
50-59	4+
0-49	4

1.1 Příklad – ekonomický model

- Firma vyrábí šroubky a matice
- Šroubky i matice jsou lisovány – vylisování krabičky šroubků trvá 1 minutu, krabička matic je lisována 2 minuty
- Šroubky i matice firma balí do krabiček, ve kterých je pak prodává - krabička šroubků se balí 1 minutu, krabička matic 4 minuty
- Firma má k dispozici 2 hodiny času pro lisování a 3 hodiny času pro balení výrobků

1.1 Příklad – ekonomický model

- Vzhledem k poptávce je třeba vyrobit alespoň o 90 krabiček šroubků více než krabiček matic
- Z technických důvodů nelze vyrobit více než 110 krabiček šroubků
- Zisk z jedné krabičky šroubků je 40 Kč,
  z jedné krabičky matic 60 Kč
- Firma nemá potíže s odbytem výrobků
- **Kolik krabiček šroubků a matic má firma vyrobit, chce-li dosáhnout maximálního zisku?**

1.1 Příklad – ekonomický model

Procesy	**Jednotky**
Výroba šroubků (Š)	1 krabička (kr.)
Výroba matic (M)	1 krabička
Činitelé na straně vstupu	
Čas na lisu	1 min.
Čas pro balení	1 min.
Činitelé na straně výstupu	
Vztah počtu KŠ a KM	1 krabička
Max. počet KŠ	1 krabička
Cíl	
Maximální zisk	Kč

1.1 Příklad – kvantitativní vztahy

	Šroubky	Matice	Kapacita	Jednotky
Jednotky	[krabička]	[krabička]		
Lis	1 [min./kr.]	2 [min./kr.]	2	[hod.]
Balení	1 [min./kr.]	4 [min./kr.]	3	[hod.]
Zisk	40 [Kč/kr.]	60 [Kč/kr.]		[Kč]

- Kapacitu lisu a balicí linky bude třeba převést na srovnatelné jednotky

1.1 Příklad – matematický model

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq \;\; 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

1.1 Příklad – srovnání EM a MM

Ekonomický model:

- **Procesy**
  - Výroba Š [KŠ]
  - Výroba M [KM]
- **Činitelé**
  - Čas na lisu [min.]
  - Čas balení [min.]
  - Poptávka [krabičky]
  - Max. KŠ[krabičky]
- **Cíl**
  - Maximální zisk [Kč]

Matematický model:

- **Proměnné**
  - x_1 [KŠ]
  - x_2 [KM]
- **Omezení**
  - spotřeba ≤ 120 [min.]
  - spotřeba ≤ 180 [min.]
  - KŠ – KM ≥ 90 [krabičky]
  - KŠ ≤ 110 [krabičky]
- **Účelová funkce**
  - Maximální zisk [Kč]

1.2 Matematický model úlohy LP

- Nalézt **extrém účelové funkce**

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

na soustavě vlastních omezení

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \mathbf{R}\ b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \mathbf{R}\ b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \mathbf{R}\ b_3$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \mathbf{R}\ b_m$$

za podmínek nezápornosti

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$$
$$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$$
$$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$$
$$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max\ [\text{Kč}]$$

1.2 Matematický model úlohy LP

- kde je

x_j ... **proměnná** modelu **(strukturní)**

a_{ij} ... **strukturní koeficient**

b_i ... **pravá strana** i-tého omezení

c_j ... **cenový koeficient** j-té proměnné (cena)

$\mathbf{R}$ ... jedno z relačních znamének ≤, ≥, =

n ... počet strukturních proměnných modelu

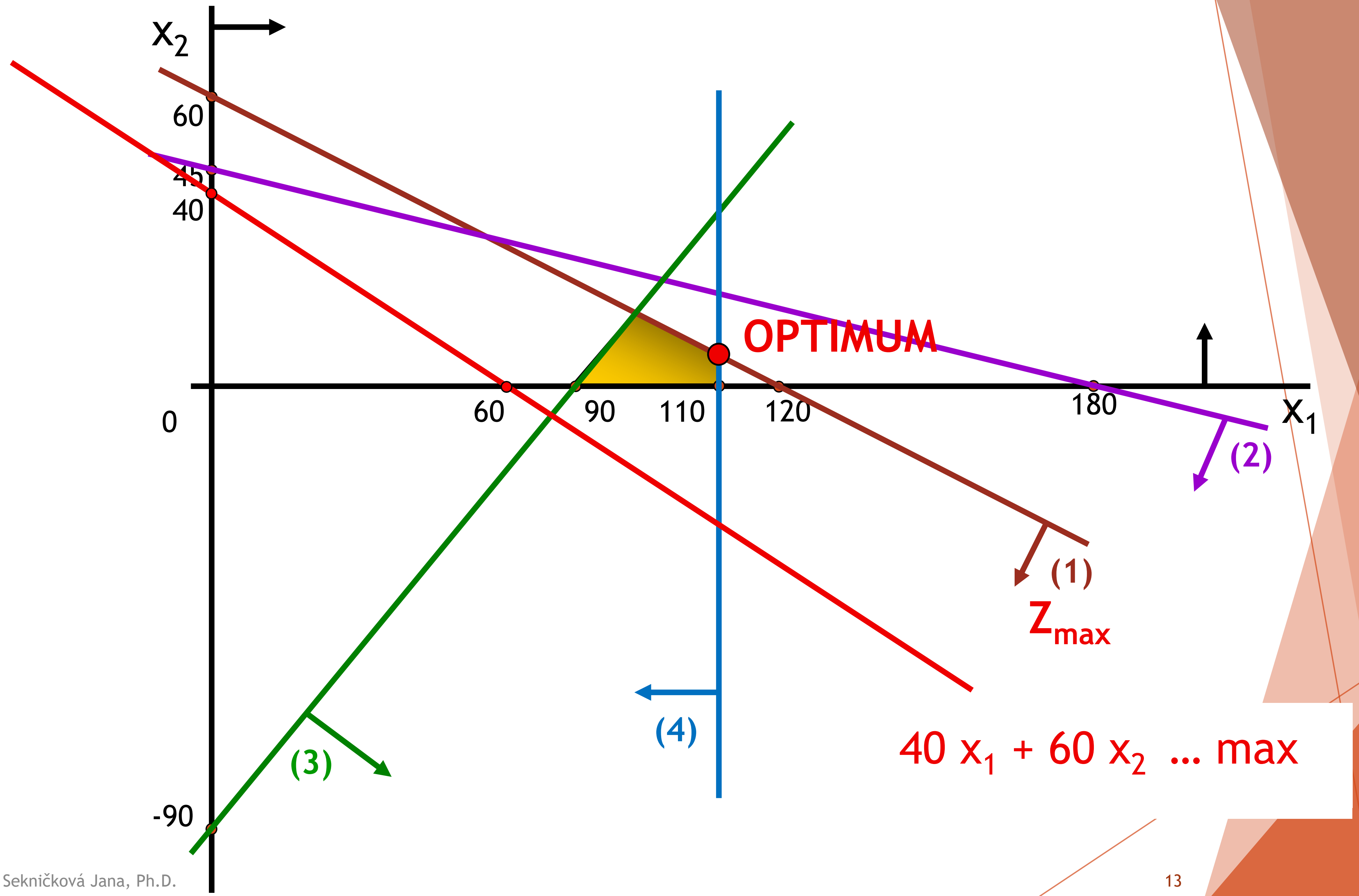
m ... počet vlastních omezení modelu

$$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

1.3 Grafické řešení úlohy LP

Jednoduchou úlohu vyřešíme **graficky**:

- zvolíme **souřadnicový systém** os x_1 a x_2
- znázorníme všechna **omezení** modelu
- najdeme jejich **průnik** v prvním kvadrantu
- znázorníme **účelovou funkci**
- rovnoběžně ji posuneme tak, aby se dotkla průniku množin (shora nebo zdola)
- v bodě (popř. bodech) dotyku účelové funkce a množiny přípustných řešení je **optimální řešení**


x2
60
45
40
0
-90
60
90
110
120
180
x1
OPTIMUM
(1)
(2)
(3)
(4)
Zmax
40 x1 + 60 x2 … max

1.3 Grafické řešení úlohy LP

- **Optimální řešení** zadané úlohy leží na průsečíku dvou hraničních přímek omezení (1) a (4):

$$x_1 + 2x_2 = 120$$
$$x_1 \qquad = 110$$

- Odtud je $x_1 = 110, x_2 = 5$
- Bod optimálního řešení je tedy

$$\mathbf{x}^* = [110, 5]$$

- Hodnota účelové funkce je po dosazení

$$z = 40x_1 + 60x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 5 = 4700$$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [min]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2$ ... max [Kč]

1.4 Interpretace řešení úlohy LP

- **Ekonomická interpretace optimálního řešení**

  $x_1 = 110, x_2 = 5, z = 4700$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krab.]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

- Vyrobíme 110 krabiček šroubků
- Vyrobíme 5 krabiček matic
- Celkový zisk bude 4700 Kč
- Kolik spotřebujeme času na lisu?
  - Lis bude v provozu $1\,x_1 + 2\,x_2 = 1 \cdot 110 + 2 \cdot 5 = 120$ minut.
- Kolik zbyde času na lisu?
  - Na lisu zbyde $120 - (1\,x_1 + 2\,x_2) = 120 - 120 = 0$ minut.

1.4 Interpretace řešení úlohy LP

- **Ekonomická interpretace optimálního řešení**

  $x_1 = 110, x_2 = 5, z = 4700$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krab.]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

- Kolik spotřebujeme času na balení?
  - 130 minut.
- Kolik zbyde času na balení (jaká je rezerva)?
  - Na balení zbyde $180 - (1\,x_1 + 4\,x_2) = 180 - 130 = 50$ minut.

1.4 Interpretace řešení úlohy LP

- **Ekonomická interpretace optimálního řešení**

  $x_1 = 110, x_2 = 5, z = 4700$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krab.]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2$ ... max [Kč]

- O kolik šroubků vyrobíme více než matic?
  - O 105 krabiček.
- Jaká je rezerva v poptávce?
  - Rezerva je $(1\,x_1 - 1\,x_2) - 90 = 105 - 90 = 15$ krabiček.

1.4 Interpretace řešení úlohy LP

- **Ekonomická interpretace optimálního řešení**

  $x_1 = 110, x_2 = 5, z = 4700$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krab.]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

- Kolik šroubků vyrobíme?
  - 110 krabiček.
- Jaká je technologická rezerva?
  - Rezerva je $110 - (1\,x_1 + 0\,x_2) = 110 - 110 = 0$ krabiček.

1.4 Interpretace řešení úlohy LP

- Vypočtené rezervy jsou ekonomickou interpretací tzv. přídatných proměnných.
- Metody pro řešení úloh lineárního programování pracují s řešením soustavy rovnic, nikoliv se soustavou nerovnic.

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [min]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]

Zisk: $z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 120 \text{ [min]} \\
1\,x_1 + 4\,x_2 + x_4 &= 180 \text{ [min]} \\
1\,x_1 - 1\,x_2 - x_5 &= 90 \text{ [krabiček]} \\
1\,x_1 + 0\,x_2 + x_6 &= 110 \text{ [min]} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$z - 40\,x_1 - 60\,x_2 = 0 \ldots \max \text{ [Kč]}$$

1.4 Interpretace řešení úlohy LP

- Strukturní proměnné:
  - $x_1 = 110$
  - $x_2 = 5$
- Přídatné proměnné:
  - $x_3 = 0$
  - $x_4 = 50$
  - $x_5 = 15$
  - $x_6 = 0$
- Optimální řešení: $\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^{\mathrm{T}}$

  $z = 4700$

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 120\ [\mathrm{min}] \\
1\,x_1 + 4\,x_2 \quad + x_4 \qquad &= 180\ [\mathrm{min}] \\
1\,x_1 - 1\,x_2 \qquad\quad - x_5 \quad &= \ \ 90\ [\mathrm{krabiček}] \\
1\,x_1 + 0\,x_2 \qquad\qquad + x_6 &= 110\ [\mathrm{min}] \\
\\
z - 40\,x_1 - 60\,x_2 = 0 \ldots \max\ [\mathrm{Kč}] &
\end{aligned}
$$

1.5 Základní přípustná řešení

- **Výpočet základních přípustných řešení:**
- Bod A: (3) + ($x_2 \geq 0$) $\quad A = [\ 90, 0],\quad \mathbf{x} = (90, \mathbf{0}, 30, 90, \mathbf{0}, 20)^{\mathrm{T}}$
- Bod B: (4) + ($x_2 \geq 0$) $\quad B = [110, 0],\quad \mathbf{x} = (110, \mathbf{0}, 10, 70, 20, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$
- Bod C: (1) + (4) $\quad C = [110, 5],\quad \mathbf{x} = (110, 5, \mathbf{0}, 50, 15, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$
- Bod D: (1) + (3) $\quad D = [100, 10],\quad \mathbf{x} = (100, 10, \mathbf{0}, 40, \mathbf{0}, 10)^{\mathrm{T}}$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [min]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \quad\quad\quad\quad &= 120 \text{ [min]} \\
1\,x_1 + 4\,x_2 \quad + x_4 \quad\quad\quad &= 180 \text{ [min]} \\
1\,x_1 - 1\,x_2 \quad\quad - x_5 \quad &= \ 90 \text{ [krabiček]} \\
1\,x_1 + 0\,x_2 \quad\quad\quad + x_6 &= 110 \text{ [min]} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

1.5 Základní PŘ a ZVLP

- **Výpočet základních přípustných řešení:**
- $A = [\ 90, 0]$, $\mathbf{x} = (90, \mathbf{0}, 30, 90, \mathbf{0}, 20)^T$
- $B = [110, 0]$, $\mathbf{x} = (110, \mathbf{0}, 10, 70, 20, \mathbf{0})^T$
- $C = [110, 5]$, $\boxed{\mathbf{x} = (110, 5, \mathbf{0}, 50, 15, \mathbf{0})^T}$
- $D = [100, 10]$, $\mathbf{x} = (100, 10, \mathbf{0}, 40, \mathbf{0}, 10)^T$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [min]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

- $z_A = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 90 + 60 \cdot 0 = 3600$
- $z_B = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 0 = 4400$
- $z_C = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 5 = \boxed{4700}$
- $z_D = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 100 + 60 \cdot 10 = 4600$

Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^T$$
$$z = 4700$$

1.6 Typické úlohy LP

- Úlohy výrobního plánování (alokace zdrojů)
- Úlohy finančního plánování (optimalizace portfolia)
- Úlohy reklamního plánování (plánování reklamy)
- Směšovací problémy
- Nutriční problém (spec. případ směšovacího problému)
- Úlohy o dělení materiálu (řezné problémy)
- Rozvrhování pracovníků
- Distribuční úlohy (dopravní problém a další)

1.6 Typické úlohy LP

1. Úlohy výrobního plánování (alokace zdrojů)

- Jsou dány výrobky, které lze vyrábět, a struktura výroby. Úkolem je určit druh a množství výrobků, které se budou vyrábět.
- **Proměnné:** vyráběné druhy výrobků (hodnoty určují množství vyráběného výrobku)
- **Omezení:** omezené kapacity surovin na straně vstupů, nutnost dodržet požadavky na straně výstupů
- **Cíl:** obvykle maximalizace zisku, tržeb nebo množství výrobků, popř. minimalizace nákladů apod.

1.6 Typické úlohy LP

2. Úlohy finančního plánování (optimalizace portfolia)

- Jsou dány různé investiční varianty s příslušnými parametry. Úkolem je určit objem investic do jednotlivých investičních variant.
- **Proměnné:** investiční varianty (hodnoty určují objemy investic do daných variant)
- **Omezení:** limity pro jednotlivé typy investic, celková investovaná částka, zajištěný výnos či maximální výše rizika, apod.
- **Cíl:** obvykle maximalizace výnosu nebo minimalizace rizika

1.6 Typické úlohy LP

3. Úlohy plánování reklamy (media selection problem)

- Jsou dána různá reklamní média s příslušnými parametry. Úkolem je určit objem investic do jednotlivých médií, případně určit časové okno, do kterého má být reklama umístěna.
- **Proměnné:** umístění reklamy do daného média (hodnoty určují objemy investic nebo počty opakování)
- **Omezení:** celková investovaná částka, oslovení cílové skupiny, reklamní strategie, apod.
- **Cíl:** obvykle maximalizace reklamních ukazatelů (kolik oslovíme diváků, kolikrát je divák osloven, apod.)

2.8 Typické úlohy LP

4. Směšovací úlohy

- Je dána nabídka složek (komponent) s příslušnými parametry uvádějícími většinou složení. Úkolem je vytvořit směs požadovaných vlastností.
- **Proměnné:** jednotlivé složky (hodnoty určují množství použitých složek)
- **Omezení:** vlastnosti celkové směsi (zejména složení – často v %, celková váha, apod.)
- **Cíl:** obvykle minimalizace nákladů

1.6 Typické úlohy LP

5. Nutriční problémy (speciální případ směšovacích)

- Je dána nabídka složek (jídel) s příslušnými parametry uvádějícími většinou složení. Úkolem je vytvořit jídelníček požadovaných vlastností.
- **Proměnné:** jednotlivá jídla (hodnoty určují množství zahrnutého jídla)
- **Omezení:** vlastnosti jídelníčku (zejména množství bílkovin, vitamínů, apod.)
- **Cíl:** obvykle minimalizace ceny

1.6 Typické úlohy LP

6. Úlohy o dělení materiálu (řezné problémy)

- Úkolem je rozdělit větší celky (v úlohách LP jednorozměrné, např. prkna, trubky, role, pásy, apod.) na menší.
- **Proměnné:** jednotlivé způsoby dělení větších celků na menší (hodnoty určují počet opakování jednotlivých způsobů či počet větších celků, které budou děleny příslušnými způsoby)
- **Omezení:** většinou množství menších celků (i poměrově)
- **Cíl:** obvykle minimalizace odpadu nebo spotřebovaného materiálu

1.6 Typické úlohy LP

6. Úlohy o dělení materiálu - příklad

- Na vnitřní dřevěné obložení chaty je třeba:
  - maximálně 120 ks prken délky 35 cm
  - 180 až 330 ks prken délky 120 cm
  - alespoň 30 ks prken délky 95 cm
- Koupit lze jen prkna délky 4 metry
- Celkový odpad nesmí být větší než 360 cm
- Náklady na koupi prken musí být minimální

Řezné schéma

Způsob	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
120 cm	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0
95 cm	0	1	0	2	1	0	4	3	2	1	0
35 cm	1	1	4	2	5	8	0	3	6	8	11
Odpad	5	30	20	20	10	0	20	10	0	25	15

Pozn.: Řezné schéma je vhodné uspořádat tak, aby způsoby řezání i nařezané kusy byly seřazeny podle velikosti

1.6 Typické úlohy LP

7. Rozvrhování pracovníků

- Úkolem je rozdělit pracovníky do jednotlivých časových oken (směn) s ohledem na související požadavky.
- **Proměnné:** přiřazení konkrétních pracovníků na konkrétní směny (hodnoty určují, zda je pracovník na konkrétní směnu přiřazen – 1, nebo není přiřazen - 0)
- **Omezení:** kvalifikace pracovníků, počet pracovníků, apod.
- **Cíl:** obvykle minimalizace nákladů, časových prodlev nebo celkového počtu pracovníků

1.6 Typické úlohy LP

8. Distribuční úlohy

- Úkolem celé velké skupiny distribučních úloh je zajistit distribuci čehokoliv (např. zboží) z jedné oblasti (např. dodavatelé) do druhé oblasti (např. odběratelé).
- **Proměnné:** přiřazení jednotky z první skupiny k jednotce z druhé skupiny (např. doprava od daného dodavatele k danému odběrateli), hodnoty určují, zda k přiřazení dojde či ne (0/1) nebo jak intenzivní přiřazení je (množství převáženého zboží)
- **Omezení:** kapacity a požadavky
- **Cíl:** obvykle minimalizace nákladů

Detaily k přednášce: skripta, kapitoly 1 a 2

KONEC