4EK213 – LINEÁRNÍ MODELY

Úterý 11:00 – 12:30 hod.

učebna SB 324

3. přednáška
SIMPLEXOVÁ METODA I.

OSNOVA PŘEDNÁŠKY

- Standardní tvar MM
- Základní věta LP
- Princip simplexové metody
- Výchozí řešení SM
- Zlepšení řešení
- Transformace
- Simplexová tabulka

STANDARDNÍ TVAR MM

- Na soustavě vlastních omezení a podmínek nezápornosti najít maximum účelové funkce *z*:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad (3.1)$$
$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

(viz 2. přednáška)

- Soustava rovnic v (3.1) má stejné řešení jako soustava nerovnic (2.1)
- Mluvíme proto o ní jako o **ekvivalentní soustavě rovnic**

kde je:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}$

... **vektor strukturních a přídatných proměnných,**

$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m.(n+n)}$ ... **matice strukturních koeficientů,**

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^{\mathrm{T}}$... **vektor pravých stran omezení,**

$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, \ldots, c_n, 0, \ldots, 0)$

... **vektor cenových koeficientů**

1. PŘÍPUSTNÉ ŘEŠENÍ ÚLOHY LP

Přípustné řešení úlohy LP (3.1) je vektor x = $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})^T$, jehož složky splňují vlastní omezení a podmínky nezápornosti

- **Počet přípustných řešení (PŘ) :**
  - protože počet proměnných je větší než počet rovnic, má úloha LP buď:

    1. nekonečně mnoho PŘ nebo

    2. žádné PŘ

2. ZÁKLADNÍ PŘÍPUSTNÉ ŘEŠENÍ ÚLOHY LP

ZPŘ úlohy LP (3.1) je přípustné řešení,
které má maximálně tolik kladných složek,
kolik je lineárně nezávislých
vlastních omezení, tj. *m*,
zbývající složky (alespoň *n*) jsou rovny nule.
Vektory strukturních koeficientů
u proměnných s kladnou hodnotou
jsou lineárně nezávislé.

- Základní přípustné řešení úlohy LP (ZPŘ) musíme odlišit od základního ře-šení ekvivalentní soustavy rovnic (ZŘ):

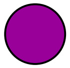
  - **ZŘ** ekvivalentní soustavy rovnic ne-musí splňovat podmínky nezápornosti
  - **ZPŘ** úlohy LP má všechny složky **ne-záporné**

- **Horní hranicí** počtu ZPŘ úlohy (3.1) **?** **je kombinační číslo**

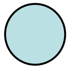
$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

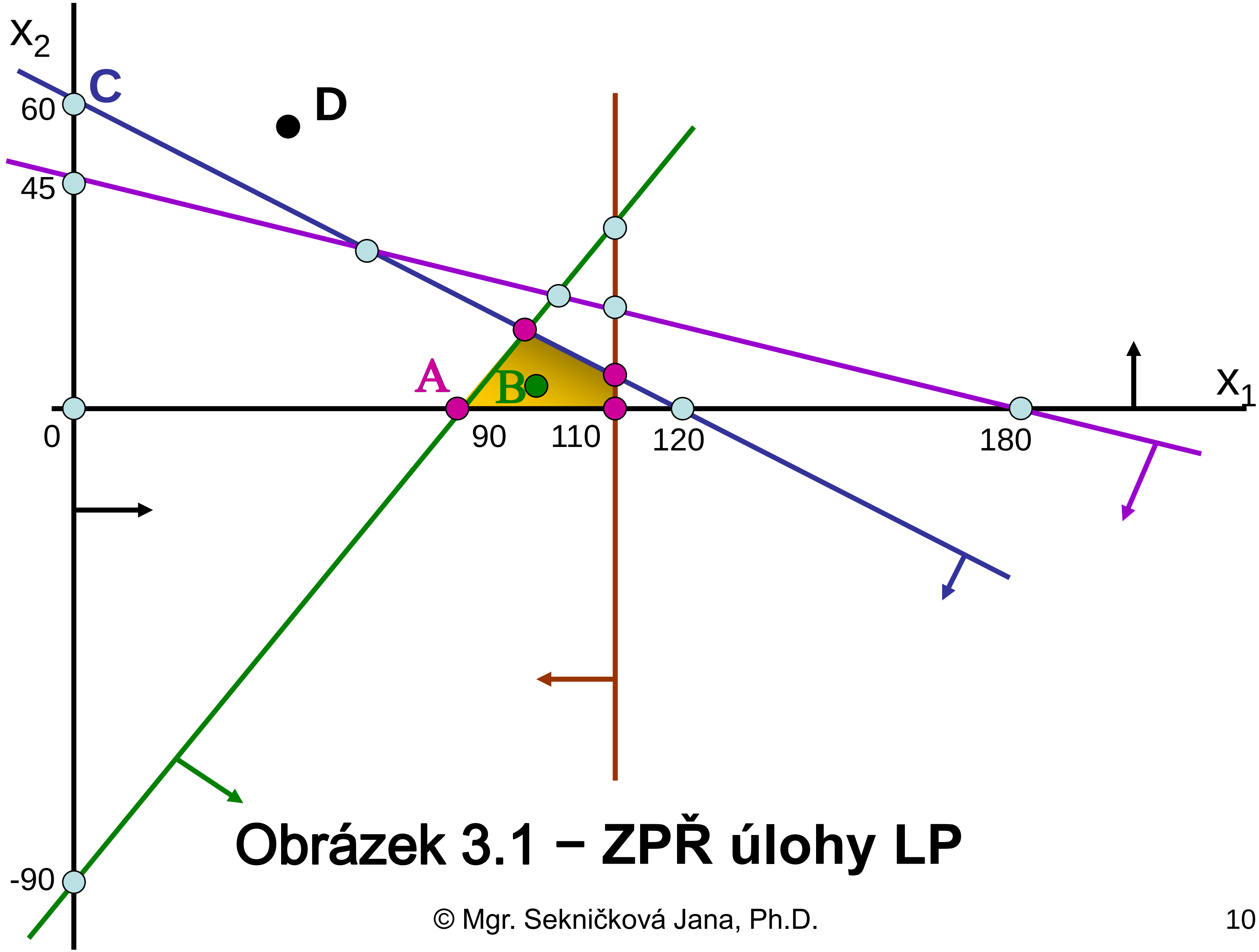
GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ ZPŘ

- Grafickým znázorněním ZPŘ je **vrchol** (krajní bod) množiny přípustných řešení
- Z definice konvexního polyedru je zřejmé, že ZPŘ je konečný počet
- Na obrázku 3.1 jsou všechna **ZPŘ** úlohy z příkladu 1.1 zvýrazněna symbolem



- **ZŘ** soustavy ekvivalentních rovnic jsou označena symbolem





Obrázek 3.1 – ZPŘ úlohy LP

3. OPTIMÁLNÍ ŘEŠENÍ ÚLOHY LP

Optimální řešení (OŘ) úlohy LP (3.1)
je přípustné řešení
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})^T,$$
pro které je hodnota účelové funkce maximální

- Úloha LP má:
  - jedno OŘ
  - nekonečně mnoho OŘ
  - žádné OŘ (viz 2. přednáška)

ZÁKLADNÍ VĚTA LP

- Věta, která má zásadní význam pro řešení úloh LP:

Má-li problém lineárního programování

optimální řešení,

má také

optimální řešení základní

VÝZNAM ZÁKLADNÍ VĚTY LP

Optimální řešení můžeme hledat mezi **konečným počtem základních přípustných řešení**, nikoliv mezi nekonečným množstvím přípustných řešení úlohy LP

Příklad 3.1

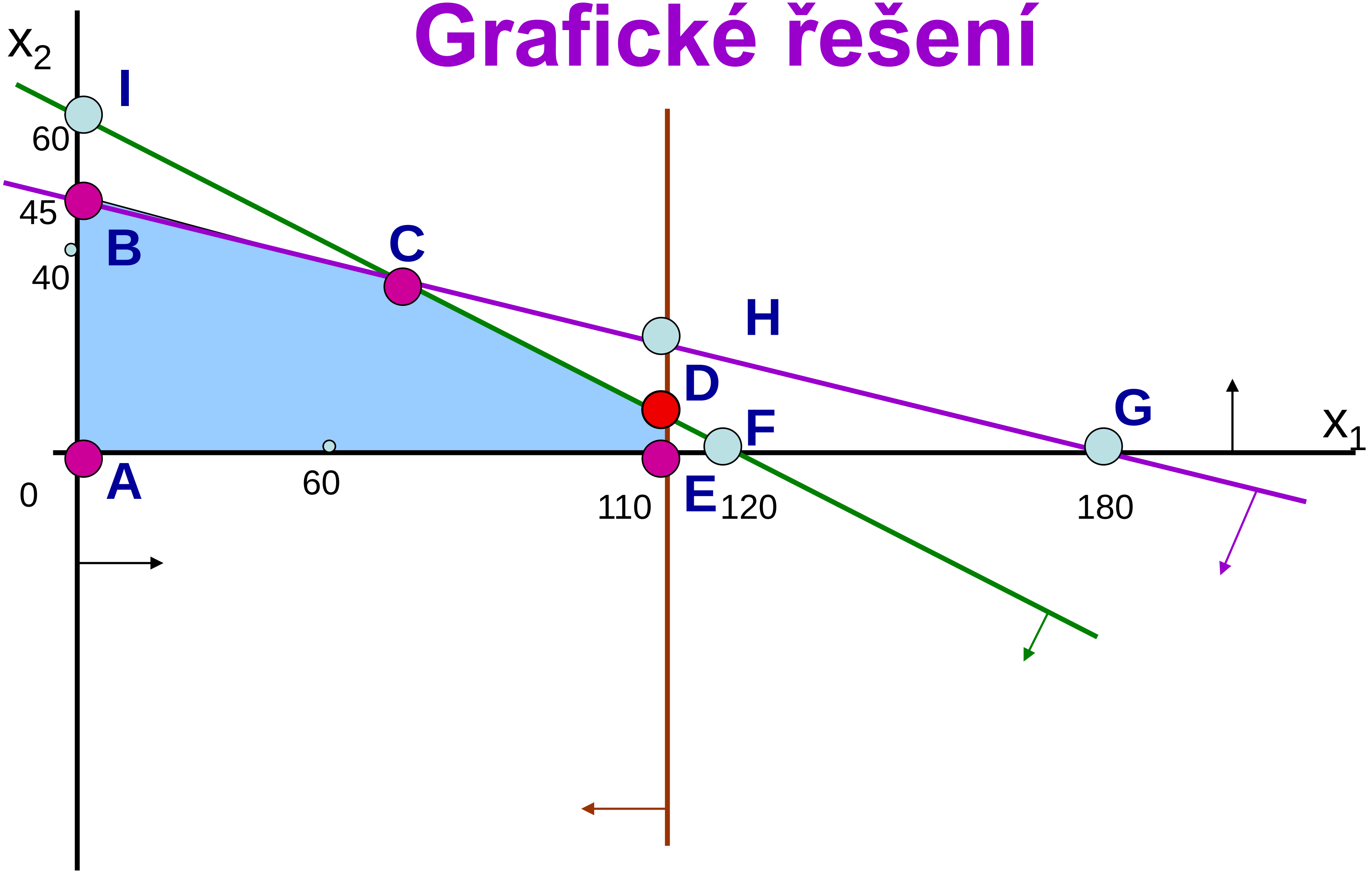
- Najděte podle základní věty LP OŘ této úlohy graficky:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 180 \\ x_1 &\leq 110 \\ x_j &\geq 0,\ j = 1, 2 \end{aligned} \qquad \textbf{(3.2)}$$

$$z = 40x_1 + 60x_2 \ \ldots \ \text{max.}$$

- Kolik bude mít soustava ekvivalentních rovnic ZŘ **?**
- **Soustava ekvivalentních rovnic má celkem 5 proměnných, tj. max. 10 ZŘ**

Grafické řešení



Obrázek 3.2 – OŘ podle základní věty LP

- Úloha má **devět ZŘ**, desáté je v nekonečnu (třetí omezení je rovnoběžné s osou x_2)
- Z nich **pět je nezáporných**
- Optimálním řešením je to ZPŘ, které má nejvyšší hodnotu účelové funkce:

A: $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, 120, 180, 110)^T$, $z = 0$

B: $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 45, 30, 0, 110)^T$, $z = 2700$

C: $\mathbf{x}^{(3)} = (60, 30, 0, 0, 50)^T$, $z = 4200$

D: $\mathbf{x}^{(4)} = (110, 5, 0, 50, 0)^T$, $z = 4700$

E: $\mathbf{x}^{(5)} = (110, 0, 10, 70, 0)^T$, $z = 4400$.

SIMPLEXOVÁ METODA

- Jak jsme viděli, je možno **OŘ** úlohy LP nalézt mezi základními přípustnými ře-šeními
- V praxi však vzniká zásadní **problém**, kterým je **počet ZŘ** (i ZPŘ)
- S rostoucím *m* a *n* roste horní hranice počtu ZŘ velice rychle
- Např. pro $n = 10$, $m = 5$ je to 252

  $n = 100$, $m = 10$ je větší než bilión

  $n = 1000$, $m = 400$ je to 5.10^{290}

- Je však možné využít základní větu LP efektivněji
- Není třeba počítat všechna ZŘ, ale vhodně z nich vybírat:
  - pouze **základní přípustná řešení**
  - z nich vybírat jen ta, která jsou vzhledem k hledanému extrému **„perspektivní“**
- Znamená to vlastně sledovat **„cestu“**, která vede **přes základní přípustná řešení k základnímu optimálnímu řešení**

- Metodu odvodil a její konečnost dokázal v padesátých letech 20. století americký vědec německého původu **George Bernard Dantzig**
- Podle její grafické interpretace ji nazval

simplexová metoda (SM)

- **Konvexní obal** *n* +1 bodů (*n* bodů a počátek) je nazýván *n*-rozměrný

s i m p l e x

- Je to tedy konvexní množina, která má **počátek** a **konečný počet krajních bodů**

PRINCIP SM

- Najdeme jedno ze ZPŘ úlohy LP, které považujeme za **výchozí řešení (VŘ)** iteračního postupu
- Přejdeme k dalšímu ZPŘ, které má **lepší hodnotu účelové funkce** (v krajním případě stejnou)
- V konečném počtu kroků dojdeme buď:
  - **k optimálnímu řešení**
  - nebo k závěru, že **OŘ neexistuje**

VÝCHOZÍ ŘEŠENÍ SM

- Teoreticky může být výchozím řešením libovolné **ZŘ** soustavy ekvivalentních rovnic v (3.1), které splňuje i podmínky nezápornosti
- Náhodným výběrem je však obtížné zajistit nezápornost libovolného **ZŘ**
- Zvolíme např. v (2.13) náhodně:

$$\boldsymbol{x_2 = 0,\ x_4 = 0}$$

- Řešením je vektor

$$\mathbf{x} = (180,\ 0,\ \mathbf{-60},\ 0,\ 90,\ \mathbf{-70})^T$$

Přídatné proměnné ve VŘ

- Nejjednodušší je nalezení výchozího řešení v soustavě vlastních omezení, která obsahuje pouze **nerovnice typu ≤**
- Ke každé nerovnici ≤ přičteme přídatnou proměnnou
- Položíme-li všechny strukturní proměnné rovny nule, je přídatná proměnná rovna pravé straně svého omezení
- Výchozím řešením je tedy vektor

$$\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m) \qquad \textbf{(3.3)}$$

Pomocné proměnné ve VŘ

- Je-li některé omezení nerovnice ve tvaru **≥,** nelze takto postupovat
- Položíme-li v (2.13)

  $$x_1 = 0,\ x_2 = 0,$$

  je řešením vektor

  $$\mathbf{x} = (0, 0, 120, 180, -90, 110)^T$$
- Přídatná proměnná má zápornou hodnotu
- Postup získání výchozího řešení je v tom-to případě složitější, potřebujeme ještě další proměnné − **pomocné** (viz 4. před-náška)

Příklad 3.2

- Vypočtěte výchozí řešení úlohy (3.2)

1. Nerovnice **vyrovnáme na rovnice**:

$$
\begin{array}{lllll}
x_1 + 2x_2 & \boxed{+ x_3 \quad\quad\quad\quad} & = 120 & & \\
x_1 + 4x_2 & \boxed{\quad\quad + x_4 \quad\quad} & = 180 & & \textbf{(3.4)} \\
x_1 & \boxed{\quad\quad\quad\quad + x_5} & = 110 & & \\
x_j \geq & 0, j = 1, 2, \ldots, 5 & & &
\end{array}
$$

- Dosadíme nulové hodnoty strukturních proměnných

$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

- Vypočteme hodnoty přídatných proměnných

$$x_3 = 120,\ x_4 = 180\ x_5 = 110$$

- Vektor

$$\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, 120, 180, 110)^{\mathrm{T}} \qquad \textbf{(3.5)}$$

je výchozím řešením SM

- Proměnné x_3, x_4 a x_5 jsou **základní proměnné (bázické)**
- V **kanonickém tvaru** soustavy rovnic mají jednotkový vektor koeficientů
- Proměnné x_1, x_2 jsou **nezákladní (nebázické)**

2. Upravíme účelovou funkci tak, aby všechny proměnné byly na levé straně, tj. **anulujeme** ji:

$$\mathbf{z - 40x_1 - 60x_2 = 0} \qquad \mathbf{(3.6)}$$

- Dostáváme MM **v kanonickém tvaru**:
- $$\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & + \; 2x_2 & \boxed{+\, x_3} & & & & = 120 \\ x_1 & + \; 4x_2 & & + \, x_4 & & & = 180 \\ x_1 & & & & + \, x_5 & & = 110 \\ -\,40x_1 & -\,60x_2 & & & & + \, z & = 0 \end{array}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 5$$

- Čtvrtou základní proměnnou je zde ***z***
- Má zvláštní postavení, zůstává základní proměnnou po celou dobu výpočtu
- Protože nezákladní proměnné $x_1 = x_2 = 0$ a ceny základních proměnných x_3, x_4, x_5 jsou rovněž rovny nule, je výchozí hodnota účelové funkce

$$\mathbf{z^{(1)} = 0}$$

- Grafickým znázorněním výchozího řešení je bod se souřadnicemi [0,0], tj. počátek

ITERAČNÍ POSTUP

- Po získání výchozího řešení začíná opakování iterací SM
- Každá **iterace SM** má tři části:

1. test optima
2. zlepšení řešení
3. transformace

- Podle základní věty LP končí iterační postup v konečném počtu kroků nalezením OŘ nebo zjištěním, že neexistuje

1. TEST OPTIMA

- Položíme si otázku:

Co se stane s hodnotou účelové funkce, jestliže nulovou hodnotu některé nezákladní proměnné zvýšíme?

- Vyjdeme z výchozího řešení (3.5):

$$\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, 120, 180, 110)^{\mathrm{T}}$$

- Položíme x_1=1 a dosadíme do anulované účelové funkce (3.6):

$$z - 40x_1 = 0, \text{ tj. } \boldsymbol{z = 40}$$

- Zvýší-li se hodnota proměnné x_1 o jednotku, vzroste hodnota z o 40

- Položme nyní $x_2 = 1$
- Po dosazení je

$$z - 60x_2 = 0, \text{ tj. } \mathbf{z = 60}$$

- S růstem proměnné x_2 o jednotku vzroste hodnota z o 60
- Odtud je zřejmé:

  je-li u nezákladní proměnné v anulované účelové funkci **záporný koeficient**, s růstem této proměnné **hodnota *z* vzroste**
- **Absolutní hodnota** tohoto koeficientu ukazuje velikost přírůstku účelové funkce na jednu jednotku proměnné x_j

2. ZLEPŠENÍ ŘEŠENÍ

- Zvolíme některou nezákladní proměnnou se **záporným koeficientem v účelové funkci (3.6):**

$$\boldsymbol{z - 40x_1 - 60x_2 = 0}$$

- Je-li v účelové funkci více záporných koeficientů, volíme obvykle ten, který znamená nejvyšší přírůstek účelové funkce na jednotku proměnné, tj. **nejmenší koeficient**
- Podle koeficientů v řádce *z* je v absolutní hodnotě vyšší druhý, zvolíme tedy $\boldsymbol{x_2}$

- Tato proměnná bude mít v další iteraci kladnou hodnotu (označíme ji ***t***)
- V omezeních (3.4) dosadíme $\mathbf{x_2 = t > 0}$ **:**

$$
\begin{array}{lllll}
x_1 + 2t & + x_3 & & & = 120 \\
x_1 + 4t & & + x_4 & & = 180 \\
x_1 & & & + x_5 & = 110
\end{array}
$$

- Dosadíme $x_1 = 0$ a vypočteme hodnoty základních proměnných:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 120 - 2t \\
x_4 &= 180 - 4t \qquad (3.7) \\
x_5 &= 110 - 0t
\end{aligned}
$$

- Z podmínek nezápornosti vyplývá:

$$\begin{aligned} x_3 &= 120 - \mathbf{2}\boldsymbol{t} \geq 0 \\ x_4 &= 180 - \mathbf{4}\boldsymbol{t} \geq 0 \qquad \mathbf{(3.7)} \\ x_5 &= 110 - \mathbf{0}\boldsymbol{t} \geq 0 \end{aligned}$$

Odtud je **?**

$$\boldsymbol{t} \leq \mathbf{min\ (60,\ 45)} \qquad \mathbf{(3.8)}$$

- Zvolíme **nejvyšší** možnou hodnotu *t*:

$$\boldsymbol{t} = \mathbf{min\ (60,\ 45) = 45} \qquad \mathbf{(3.9)}$$

- Dosadíme do (3.7) a vypočteme nové hodnoty základních proměnných: **?**

$$\boldsymbol{x_3} = \mathbf{30},\ \boldsymbol{x_4} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{x_5} = \mathbf{110}$$

- Co se stane, jestliže hodnotu nové základ-ní proměnné nezvolíme podle (3.9)?

a. Zvolíme nejdříve $t < 45$

- např. pro $t = 30$ je nové řešení **?**

$$x^{(2)} = (0, 30, 60, 60, 110)^T$$

- Je to ZPŘ **?**

- řešení je přípustné, ale není základní

- Proč není základní **?**

- žádná základní proměnná se nevynu-lovala, kladné složky jsou 4

b. Zvolíme nyní ***t* > 45**

− např. pro $t = 50$ je nové řešení **?**

$$\mathbf{x}^{(3)} = (0, 50, 20, -20, 110)^T$$

- Je to ZPŘ **?**

  - řešení není ani přípustné, ani základní

- Graficky odpovídá výměně základní proměnné a nezákladní proměnné přechod od jednoho vrcholu konvexního polyedru ke druhému

3. TRANSFORMACE ŘEŠENÍ

- Novou základní proměnnou nazveme **vstupující proměnná**
- Proměnnou, jejíž hodnota se vynulovala nazveme **vystupující proměnná**
- Vstupující proměnná je v další iteraci základní, musí proto mít **jednotkový vektor koeficientů**
- Soustavu omezení i účelovou funkci budeme transformovat **Gaussovou metodou úplné eliminace**
- Výpočet uspořádáme do **tabulky**

SIMPLEXOVÁ TABULKA

- **Řádky** tabulky (ST) odpovídají vlastním omezením
- V posledním řádku je **účelová funkce**
- **Sloupce** tabulky odpovídají vektorům koeficientů strukturních a přídatných proměnných
- **Pravé strany** vlastních omezení jsou posledním sloupcem tabulky
- V prvním sloupci jsou **základní proměnné** dané iterace

Výchozí řešení

Strukturní proměnné

Proměnné

Přídatné proměnné

Pravé strany

Strukturní koeficienty

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	b_i
x_3	1	2	1	0	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	0	180
x_5	1	0	0	0	1	0	110
z	-40	-60	0	0	0	1	0

Tab. 3.1

Základní proměnné

Koeficienty účelové funkce

Hodnota účelové funkce

- Ze simplexové tabulky přečteme ZPŘ:
  - hodnoty základních proměnných jsou rovny pravým stranám
  - nezákladní proměnné jsou rovny nule
- V tabulce 3.1 jsou základní proměnné:

$$x_3 = 120,\ x_4 = 180, x_5 = 120$$

- Nezákladní proměnné jsou:

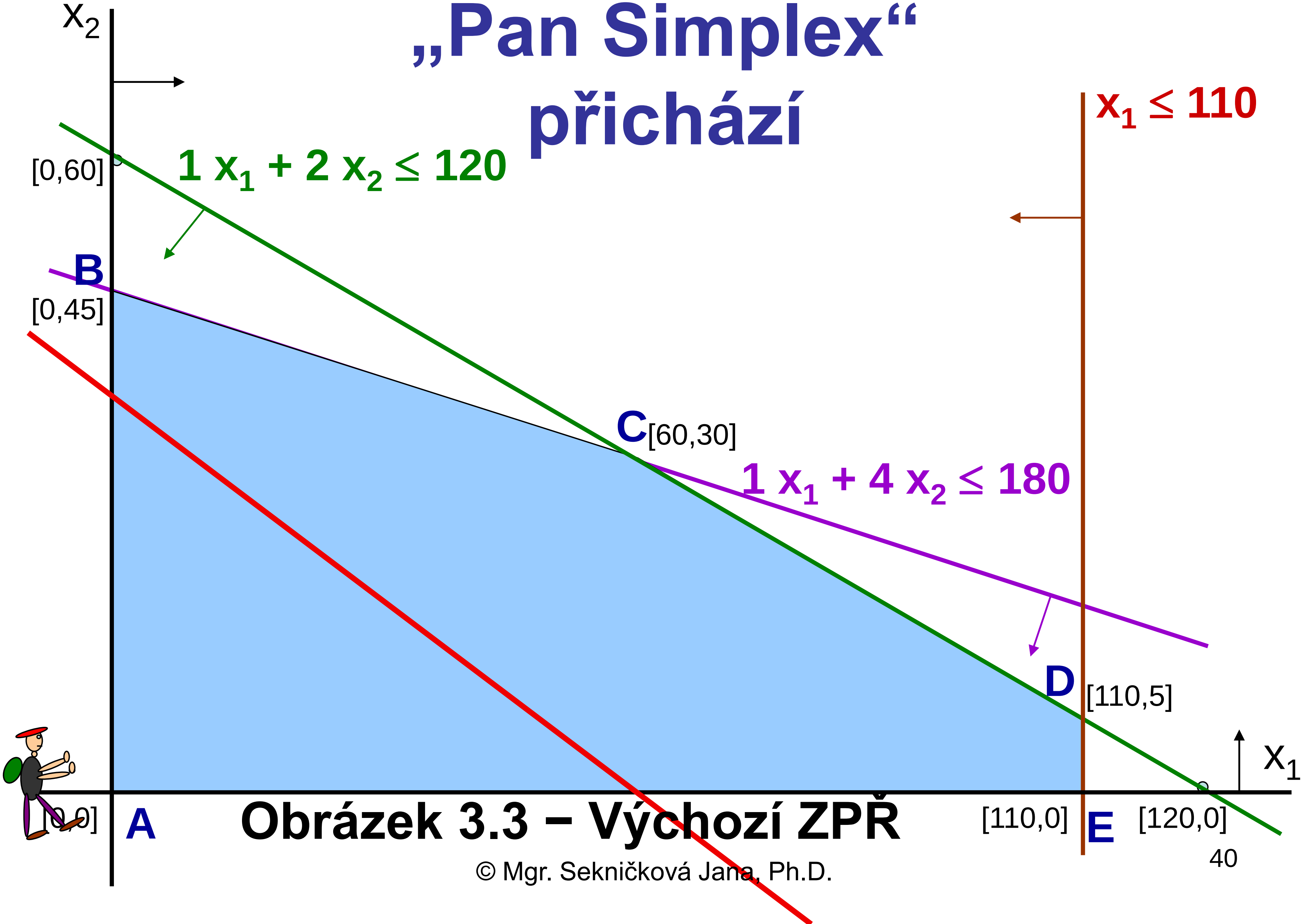
$$x_1 = 0,\ x_2 = 0$$

- Vektor výchozího řešení je:

$$\boldsymbol{x^{(1)} = (0,\ 0,\ 120,\ 180,\ 120)^T,\ z^{(1)} = 0}$$

- Grafickým znázorněním je **bod A**

„Pan Simplex“ přichází



Obrázek 3.3 – Výchozí ZPŘ

1. Test optima a určení vstupující proměnné

- Najdeme **nejmenší koeficient** v řádce *z*:
  a. je-li **nezáporný**, není možno zvýšit hodnotu účelové funkce: vypočetli jsme **OŘ**
  b. je-li **záporný**, nalezli jsme proměnnou, která zlepší hodnotu účelové funkce: nazveme ji **vstupující proměnnou**
- Sloupec této proměnné označíme jako

klíčový sloupec

Klíčový sloupec

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60 ↑	0	0	0	0

Tab. 3.2

Nejmenší koeficient v řádce účelové funkce je **−60**: vstupující proměnnou je x_2, klíčový sloupec je druhý

2. Určení vystupující proměnné

- Tabulku rozšíříme o další sloupec, který označíme symbolem t
- Vypočteme podíly pravých stran b_i a **klad-ných** koeficientů klíčového sloupce a za-píšeme do sloupce t
- Najdeme nejmenší z vypočtených podílů
- Určíme tak **vystupující proměnnou** a

klíčový řádek

Klíčový řádek

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	t
x_3	1	2	1	0	0	120	60
$\leftarrow x_4$	1	4	0	1	0	180	45
x_5	1	0	0	0	1	110	x
z_j	-40	-60 ↑	0	0	0	0	

Tab. 3.3

- $x_3 = 120 - 2.t \geq 0 \rightarrow t = 120/2 = 60$
- $x_4 = 180 - 4.t \geq 0 \rightarrow t = 180/4 =$ **45**
- Pro x_5 hodnotu t neurčujeme
- Vystupující proměnnou je x_4, **klíčový řádek je druhý**

Klíčový prvek

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	t
x_3	1	2	1	0	0	120	60
$\leftarrow x_4$	1	4	0	1	0	180	45
x_5	1	0	0	0	1	110	x
z_j	-40	-60 ↑	0	0	0	0	

Tab. 3.4

Na průsečíku klíčového sloupce a klíčového řádku leží

klíčový prvek

Tabulku transformujeme metodou úplné eliminace tak, aby v klíčovém sloupci byl jednotkový vektor s jedničkou na místě klíčového prvku

3. TRANSFORMACE ŘEŠENÍ

1. V klíčovém řádku zapíšeme proměnnou x_2
2. Klíčový řádek dělíme 4
3. Násobíme ho (−2) a připočteme k 1. řádku
4. Třetí řádek opíšeme
5. Klíčový řádek násobíme (60) a přičteme k účelové funkci

- Novým řešením je vektor

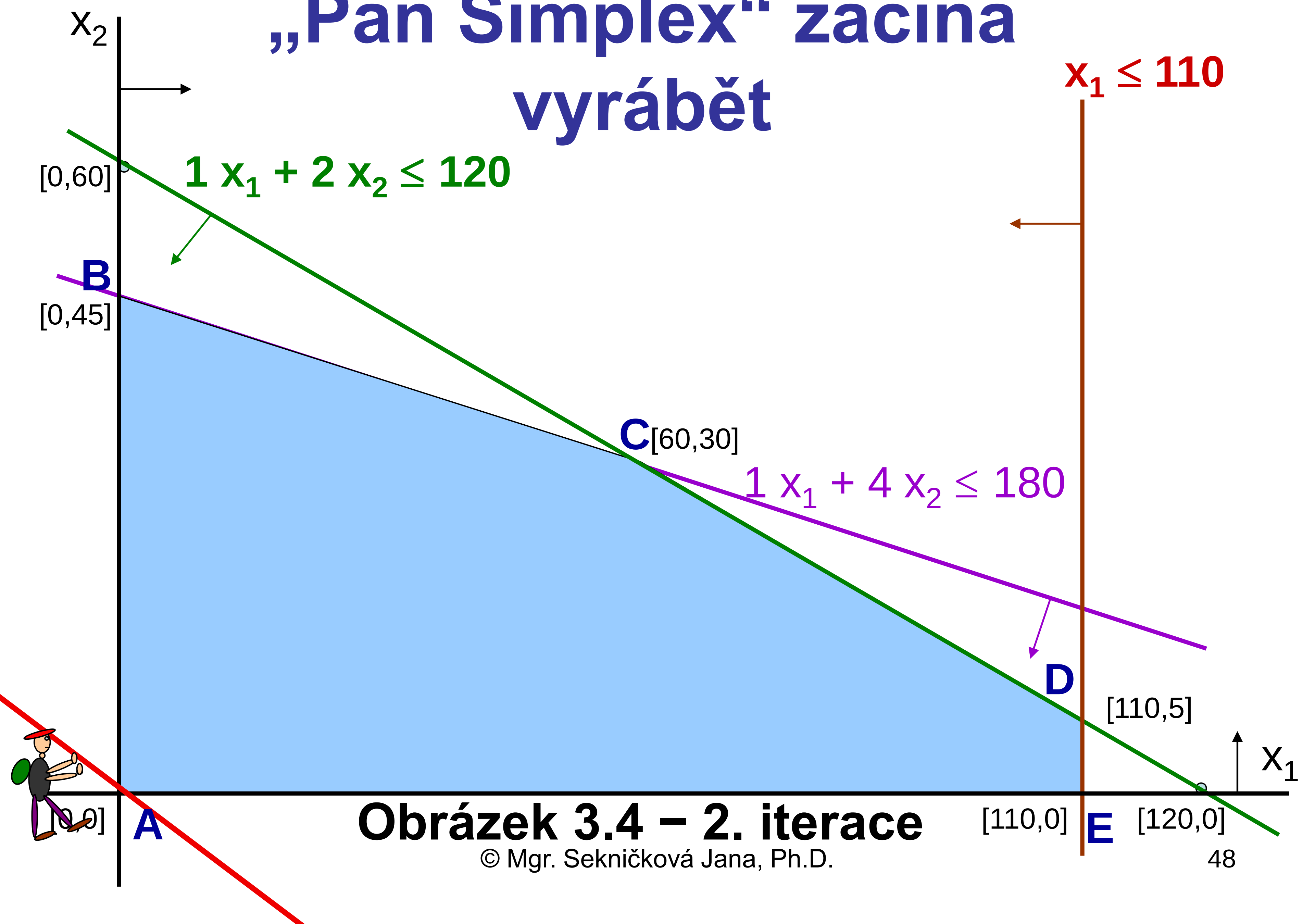
$$\mathbf{x^{(2)} = (0, 45, 30, 0, 110)^T, z^{(2)} = 2700}$$

- Grafickým znázorněním je bod B

Transformace tabulky

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	t
x_3	1	2	1	0	0	120	60
$\leftarrow x_4$	1	4	0	1	0	180	45
x_5	1	0	0	0	1	110	x
z_j	-40	-60 $\uparrow$	0	0	0	0	

„Pan Simplex“ začíná vyrábět



Obrázek 3.4 – 2. iterace

Zlepšení řešení

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i	*t*
x_3	1/2	0	1	-1/2	0	30	60
x_2	1/4	1	0	1/4	0	45	180
x_5	1	0	0	0	1	110	110
z_j	-25	0	0	15	0	2700	

Tab. 3.6

- Řešení v tabulce 3.6

$$\mathbf{x}^{(2)} = (0, 45, 30, 0, 110)^T, z = 2700$$

  není optimální
- Vstupující proměnná je x_1
- Vystupující proměnná je x_3 **? - odvoďte**

Transformace tabulky

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i	t
x_1	1	0	2	-1	0	60	x
x_2	0	1	-1/2	1/2	0	30	60
x_5	0	0	-2	1	1	50	50
z_j	0	0	50	-10	0	4200	

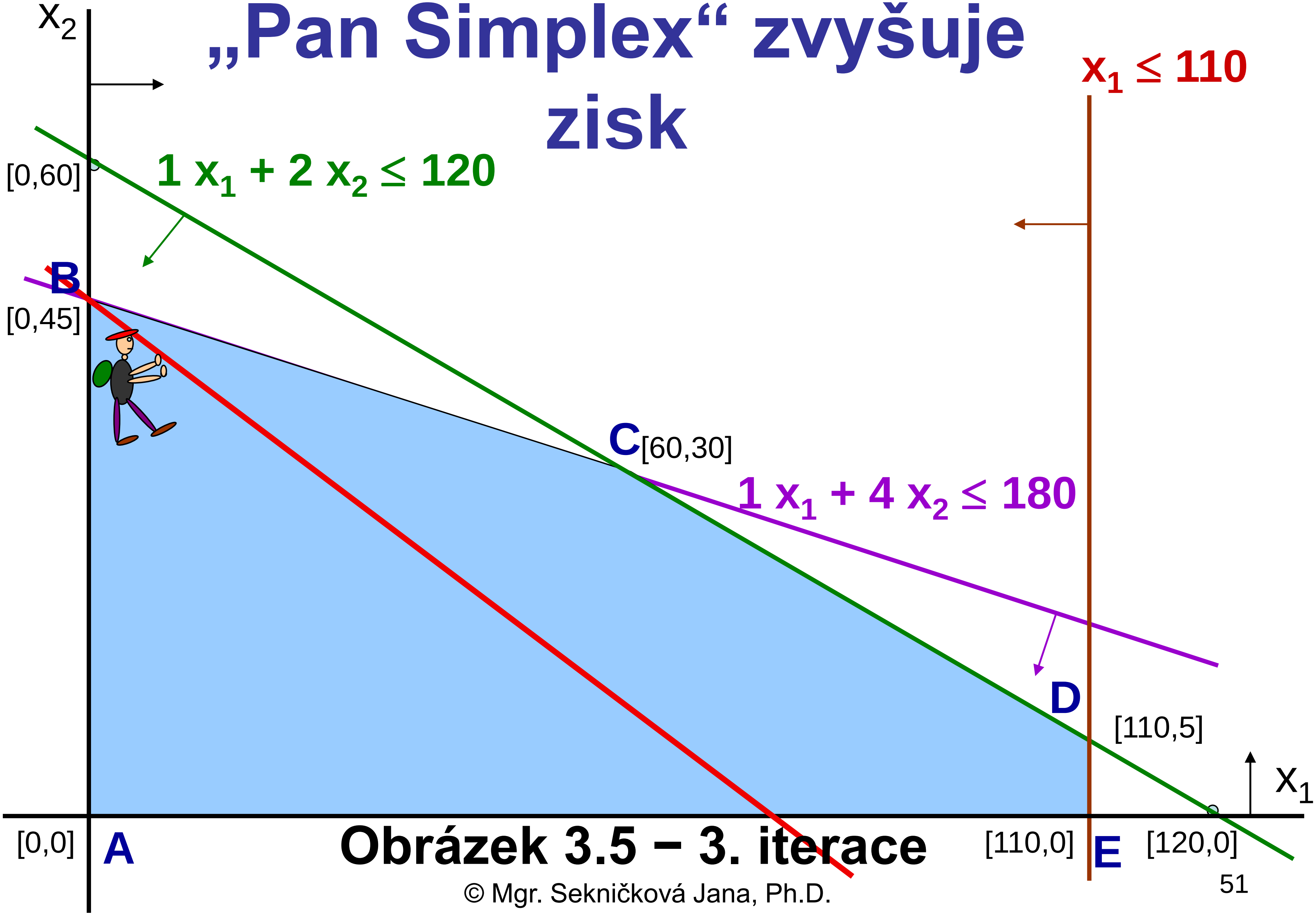
Tab. 3.7

- V tabulce 3.7 je řešení

$$\mathbf{x}^{(3)} = (60, 30, 0, 0, 50)^T, z = 4200$$

- Grafickým znázorněním je vrchol C

„Pan Simplex“ zvyšuje zisk



Obrázek 3.5 – 3. iterace

Zlepšení řešení

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i	t
x_1	1	0	2	-1	0	60	x
x_2	0	1	-1/2	1/2	0	30	60
x_5	0	0	-2	1	1	50	50
z_j	0	0	50	-10	0	4200	

Tab. 3.8

- Řešení v tabulce 3.8

$$\mathbf{x}^{(3)} = (60, 30, 0, 0, 50)^T, z = 4200$$

není optimální

- Vstupující proměnná je **?** x_4
- Vystupující proměnná je **?** x_5

Transformace tabulky

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0	0	1	110
x_2	0	1	1/2	0	-1/2	5
x_4	0	0	-2	1	1	50
z_j	0	0	50	0	10	4700

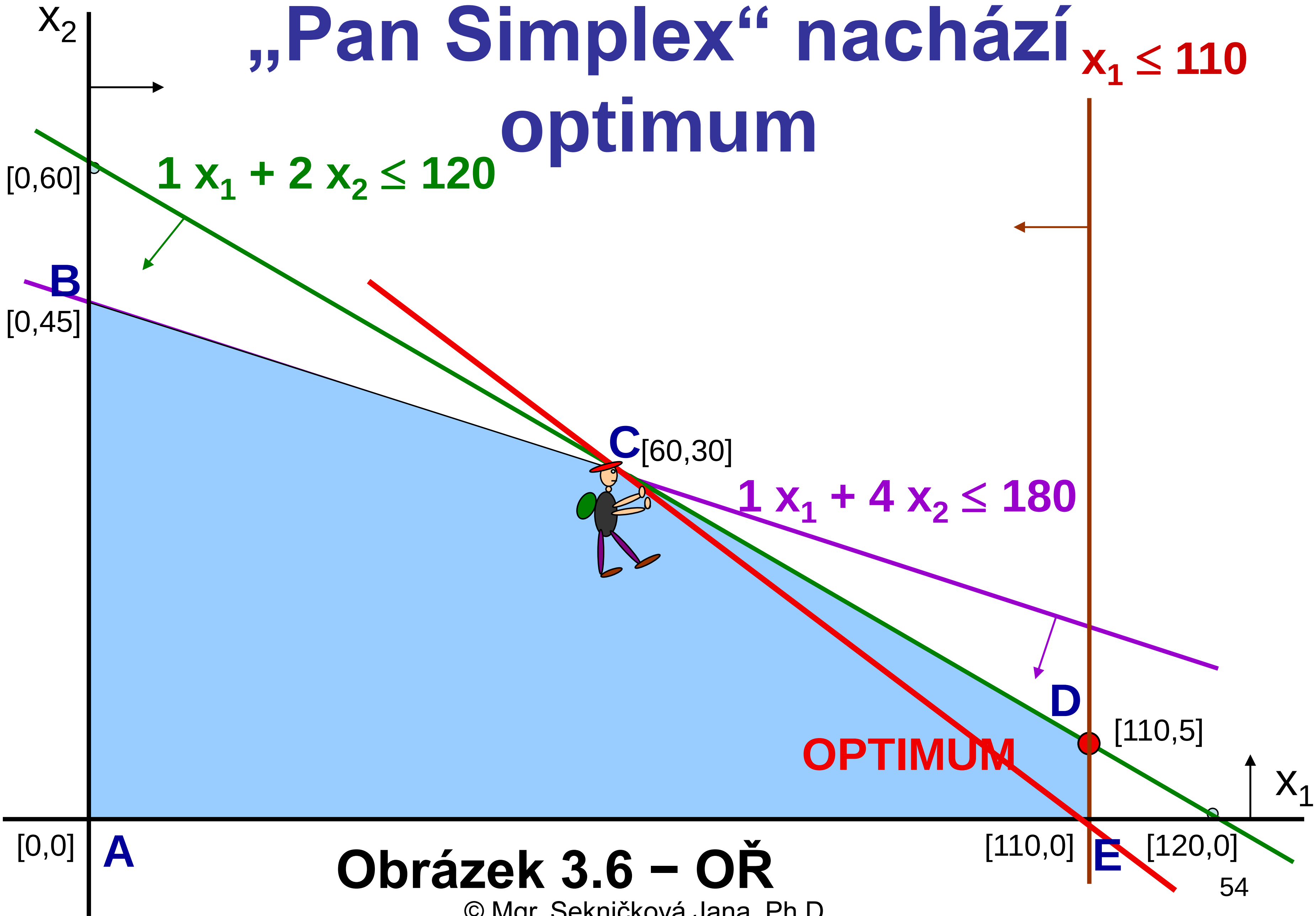
Tab. 3.9

- **Test optima:** v řádce účelové funkce není žádný záporný koeficient. Řešení v tabulce 3.9 je optimální:

$$\mathbf{x}^{(4)} = (110, 5, 0, 50, 0)^T, z = 4700.$$

- Grafickým znázorněním je bod D

„Pan Simplex“ nachází optimum



Obrázek 3.6 – OŘ

KONEC