4EK213 – Lineární modely

4. Simplexová metoda - závěr

4. Simplexová metoda - závěr

- **Konečnost simplexové metody**
  - Degenerace
  - Modifikace pravidla pro volbu vstupující proměnné
  - Blandovo pravidlo
- **Kontrola výpočtu v simplexové tabulce**
  - Následky chyb při výpočtu
- **Obecné vyjádření simplexové tabulky**

4. Simplexová metoda - závěr

- **Konečnost simplexové metody**
  - Degenerace
  - Modifikace pravidla pro volbu vstupující proměnné
  - Blandovo pravidlo
- **Kontrola výpočtu v simplexové tabulce**
  - Následky chyb při výpočtu
- **Obecné vyjádření simplexové tabulky**

4.1 Konečnost simplexové metody

- Simplexová metoda je konečná
- Konečnost simplexové metody vyplývá ze základní věty LP
- Optimální řešení hledáme mezi základními přípustnými řešeními (důsledek ZVLP)
- Základních přípustných řešení je konečný počet – max. $\binom{m+n}{m}$
- Podle testu optima v každé iteraci zvýšíme hodnotu účelové funkce o $\Delta z = -t \cdot z_k$
- V konečném počtu kroků tedy musíme dojít k optimálnímu řešení nebo k závěru, že OŘ neexistuje

4.1 Konečnost simplexové metody

Konečnost může porušit jen degenerace v úloze lineárního programování

$$\Delta z = -t \cdot z_k$$

4.1.1 Degenerace v úloze LP

Degenerované řešení
je **základní přípustné řešení,**
které má **méně než m kladných**
složek,
tj. více než n nulových složek

- Znamená to, že jedna nebo více základních proměnných (kterých je m) je **rovna nule**

4.1.1 Degenerace v simplexové tabulce

- K degeneraci v ST může dojít dvěma způsoby:
  - při zadání úlohy LP
  - během výpočtu (je-li několik stejných minimálních podílů t)
- V ST se degenerace projeví tak, že alespoň jedna **složka sloupce pravých stran je rovna nule**
- Je-li proti nulové pravé straně v klíčovém sloupci kladný koeficient, je **hodnota vstupující proměnné rovna nule**:

$$\boldsymbol{x_k = t = 0}$$

4.1.1 Degenerace v simplexové tabulce

- Je-li $t = 0$, je nulový i přírůstek účelové funkce z:
$$\Delta z = -t \cdot z_k = -0 \cdot z_k = 0$$
- Tato situace může vést k zacyklení výpočtu:
  - po určitém počtu kroků se opět vrací již známá kombinace základních proměnných (známá **báze**)
  - postup se opakuje donekonečna (viz Bealeův příklad)
  - toto **zacyklení báze** je velmi vzácné

Bealeův příklad – matematický model

$$
\begin{aligned}
-60\,x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 &\leq 0\\
-90\,x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 &\leq 0\\
x_3 &\leq 1\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\\
z = 150x_1 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \ldots \min
\end{aligned}
$$

- Přičteme přídatné proměnné a přepíšeme výchozí řešení do tabulky

4.1.1 Degenerace v simplexové tabulce

1. iter.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	t
? x_5	–60	1/4	–1/25	9	1	0	0	0	0
? x_6	–90	1/2	–1/50	3	0	1	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1	–
z_j	–150	3/4↑	1/50	–6	0	0	0	0	–

- Klíčový sloupec je druhý
- Klíčový řádek není jednoznačný, 1. nebo 2.
- Nejednoznačnost pokračuje i v dalších iteracích
- Zvolíme-li vždy první z možností, vracíme se po sedmi iteracích zpět k výchozí bázi

4.1.1 Degenerace v simplexové tabulce

- Degeneraci lze odstranit několika způsoby:
  - **Modifikace pravidla pro volbu vstupující proměnné** (modifikace testu optima)
    - snaží se o nenulovou změnu účelové funkce vhodným výběrem klíčového sloupce
  - **Blandovo pravidlo** pro volbu vstupující proměnné
    - modifikuje pravidlo pro určení klíčového sloupce i určení klíčového řádku
  - **Charnesova metoda** perturbovaných pravých stran
    - upraví nulové pravé strany na kladné

4.1.2 Modifikace testu optima

1. iter.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	t
x_5	–60	1/4	–1/25	9	1	0	0	0	x
x_6	–90	1/2	–1/50	3	0	1	0	0	x
$\leftarrow x_7$	0	0	1	0	0	0	1	1	1
z_j	–150	3/4	1/50↑	–6	0	0	0	0	–

- Hledáme kombinaci vstupující a vystupující proměnné, která maximalizuje přírůstek účelové funkce $\Delta z = -t \cdot z_k$
- Pokud je klíčový sloupec druhý, klíčový řádek je 1. nebo 2. a
$$\Delta z = -t \cdot z_k = 0$$
- Pokud je klíčový sloupec třetí, klíčový řádek je jednoznačně třetí
- **Změna** účelové funkce je: $\Delta z = -t \cdot z_k = -\frac{1}{50}$
- Tento přírůstek je vyšší a po transformaci získáme OŘ ve 4. iteraci

4.1.3 Blandovo pravidlo

1. iter.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i	t
? x_5	–60	1/4	–1/25	9	1	0	0	0	0
? x_6	–90	1/2	–1/50	3	0	1	0	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1	–
z_j	–150	3/4↑	1/50	–6	0	0	0	0	–

- Jednoduchý postup, odvozený experimentálně
- Volíme vždy **první možný klíčový sloupec** bez ohledu na absolutní hodnotu koeficientu z_k
- V případě rovnosti volíme **první možný klíčový řádek**

4. Simplexová metoda - závěr

- **Konečnost simplexové metody**
  - Degenerace
  - Modifikace pravidla pro volbu vstupující proměnné
  - Blandovo pravidlo
- **Kontrola výpočtu v simplexové tabulce**
  - Následky chyb při výpočtu
- **Obecné vyjádření simplexové tabulky**

4. Simplexová metoda - závěr

- **Konečnost simplexové metody**
  - Degenerace
  - Modifikace pravidla pro volbu vstupující proměnné
  - Blandovo pravidlo
- **Kontrola výpočtu v simplexové tabulce**
  - Následky chyb při výpočtu
- **Obecné vyjádření simplexové tabulky**

4.2 Chyby při výpočtu v ST

Chyba:

– v určení klíč. sloupce

– v určení klíč. řádku

– v eliminaci

– v zápisu základních proměnných

– numerické chyby

Projeví se:

– snížení hodnoty z

– nepřípustné řešení

– porušení přípustnosti nebo kanonického tvaru

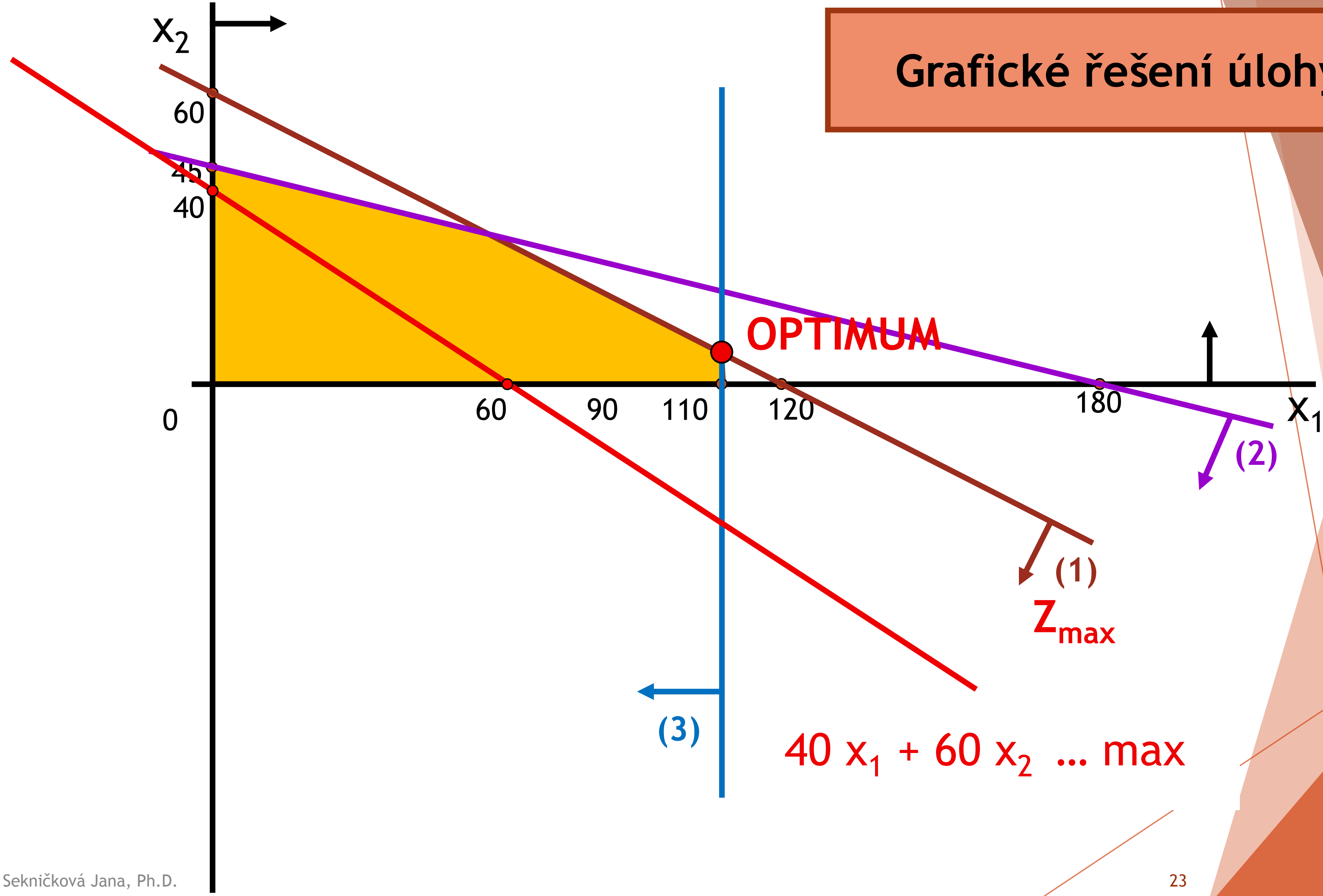
– špatně přečtené základní řešení

– částečně nebo úplně špatný výsledek

Motivační příklad – matematický model

(1) Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
(2) Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
(3) Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [ks]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

Grafické řešení úlohy LP



$40\ x_1 + 60\ x_2$ … max

Motivační příklad - grafické řešení

- **Optimální řešení** zadané úlohy leží na průsečíku dvou hraničních přímek omezení (1) a (3):

$$x_1 + 2x_2 = 120$$
$$x_1 \qquad = 110$$

- Odtud je $x_1 = 110, x_2 = 5$
- Bod optimálního řešení je tedy

$$\mathbf{x}^* = [110, 5]$$

- Hodnota účelové funkce je po dosazení

$$z = 40x_1 + 60x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 5 = 4700$$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [min]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2$ ... max [Kč]

4.2.1 Chybný výběr klíčového sloupce

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	t
$\leftarrow x_1$	1	0	2	-1	0	60	30
x_2	0	1	-1/2	1/2	0	30	x
x_5	0	0	-2	1	1	50	x
z_j	0	0	50↑	-10	0	4200	

- Zvolíme chybně vstupující proměnnou x_3
- Hodnota vstupující proměnné je:

$$t = \min(30, x, x) = 30$$

- Změna účelové funkce bude:

$$\Delta z = -t \cdot z_k = -30 \cdot 50 = -1500$$

JAKÁ?

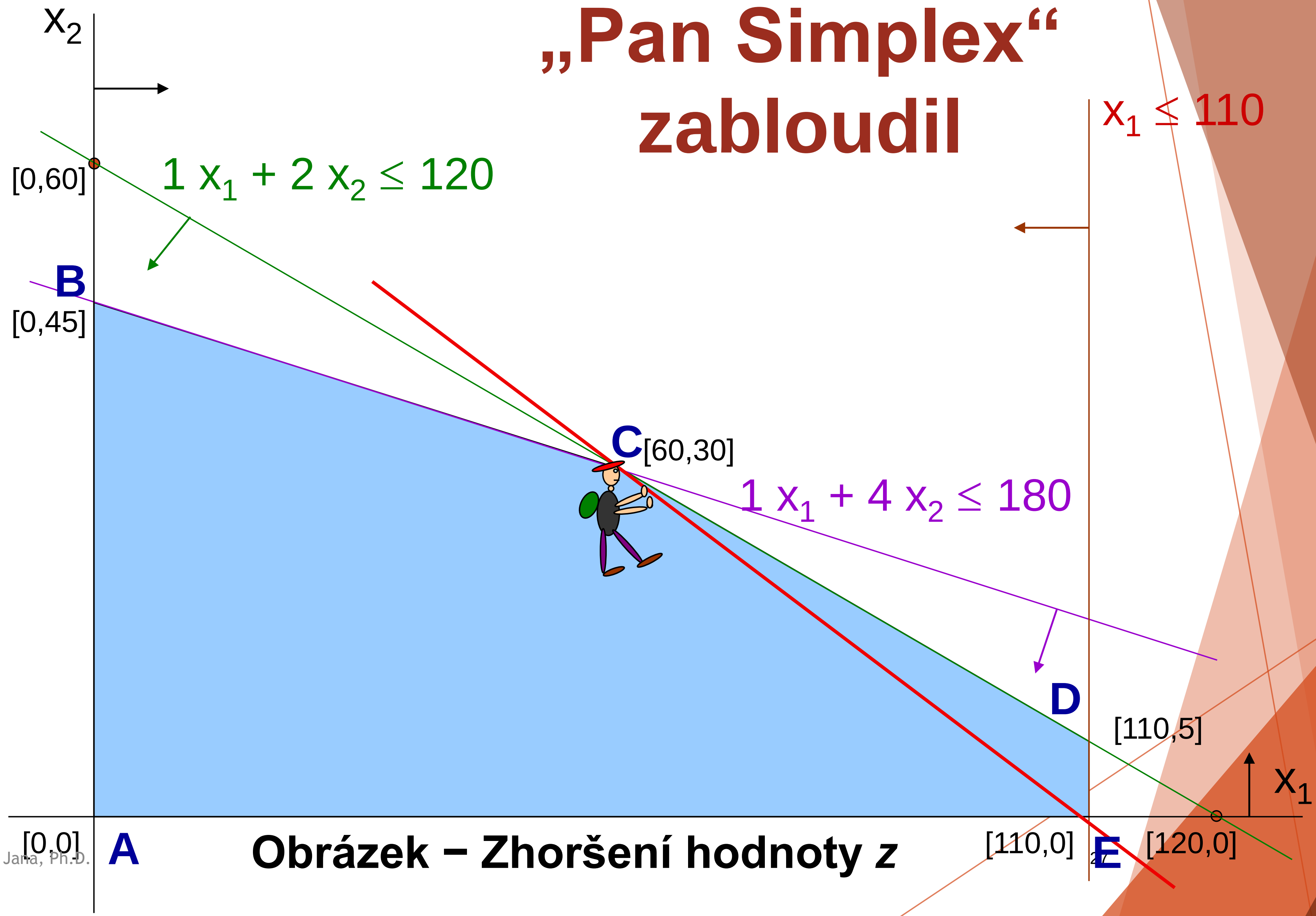
4.2.1 Chybný výběr klíčového sloupce

- Transformace:

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1/2	0	1	-1/2	0	30
x_2	1/4	1	0	1/4	0	45
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-25	0	0	15	0	2700

- Vidíme, že hodnota účelové funkce klesla z 4200 na 2700, tedy o 1500
- V grafickém řešení jsme se dostali zpět do krajního bodu B

„Pan Simplex“ zabloudil



Obrázek – Zhoršení hodnoty *z*

4.2.2 Chybný výběr klíčového řádku

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	t
x_1	1	0	2	-1	0	60	x
$\leftarrow x_2$	0	1	-1/2	1/2	0	30	60
x_5	0	0	-2	1	1	50	50
z_j	0	0	50	-10↑	0	4200	

- Zvolíme správně vstupující proměnnou x_4
- Zvolíme však chybně vystupující proměnnou x_2

$$x_4 = 60$$

- Jaká bude hodnota proměnných x_1, x_2 a x_5?

$$x_1 = 60 - (-1)t = 60 + 1 \cdot 60 = 120$$

$$x_2 = 30 - \left(\frac{1}{2}\right)t = 30 - \frac{1}{2}60 = 0$$

$$x_5 = 50 - 1 \cdot t = 50 - 1 \cdot 60 = -10$$

JAKÁ?

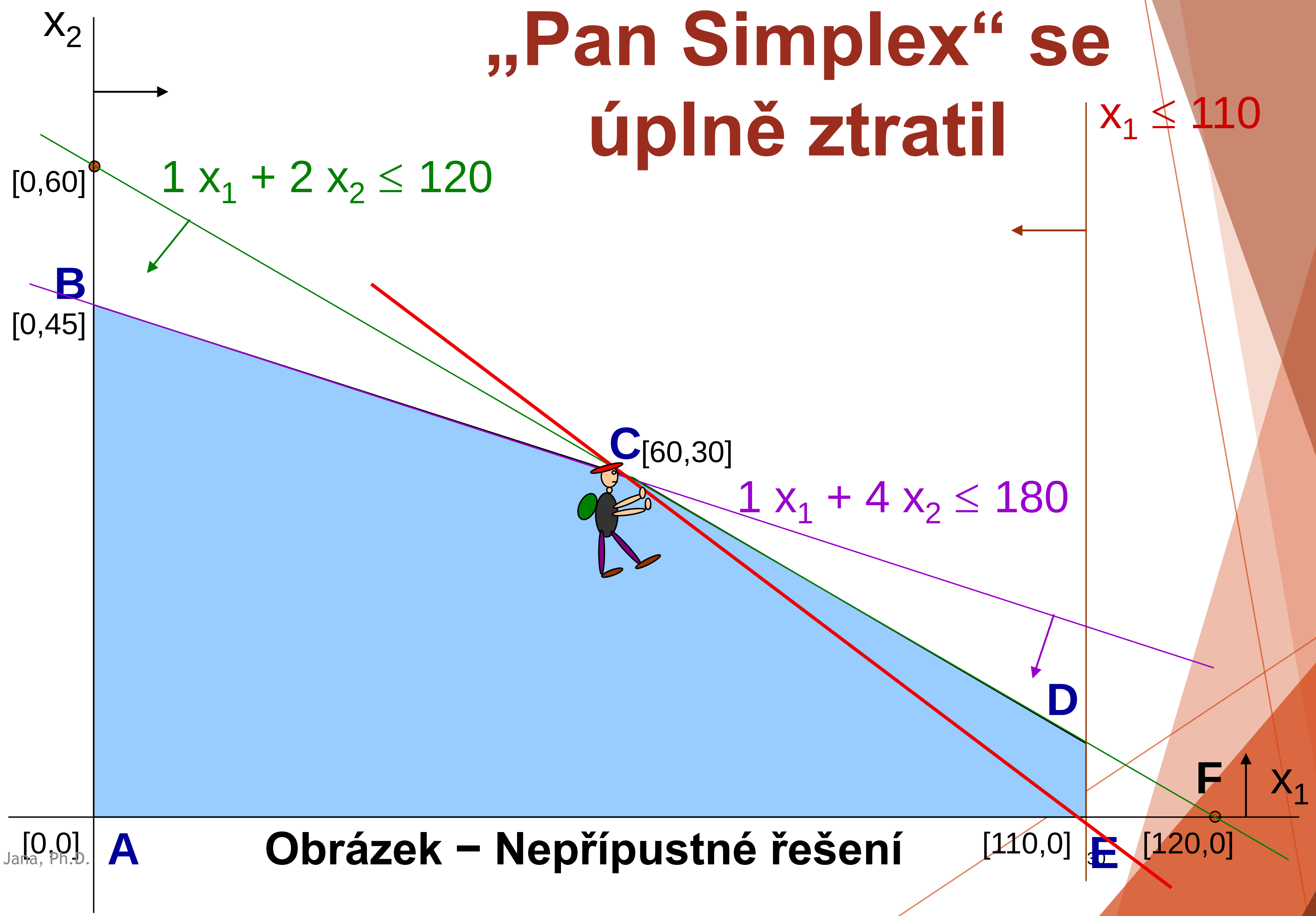
4.2.2 Chybný výběr klíčového řádku

- Transformace:

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	2	1	0	0	120
x_4	0	2	-1	1	0	60
x_5	0	-2	-1	0	1	-10
z_j	0	20	40	0	0	4800

- Dostáváme nepřípustné řešení: $\boldsymbol{x_5 = -10}$
- Ve třetím řádku, který měl být správně klíčový, je záporná pravá strana (může jich být i více, zvolíme-li *t* ještě nevýhodněji)
- V grafickém řešení jsme se dostali mimo MPŘ (do bodu F)

„Pan Simplex“ se úplně ztratil



Obrázek – Nepřípustné řešení

4.2.3 Chyba v eliminaci

- Takových chyb může být velké množství, např.
  - odečteme od sebe řádky ST **v opačném pořadí** a dostaneme tak zápornou pravou stranu, tj. nepřípustné řešení
  - počítáme **eliminační metodou**, nikoliv metodou úplné eliminace a ztratíme tak jednotkové vektory, tj. kanonický tvar

4.2.3 Chyba v eliminaci

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i	t
x_3	1/2	0	1	-1/2	0	30	60
x_2	1/4	1	0	1/4	0	45	180
x_5	1	0	0	0	1	110	110
z_j	-25	0	0	15	0	2700	

$\cdot(-2)$

- Transformace: klíčový řádek transformujeme správně
- Chybně jsme však násobili druhý řádek (−2) a přičetli k němu první řádek (x_2 nemá jednotkový vektor a je záporná)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	0	2	−1	0	60
x_2	0	−2	1	−1	0	−60
x_5	0					
z_j	0					

4.2.4 Chybný zápis základních proměnných

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	b_i
x_3	1	2	**1**	0	0	0	0	120
x_4	1	4	0	**1**	0	0	0	180
x_5	1	-1	0	0	**-1**	0	1	90
y_1	1	0	0	0	0	1	**0**	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0	0	0
z_j	1	-1	0	0	-1	0	0	90

- Vidíme, že vektory „základních proměnných“ zapsaných v tabulce netvoří jednotkovou matici, je porušen kanonický tvar soustavy rovnic
- Jaký je správný zápis základních proměnných?

JAKÝ?

4. Simplexová metoda - závěr

- **Konečnost simplexové metody**
  - Degenerace
  - Modifikace pravidla pro volbu vstupující proměnné
  - Blandovo pravidlo
- **Kontrola výpočtu v simplexové tabulce**
  - Následky chyb při výpočtu
- **Obecné vyjádření simplexové tabulky**

4. Simplexová metoda - závěr

- **Konečnost simplexové metody**
  - Degenerace
  - Modifikace pravidla pro volbu vstupující proměnné
  - Blandovo pravidlo
- **Kontrola výpočtu v simplexové tabulce**
  - Následky chyb při výpočtu
- **Obecné vyjádření simplexové tabulky**

4.3 Obecné vyjádření ST

- Výchozí řešení:

$\mathbf{A}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}$
$-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$	0

kde je … $\mathbf{A}_{[m\times n]}$ matice strukturních koeficientů a_{ij}

$\mathbf{b}_{[m\times 1]}$ vektor pravých stran omezení b_i

$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}{}_{[1\times n]}$ vektor cenových koeficientů c_j

$\mathbf{I}_{[m\times m]}$ jednotková matice

4.3 Obecné vyjádření ST

Báze:

- Vektory strukturních koeficientů základních proměnných v s-té iteraci tvoří **bázi $\mathbf{B}_s$**
- K matici báze $\mathbf{B}_s$ existuje vždy inverzní matice báze $\mathbf{B}_s^{-1}$

Báze výchozího řešení:

- Báze výchozího řešení je jednotková
- Najdeme ji ve sloupcích přídatných proměnných
- Tam rovněž najdeme inverzní matici $\mathbf{B}_s^{-1}$

Báze: Vektory strukturních koeficientů základních proměnných v s-té iteraci tvoří **bázi $\mathbf{B}_s$**

Matice báze $\mathbf{B}_s$

Výchozí řešení:

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

Tabulka s-té iterace ($s = 1$):

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

<u>Inverzní matice báze $\mathbf{B}_s^{-1}$</u>: Vektory transformovaných strukturních koeficientů z s-té iterace pro základní proměnné z výchozího řešení

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

<u>Tabulka s-té iterace ($s = 1$):</u>

Inverzní matice báze $\mathbf{B}_s^{-1}$

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

4.3 Obecné vyjádření ST

Báze s-té iterace:

- Vektory matice báze s-té iterace $\mathbf{B}_s$ najdeme **ve výchozí simplexové tabulce** ve sloupcích základních proměnných s-té iterace
- **Inverzní matice báze $\mathbf{B}_s^{-1}$** je v tabulce s-té iterace na místě výchozí báze, tj. ve sloupcích proměnných, které byly ve výchozí tabulce základní

Báze: Vektory strukturních koeficientů základních proměnných v s-té iteraci tvoří **bázi $\mathbf{B}_s$**

Matice báze $\mathbf{B}_s$

Výchozí řešení:

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

Tabulka s-té iterace ($s = 2$):

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1/2	0	1	-1/2	0	30
x_2	1/4	1	0	1/4	0	45
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-25	0	0	15	0	2700

Inverzní matice báze $\mathbf{B}_s^{-1}$: Vektory transformovaných strukturních koeficientů z s-té iterace pro základní proměnné z výchozího řešení

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

Tabulka s-té iterace ($s = 2$):

Inverzní matice báze $\mathbf{B}_s^{-1}$

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1/2	0	1	-1/2	0	30
x_2	1/4	1	0	1/4	0	45
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-25	0	0	15	0	2700

4.3 Obecné vyjádření ST

- Matici báze rozšíříme o řádek účelové funkce:

$\mathbf{B_s}$	$\mathbf{0}$
$-\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$	1

- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$ je vektor **cen základních proměnných**
- Tato matice má plnou hodnost $(m+1)$ a existuje k ní matice inverzní:

$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	1

4.3 Obecné vyjádření ST

- Transformace výchozí tabulky matematicky odpovídá přenásobení výchozí ST touto inverzní maticí zleva:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{B}_s^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1} & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{b} \\ \hline -\mathbf{c}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{B}_s^{-1} & \mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}} & \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1} & \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \end{array}$$

4.3 Obecné vyjádření ST

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

kde je:

- $\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$ matice transformovaných strukturních koeficientů
- $\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$ vektor hodnot základních proměnných
- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ koeficienty z_j u strukturních proměnných (redukované ceny)
- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$ koeficienty z_j u přídatných proměnných (stínové ceny)
- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$ hodnota účelové funkce

4.3 Obecné vyjádření ST

Výchozí řešení:

$\mathbf{A}$

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	2	1	0	0	
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

$\mathbf{A}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}$
$-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$	0

Tabulka s-té iterace ($s = 2$):

$\mathbf{B}_s^{-1}$

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1/2	0	1	-1/2	0	
x_2	1/4	1	0	1/4	0	45
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-25	0	0	15	0	2700

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

4.3 Obecné vyjádření ST

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

$$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 1/4 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1/2	0	1	-1/2	0	30
x_2	1/4	1	0	1/4	0	45
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-25	0	0	15	0	2700

4.3 Obecné vyjádření ST

$\mathbf{A}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}$
$-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$	0

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}=\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$$

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 3.8 – 3.10

KONEC