4EK213 – Lineární modely

5. Dualita v úlohách LP

5. Dualita v úlohách LP

- Obecné vyjádření simplexové tabulky
- Formulace duálního problému
  - Formulace symetrického duálního problému
  - Formulace nesymetrického duálního problému
- Věty o dualitě
  - Věta o dualitě
  - Důsledky věty o dualitě
  - Věta o rovnováze

5. Dualita v úlohách LP

- **Obecné vyjádření simplexové tabulky**
- Formulace duálního problému
  - Formulace symetrického duálního problému
  - Formulace nesymetrického duálního problému
- Věty o dualitě
  - Věta o dualitě
  - Důsledky věty o dualitě
  - Věta o rovnováze

5.1 Obecné vyjádření ST

- Výchozí řešení:

$\mathbf{A}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}$
$-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$	0

kde je … $\mathbf{A}_{[m\times n]}$ matice strukturních koeficientů a_{ij}

$\mathbf{b}_{[m\times 1]}$ vektor pravých stran omezení b_i

${\mathbf{c}^{\mathrm{T}}}_{[1\times n]}$ vektor cenových koeficientů c_j

$\mathbf{I}_{[m\times m]}$ jednotková matice

5.1 Obecné vyjádření ST

Báze:

- Vektory strukturních koeficientů základních proměnných v s-té iteraci tvoří **bázi $\mathbf{B}_s$**
- K matici báze $\mathbf{B}_s$ existuje vždy inverzní matice báze $\mathbf{B}_s^{-1}$

Báze výchozího řešení:

- Báze výchozího řešení je jednotková
- Najdeme ji ve sloupcích přídatných proměnných
- Tam rovněž najdeme inverzní matici $\mathbf{B}_s^{-1}$

Báze: Vektory strukturních koeficientů základních proměnných v s-té iteraci tvoří **bázi $\mathbf{B}_s$**

Matice báze $\mathbf{B}_s$

Výchozí řešení:

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

Tabulka s-té iterace ($s = 1$):

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

Inverzní matice báze $\mathbf{B}_s^{-1}$: Vektory transformovaných strukturních koeficientů z s-té iterace pro základní proměnné z výchozího řešení

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

Tabulka s-té iterace ($s = 1$):

Inverzní matice báze $\mathbf{B}_s^{-1}$

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

5.1 Obecné vyjádření ST

Báze s-té iterace:

- Vektory matice báze s-té iterace $\mathbf{B}_s$ najdeme **ve výchozí simplexové tabulce** ve sloupcích základních proměnných s-té iterace
- **Inverzní matice báze $\mathbf{B}_s^{-1}$** je v tabulce s-té iterace na místě výchozí báze, tj. ve sloupcích proměnných, které byly ve výchozí tabulce základní

Báze: Vektory strukturních koeficientů základních proměnných v s-té iteraci tvoří **bázi $\mathbf{B}_s$**

Matice báze $\mathbf{B}_s$

Výchozí řešení:

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

Tabulka s-té iterace ($s = 2$):

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1/2	0	1	-1/2	0	30
x_2	1/4	1	0	1/4	0	45
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-25	0	0	15	0	2700

Inverzní matice báze $\mathbf{B}_s^{-1}$: Vektory transformovaných strukturních koeficientů z s-té iterace pro základní proměnné z výchozího řešení

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

Tabulka s-té iterace ($s = 2$):

Inverzní matice báze $\mathbf{B}_s^{-1}$

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1/2	0	1	-1/2	0	30
x_2	1/4	1	0	1/4	0	45
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-25	0	0	15	0	2700

5.1 Obecné vyjádření ST

- Matici báze rozšíříme o řádek účelové funkce:

$\mathbf{B_s}$	$\mathbf{0}$
$-\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$	1

- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$ je vektor **cen základních proměnných**
- Tato matice má plnou hodnost $(m+1)$ a existuje k ní matice inverzní:

$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	1

5.1 Obecné vyjádření ST

- Transformace výchozí tabulky matematicky odpovídá přenásobení výchozí ST touto inverzní maticí zleva:

$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	1

$\cdot$

$\mathbf{A}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}$
$-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$	0

$=$

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

5.1 Obecné vyjádření ST

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

kde je:

- $\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$ matice transformovaných strukturních koeficientů
- $\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$ vektor hodnot základních proměnných
- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$ koeficienty z_j u strukturních proměnných (redukované ceny)
- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$ koeficienty z_j u přídatných proměnných (stínové ceny)
- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$ hodnota účelové funkce

5.1 Obecné vyjádření ST

Výchozí řešení:

$\mathbf{A}$

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	2	1	0	0	
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-40	-60	0	0	0	0

$\mathbf{A}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}$
$-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$	0

Tabulka s-té iterace ($s = 2$):

$\mathbf{B}_s^{-1}$

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1/2	0	1	-1/2	0	
x_2	1/4	1	0	1/4	0	45
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-25	0	0	15	0	2700

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

5.1 Obecné vyjádření ST

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

$$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 1/4 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Proměnné	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1/2	0	1	-1/2	0	30
x_2	1/4	1	0	1/4	0	45
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	-25	0	0	15	0	2700

5.1 Obecné vyjádření ST

$\mathbf{A}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}$
$-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$	0

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}=\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$$

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$

5. Dualita v úlohách LP

- **Obecné vyjádření simplexové tabulky**
- Formulace duálního problému
  - Formulace symetrického duálního problému
  - Formulace nesymetrického duálního problému
- Věty o dualitě
  - Věta o dualitě
  - Důsledky věty o dualitě
  - Věta o rovnováze

5. Dualita v úlohách LP

- Obecné vyjádření simplexové tabulky
- Formulace duálního problému
  - Formulace symetrického duálního problému
  - Formulace nesymetrického duálního problému
- Věty o dualitě
  - Věta o dualitě
  - Důsledky věty o dualitě
  - Věta o rovnováze

5.2 Formulace duálního problému

- Ke každé úloze LP lze formulovat tzv. duální úlohu
- Původní úlohu LP nazýváme **primárním problémem** (P)
- Nově formulovanou úlohu pak nazýváme **duálním problémem** (D)

- Tyto dvě úlohy pak tvoří tzv. **duálně sdružené úlohy**
  - Tzn., že tvoří dvojici úloh, které mají specifické vlastnosti
  - Často říkáme pouze **sdružené úlohy**

5.2.1 Symetrický duální problém

- Předpokládejme, že primární úloha je typu I:
  - Maximalizační účelová funkce
  - Všechna vlastní omezení ve tvaru nerovností typu ≤
  - Strukturní proměnné s podmínkami nezápornosti
- Takovou úlohu můžeme matematicky zapsat:

Úloha LP typu I:

$$\max z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

Za podmínek:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

5.2.1 Symetrický duální problém

- Duální úloha je pak typu II:
  - Minimalizační účelová funkce
  - Všechna vlastní omezení ve tvaru nerovností typu $\geq$
  - Duální proměnné s podmínkami nezápornosti
- Tato úloha má navíc speciální tvar:

Úloha LP typu II:

$$\min f = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

Za podmínek:

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

5.2.1 Symetrický duální problém

- Předpokládejme, že primární úloha je typu I:

Úloha LP typu I:

$$\max z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

Za podmínek:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

- Duální úloha je pak typu II:

Úloha LP typu II:

$$\min f = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

Za podmínek:

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

5.2.1 Symetrický duální problém

- Naopak, pokud platí, že primární úloha je typu II, pak je duální úloha typu I.

Úloha LP typu I:

$$\max \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Úloha LP typu II:

$$\min \quad f = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

Primární problém $\longrightarrow$ Duální problém

Duální problém $\longleftarrow$ Primární problém

5.2.1 Symetrický duální problém

Úloha LP typu II:

$$\begin{aligned} \min \quad f &= \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \\ \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} &\geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{u}^{\mathrm{T}} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Rozepišme úlohy po složkách:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ \vdots \\ x_n \geq 0 \end{gathered}$$

$$\min f = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_mu_m$$

$$\begin{gathered} u_1 \geq 0 \\ u_2 \geq 0 \\ \vdots \\ u_m \geq 0 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m \geq c_1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m \geq c_2 \\ \vdots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m \geq c_n \end{gathered}$$

5.2.1 Symetrický duální problém

- Rozepišme úlohy po složkách:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ \vdots \\ x_n \ge 0 \end{gathered}$$

$$\min f = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_mu_m$$

$$\begin{gathered} u_1 \ge 0 \\ u_2 \ge 0 \\ \vdots \\ u_m \ge 0 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m \ge c_1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m \ge c_2 \\ \vdots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m \ge c_n \end{gathered}$$

5.2.1 Symetrický duální problém

- Rozepišme úlohy po složkách:

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \\ &\vdots \\ x_n &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\min f = b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_mu_m$$

$$\begin{aligned} u_1 &\ge 0 \\ u_2 &\ge 0 \\ &\vdots \\ u_m &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m &\ge c_1 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m &\ge c_2 \\ &\vdots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m &\ge c_n \end{aligned}$$

5.2.1 Symetrický duální problém

Úloha LP typu I:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Úloha LP typu II:

$$\begin{aligned} \min \quad f &= \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \\ \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} &\geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{u}^{\mathrm{T}} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Primární úloha má n strukturních proměnných a m vlastních omezení
- Duální úloha má m strukturních proměnných a n vlastních omezení
- Dualita je reciproční vztah: duální problém k duálnímu problému je primární problém

5.2.1 Symetrický duální problém

Úloha LP typu I:	Úloha LP typu II:
$\max \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$	$\min \quad f = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$
$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$

- Vlastním omezením (P) odpovídají podmínky nezápornosti (D)
- A naopak: vlastním omezením (D) odpovídají podmínky nezápornosti (P)
- Proto takto formulovaný (D) nazýváme

symetrický duální problém

5.2.1 Symetrický duální problém - příklad

Lis: $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Poptávka: $1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky: $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Produkce: $1\,x_1 + 1\,x_2 = 115$ [krabiček]
Nezápornost: $x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]

Zisk: $40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

JAKÝ TYP?

Úloha LP typu I:

$$\max \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Úloha LP typu II:

$$\min \quad f = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

5.2.1 Symetrický duální problém

Úloha LP typu I:	Úloha LP typu II:
$\max \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$	$\min \quad f = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$
$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$	$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$

- Každou úlohu LP lze převést na úlohu typu I
- Minimalizační funkci přenásobíme (-1) a změníme extrém
- Omezení typu $\geq$ přenásobíme (-1)
- Omezení typu $=$ rozložíme na dvě nerovnosti

JAK?

5.2.1 Symetrický duální problém - příklad

Lis: $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Poptávka: $1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky: $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Produkce: $1\,x_1 + 1\,x_2 = 115$ [krabiček]
Nezápornost: $x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]

Zisk: $40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

JAKÝ TYP?

Formulujte symetrický (D)

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

5.2.1 Symetrický duální problém - příklad

$$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$$
$$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$$
$$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$$
$$1\,x_1 + 1\,x_2 = 115$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$$

Úloha LP typu I:

$$\max \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

5.2.1 Symetrický duální problém - příklad

$$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$$
$$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$$
$$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$$
$$1\,x_1 + 1\,x_2 = 115$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$$

Úloha LP typu I:

$$\max \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

5.2.1 Symetrický duální problém - příklad

$$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$$
$$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$$
$$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$$
$$1\,x_1 + 1\,x_2 = 115$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$$

$$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$$

$$-1\,x_1 + 1\,x_2 \leq -90$$

Úloha LP typu I:

$$\max \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

5.2.1 Symetrický duální problém - příklad

$$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$$
$$-1\,x_1 + 1\,x_2 \leq -90$$
$$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$$
$$1\,x_1 + 1\,x_2 = 115$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$$

Úloha LP typu I:

$$\max \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

5.2.1 Symetrický duální problém - příklad

$$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$$
$$-1\,x_1 + 1\,x_2 \leq -90$$
$$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$$
$$1\,x_1 + 1\,x_2 = 115$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$$

$$1\,x_1 + 1\,x_2 = 115$$

$$1\,x_1 + 1\,x_2 \leq 115$$
$$1\,x_1 + 1\,x_2 \geq 115$$

Úloha LP typu I:

$$\max \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

5.2.1 Symetrický duální problém - příklad

$$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$$
$$-1\,x_1 + 1\,x_2 \leq -90$$
$$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$$
$$1\,x_1 + 1\,x_2 = 115$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$$

$$1\,x_1 + 1\,x_2 = 115$$

$$1\,x_1 + 1\,x_2 \leq 115$$
$$1\,x_1 + 1\,x_2 \geq 115$$

$$-1\,x_1 - 1\,x_2 \leq -115$$

Úloha LP typu I:

$$\max \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

5.2.1 Symetrický duální problém - příklad

$$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$$
$$-1\,x_1 + 1\,x_2 \leq -90$$
$$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$$
$$1\,x_1 + 1\,x_2 \leq 115$$
$$-1\,x_1 - 1\,x_2 \leq -115$$

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

$$z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$$

DUÁLNÍ PROBLÉM?

Úloha LP typu I:

$$\max \quad z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

5.2.1 Symetrický duální problém

Úloha LP typu II:

$$\min \quad f = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\
-1x_1 + 1x_2 &\leq -90 \\
1x_1 + 0x_2 &\leq 110 \\
1x_1 + 1x_2 &\leq 115 \\
-1x_1 - 1x_2 &\leq -115 \\
\\
x_1 \quad\quad &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
\\
z = 40x_1 + 60x_2 & \ldots \max
\end{aligned}$$

$$u_1 \geq 0$$
$$u_2 \geq 0$$
$$u_3 \geq 0$$
$$u_4 \geq 0$$
$$u_5 \geq 0$$

5.2.1 Symetrický duální problém

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\
-1x_1 + 1x_2 &\leq -90 \\
1x_1 + 0x_2 &\leq 110 \\
1x_1 + 1x_2 &\leq 115 \\
-1x_1 - 1x_2 &\leq -115
\end{aligned}
$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$z = 40x_1 + 60x_2 \ldots \max$$

$$u_1 \geq 0$$

$$u_2 \geq 0$$

$$u_3 \geq 0$$

$$u_4 \geq 0$$

$$u_5 \geq 0$$

Úloha LP typu II:

$$\min \quad f = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

5.2.1 Symetrický duální problém

Úloha LP typu II:

$$\min \quad f = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\
-1x_1 + 1x_2 &\leq -90 \\
1x_1 + 0x_2 &\leq 110 \\
1x_1 + 1x_2 &\leq 115 \\
-1x_1 - 1x_2 &\leq -115 \\
\\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
\\
z = 40x_1 + 60x_2 &\ldots \max
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1 &\geq 0 \\
u_2 &\geq 0 \\
u_3 &\geq 0 \\
u_4 &\geq 0 \\
u_5 &\geq 0 \\
\\
1u_1 - 1u_2 + 1u_3 + 1u_4 - 1u_5 &\geq 40
\end{aligned}$$

5.2.1 Symetrický duální problém

Úloha LP typu II:

$$\min \quad f = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\
-1x_1 + 1x_2 &\leq -90 \\
1x_1 + 0x_2 &\leq 110 \\
1x_1 + 1x_2 &\leq 115 \\
-1x_1 - 1x_2 &\leq -115 \\
\\
x_1 \qquad &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
\\
z = 40x_1 + 60x_2 &\ldots \max
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1 &\geq 0 \\
u_2 &\geq 0 \\
u_3 &\geq 0 \\
u_4 &\geq 0 \\
u_5 &\geq 0 \\
\\
1u_1 - 1u_2 + 1u_3 + 1u_4 - 1u_5 &\geq 40 \\
2u_1 + 1u_2 + 0u_3 + 1u_4 - 1u_5 &\geq 60
\end{aligned}$$

5.2.1 Symetrický duální problém

Úloha LP typu II:

$$\min \quad f = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\
-1x_1 + 1x_2 &\leq -90 \\
1x_1 + 0x_2 &\leq 110 \\
1x_1 + 1x_2 &\leq 115 \\
-1x_1 - 1x_2 &\leq -115
\end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

$$z = 40x_1 + 60x_2 \ldots \max$$

$$u_1 \geq 0$$
$$u_2 \geq 0$$
$$u_3 \geq 0$$
$$u_4 \geq 0$$
$$u_5 \geq 0$$

$$1u_1 - 1u_2 + 1u_3 + 1u_4 - 1u_5 \geq 40$$
$$2u_1 + 1u_2 + 0u_3 + 1u_4 - 1u_5 \geq 60$$

$$f = 120u_1 - 90u_2 + 110u_3 + 115u_4 - 115u_5 \ldots \min$$

5.2.1 Symetrický duální problém

Úloha LP typu II:

$$\min \quad f = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\
-1x_1 + 1x_2 &\leq -90 \\
1x_1 + 0x_2 &\leq 110 \\
1x_1 + 1x_2 &\leq 115 \\
-1x_1 - 1x_2 &\leq -115 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

$$z = 40x_1 + 60x_2 \ldots \max$$

$$\begin{aligned}
u_1 &\geq 0 \\
u_2 &\geq 0 \\
u_3 &\geq 0 \\
u_4 &\geq 0 \\
u_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

$$1u_1 - 1u_2 + 1u_3 + 1u_4 - 1u_5 \geq 40$$
$$2u_1 + 1u_2 + 0u_3 + 1u_4 - 1u_5 \geq 60$$
$$f = 120u_1 - 90u_2 + 110u_3 + 115u_4 - 115u_5 \ldots \min$$

5.2.1 Symetrický duální problém

Úloha LP typu I:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Úloha LP typu II:

$$\begin{aligned} \min \quad f &= \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \\ \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} &\geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{u}^{\mathrm{T}} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Každou úlohu LP lze převést na úlohu typu II
- Maximalizační funkci přenásobíme (-1) a změníme extrém
- Omezení typu $\leq$ přenásobíme (-1)
- Omezení typu $=$ rozložíme na dvě nerovnosti

JAK?

5. Dualita v úlohách LP

- Obecné vyjádření simplexové tabulky
- Formulace duálního problému
  - Formulace symetrického duálního problému
  - Formulace nesymetrického duálního problému
- Věty o dualitě
  - Věta o dualitě
  - Důsledky věty o dualitě
  - Věta o rovnováze

Detaily k přednášce: skripta, kapitoly 3.10 a 4.1 – 4.3

KONEC