4EK213 – Lineární modely

7. Postoptimalizační analýza – stabilita

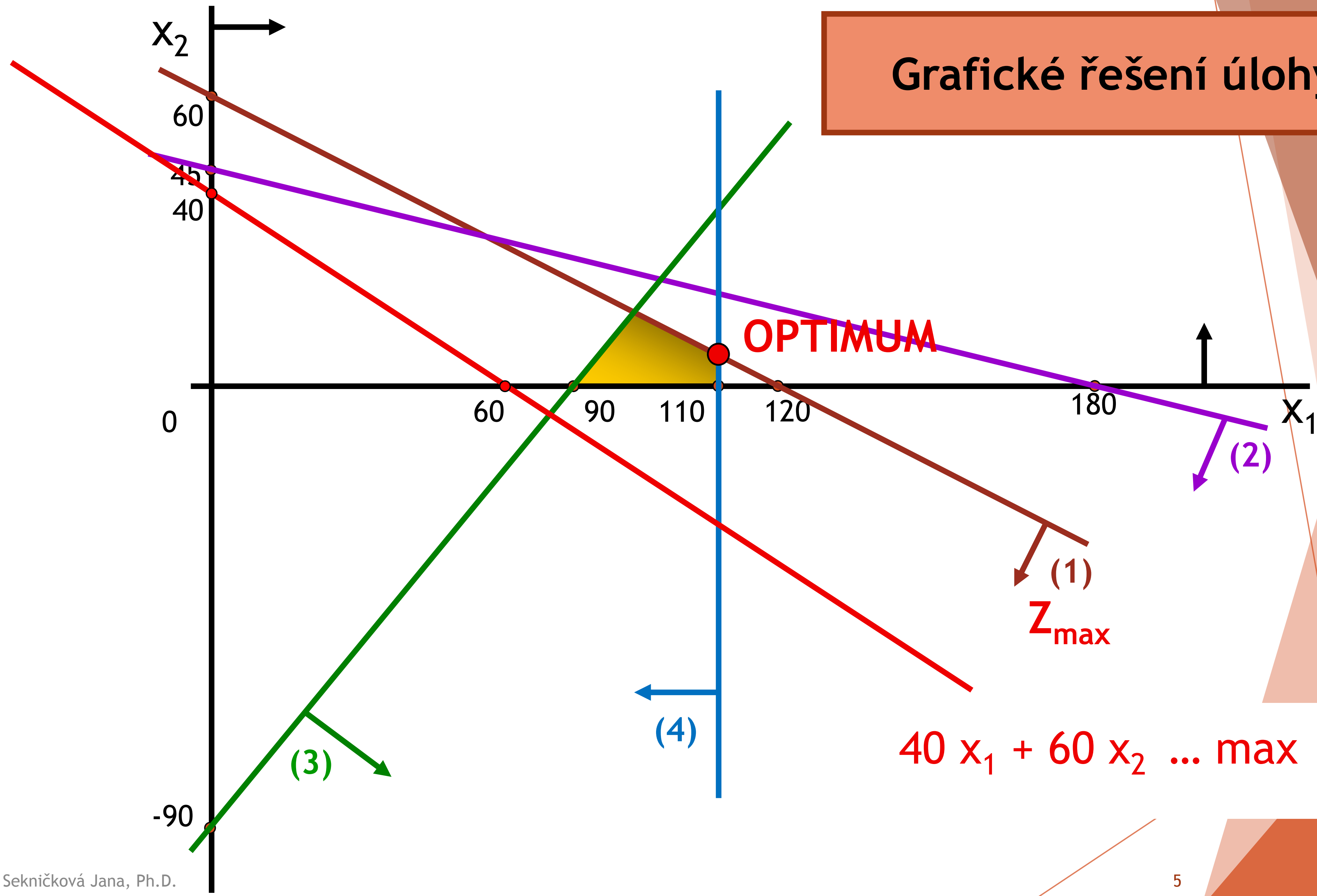
7. Postoptimalizační analýza

- **Analýza citlivosti (intervaly stability)**
  - Pravých stran
  - Cenových koeficientů (cen)
- **Postoptimalizační změny**
  - Změna pravých stran
  - Změna cenových koeficientů (cen)
  - Změna v počtu procesů (proměnných) – přidání a ubrání
  - Změna v počtu činitelů (omezení) – přidání a ubrání

Motivační příklad – matematický model

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [min]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

Grafické řešení úlohy LP



$40\ x_1 + 60\ x_2\ \dots\ \max$

Motivační příklad - grafické řešení

- **Optimální řešení** zadané úlohy leží na průsečíku dvou hraničních přímek omezení (1) a (4):

$$x_1 + 2x_2 = 120$$
$$x_1 \qquad\quad = 110$$

- Odtud je $x_1 = 110, x_2 = 5$
- Bod optimálního řešení je tedy

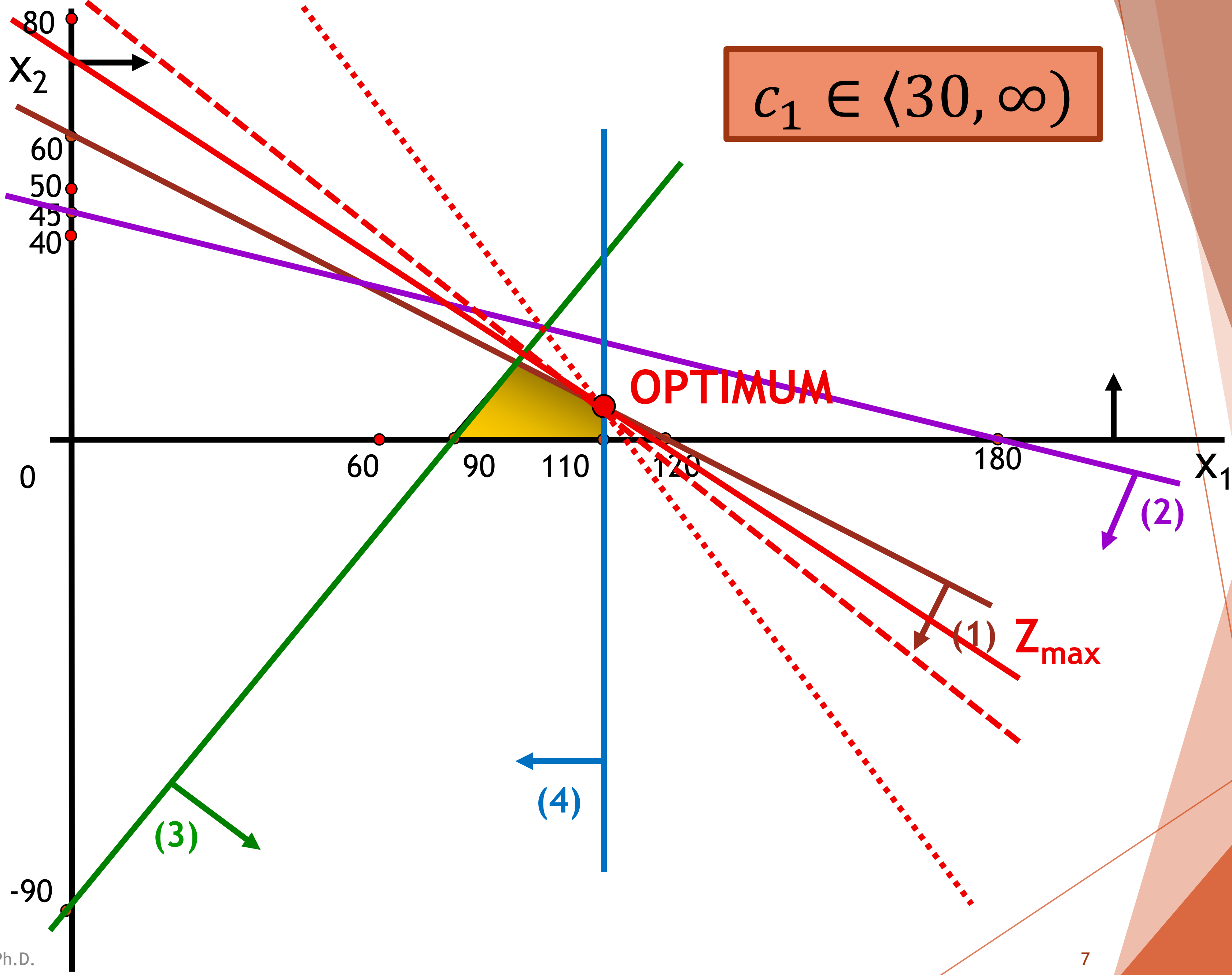
$$\mathbf{x}^* = [110, 5]$$

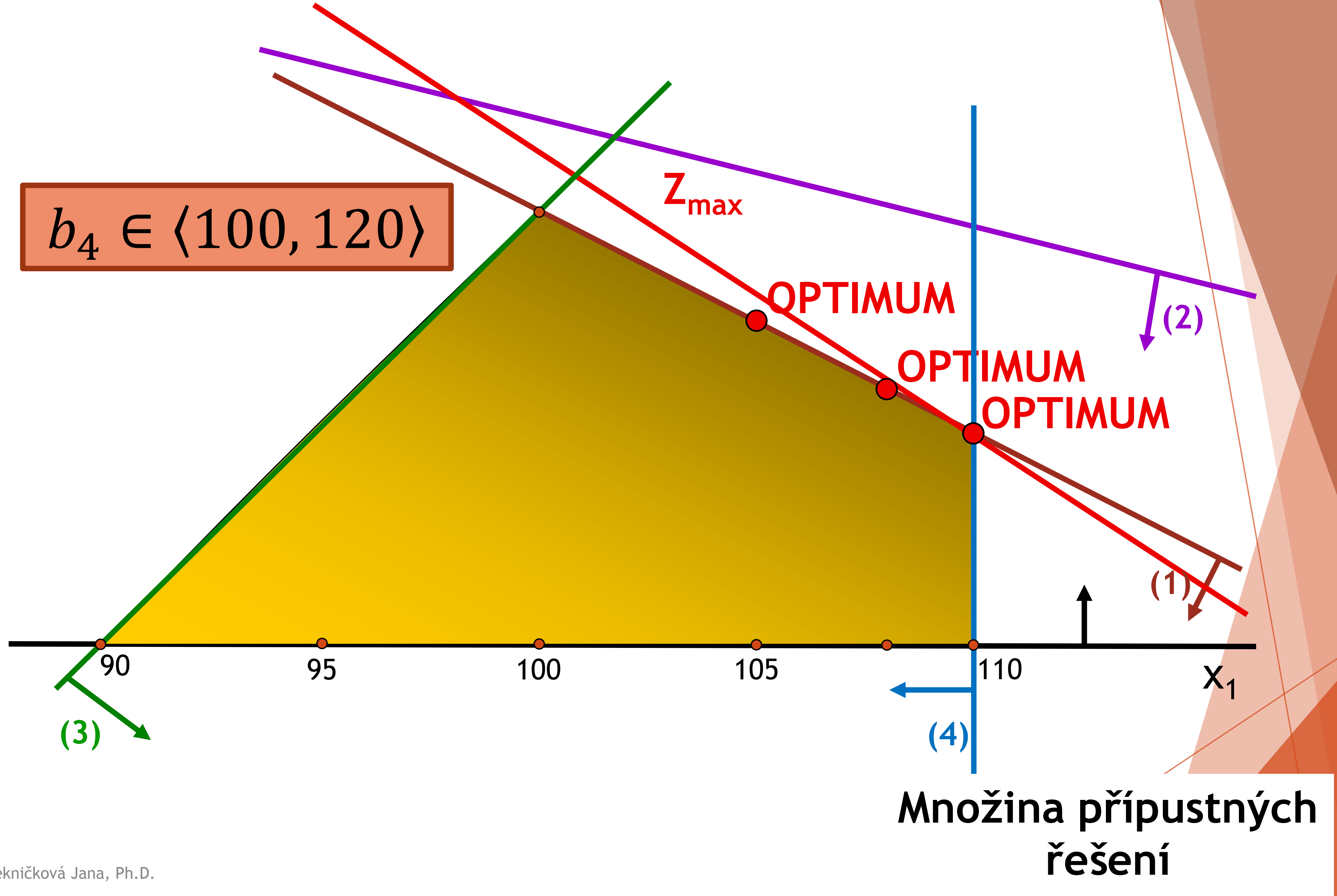
- Hodnota účelové funkce je po dosazení

$$z = 40x_1 + 60x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 5 = 4700$$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [min]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2$ ... max [Kč]

$$c_1 \in \langle 30, \infty)$$





$b_4 \in \langle 100, 120 \rangle$
Z_{max}
OPTIMUM
OPTIMUM
OPTIMUM
(1)
(2)
(3)
(4)
90
95
100
105
110
x_1
Množina přípustných řešení

7. Analýza citlivosti

- Analýza citlivosti stanoví meze možných změn:
  - Pravých stran omezení b_i
  - Cenových koeficientů (cen) c_j
  - Strukturních koeficientů a_{ij}
- Pokud se hodnota b_i, c_j, popř. a_{ij} pohybuje v těchto mezích, není porušena optimalita současného řešení
  - Nemění se báze primárního problému
  - Nemění se duální proměnné

7. Analýza citlivosti

- Analýza citlivosti vychází z obecného maticového vyjádření simplexové tabulky v s–té iteraci:

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

- Ukážeme, jaký vliv má na řešení v s-té iteraci změna:
  - pravých stran omezení
  - cenových koeficientů

7. Postoptimalizační analýza

- **Analýza citlivosti (intervaly stability)**
  - Pravých stran
  - Cenových koeficientů (cen)
- **Postoptimalizační změny**
  - Změna pravých stran
  - Změna cenových koeficientů (cen)
  - Změna v počtu procesů (proměnných) – přidání a ubrání
  - Změna v počtu činitelů (omezení) – přidání a ubrání

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

- Jednou z podmínek optimality řešení je nezápornost pravých stran
- Pro transformované pravé strany tedy musí platit
$$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$
- Jestliže se změní některá pravá strana, může být tento vztah porušen
- Předpokládejme, že se změní pouze b_p, tj. pravá strana v p–tém omezení

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

- Podle podmínek nezápornosti musí být

$$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}^* \geq \mathbf{0}$$

- kde ve vektoru $\mathbf{b}^*$ jsou všechny složky rovny původním hodnotám (tedy konstanty), až na p-tou, která je $b_p^* = b_p + \Delta b_p$

$$\mathbf{b}^* = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{p-1} \\ b_p^* \\ b_{p+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{p-1} \\ b_p + \Delta b_p \\ b_{p+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{p-1} \\ b_p \\ b_{p+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta b_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

- Vztah $\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}^* \geq \mathbf{0}$ rozepíšeme
$$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}^* = \mathbf{B}_s^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) = \mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{B}_s^{-1}\Delta\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$
- Dostaneme soustavu nerovnic:
$$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{B}_s^{-1}\Delta\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$
- A odtud
$$\mathbf{B}_s^{-1}\Delta\mathbf{b} \geq -\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$$
- Ze soustavy nerovnic stanovíme:
  - dolní mez přípustné změny p-té pravé strany d_p
  - horní mez přípustné změny p-té pravé strany h_p
- Interval stability:
$$b_p^* \in \langle b_p + d_p, b_p + h_p \rangle$$

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

- Lze odvodit přímo obecný vzorec pro dolní a horní mez přípustné změny ze vztahu
$$\mathbf{B}_s^{-1}\Delta\mathbf{b} \geq -\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$$
- Po roznásobení:
$$\mathbf{b}_p \cdot \Delta b_p \geq -\mathbf{b}^s$$
  - kde $\mathbf{b}_p$ je p-tý sloupec inverzní matice báze
  - a $\mathbf{b}^s$ je vektor transformovaných pravých stran
- Rozepsáním po složkách:
$$b_{ip} \cdot \Delta b_p \geq -b_i^s$$

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

- Pokud $b_{ip} > 0$, musí platit $\Delta b_p \geq \frac{-b_i^s}{b_{ip}}$
  - A tedy $\Delta b_p \geq \max_{b_{ip}>0} \frac{-b_i^s}{b_{ip}}$
- Pokud $b_{ip} < 0$, musí platit $\Delta b_p \leq \frac{-b_i^s}{b_{ip}}$
  - A tedy $\Delta b_p \leq \min_{b_{ip}<0} \frac{-b_i^s}{b_{ip}}$
- Přípustná změna je tedy:

$$\boxed{b_{ip} \cdot \Delta b_p \geq -b_i^s}$$

$$\boxed{\max_{b_{ip} > 0} \frac{-b_i^s}{b_{ip}} \leq \Delta b_p \leq \min_{b_{ip} < 0} \frac{-b_i^s}{b_{ip}}}$$

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

- Nebo přímo vztah $\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}^* \geq \mathbf{0}$ rozepíšeme po složkách
- Dostaneme soustavu m nerovnic, které omezí přímo hodnotu pravé strany b_p^*
- Ze soustavy nerovnic stanovíme:
  - dolní mez hodnoty p-té pravé strany d_p
  - horní mez hodnoty p-té pravé strany h_p
- Leží-li pravá strana p-tého omezení v intervalu

$$b_p^* \in \langle d_p, h_p \rangle$$

  - není porušena primární přípustnost a tedy ani optimalita řešení
  - Báze B_s zůstává optimální

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

- Základní proměnné zůstávají tytéž, mohou se ale změnit jejich hodnoty
- Rovněž hodnota účelové funkce se může změnit

$$\mathbf{z}^* = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{b}^*$$

- Jak ovlivní případná změna pravé strany v rámci intervalu stability duální proměnné?
  - neovlivní
  - $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_s^{-1}$

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

Příklad

- Je dána úloha LP:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\
x_1 + 4x_2 &\leq 180 \\
x_1 \qquad &\leq 110 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$z = 40x_1 + 60x_2 \dots max$$

- Tabulka optimálního řešení:
- $\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 0)^{\mathrm{T}}$
- $z^* = 4\,700$
- $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = (30, 0, 10, 0, 0)$
- $f^* = 4\,700$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	0	0	0	1	110
x_2	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	5
x_4	0	0	-2	1	1	50
z_j	0	0	30	0	10	4 700

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

Příklad

- Je dána úloha LP:

$$x_1 + 2x_2 \leq 120$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 180$$
$$x_1 \qquad\quad \leq 110$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z = 40x_1 + 60x_2 \ldots max$$

- $\mathbf{B}_s^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ {}^1\!/_2 & 0 & -{}^1\!/_2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \\ 110 \end{pmatrix}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	0	0	0	1	110
x_2	0	1	${}^1\!/_2$	0	$-{}^1\!/_2$	5
x_4	0	0	-2	1	1	50
z_j	0	0	30	0	10	4 700

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

Příklad - způsob 1

- Určete interval stability b_1
- $\mathbf{B}_s^{-1} \cdot \mathbf{b}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ 180 \\ 110 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Rozepíšeme po složkách:
  - $110 \geq 0$
  - $1/2 \cdot b_1 - 1/2 \cdot 110 \geq 0 \quad \rightarrow b_1 \geq 110$
  - $-2 \cdot b_1 + 180 + 110 \geq 0 \quad \rightarrow b_1 \leq 145$

$$\boxed{b_1 \in \langle 110{,}145 \rangle}$$

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

Příklad

- Interval stability b_1: $b_1 \in \langle 110{,}145 \rangle$
  - dolní mez hodnoty první pravé strany $d_1 = 110$
  - horní mez hodnoty první pravé strany $h_1 = 145$
- Pro všechny hodnoty pravé strany prvního omezení z tohoto intervalu zůstává řešení optimální
- Proměnné x_1, x_2 a x_4 zůstanou základní
- Hodnoty duálních proměnných se nezmění

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

Příklad - Ekonomická interpretace $b_1 \in \langle 110{,}145 \rangle$

- Firma vyráběla šroubky a matice
- Výroba byla omezena disponibilním časem na lisu a disponibilním časem balicí linky
- Firma mohla vyrobit maximálně 110 krabiček šroubků

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2\mathrm{x}_2 &\le 120 \\
x_1 + 4x_2 &\le 180 \\
x_1 \qquad &\le 110 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

$$z = 40x_1 + 60x_2 \ldots max$$

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

Příklad - Ekonomická interpretace $b_1 \in \langle 110,145 \rangle$

- bude-li disponibilní čas lisu alespoň 110 minut a nanejvýše 145 minut,
- pro firmu bude nadále optimální vyrábět šroubky i matice (x_1 a x_2 základní)
- disponibilní čas balicí linky bude stále nevyčerpán (x_4)
- stínové ceny minuty lisu a balicí linky a počtu krabiček šroubků se nezmění (u_1, u_2, u_3)
- nezmění se ani redukované ceny šroubků a matic (u_4, u_5)

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

$b_1 \in \langle 110{,}145 \rangle$

Příklad - změna b_1

- Dojde ke změně času na lisu na 130 minut. Změní se báze optimálního řešení?
- $b_1^* = 130, b_1^* \in \langle 110{,}145 \rangle$ - optimalita nebude porušena

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

Příklad - změna b_1

- Spočítáme nové transformované pravé strany:
- $\mathbf{b}^s = \mathbf{B}_s^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 180 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 25 \\ 5 \end{pmatrix}$

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

Příklad - změna b_1

$b_1 \in \langle 110{,}145 \rangle$

- Dojde ke změně času na lisu na 130 minut. Změní se báze optimálního řešení?
- $b_1^* = 130, b_1^* \in \langle 110{,}145 \rangle$ - optimalita nebude porušena
- $\mathbf{x}^* = (110, 25, 0, 5, 0)^{\mathrm{T}}$
- $z^* = 5\,000$
- $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = (30, 0, 10, 0, 0)$
- $f^* = 5\,000$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	0	0	0	1	110
x_2	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	25
x_4	0	0	-2	1	1	5
z_j	0	0	30	0	10	5 000

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

$b_1 \in \langle 110{,}145 \rangle$

Příklad - změna b_1

- Dojde ke změně času na lisu na 90 minut. Změní se báze optimálního řešení?
- $b_1^* = 90, b_1^* \notin \langle 110{,}145 \rangle$ - optimalita bude porušena

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

Příklad - změna b_1

- Spočítáme nové transformované pravé strany:
- $\mathbf{b}^s = \mathbf{B}_s^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 180 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ -10 \\ 110 \end{pmatrix}$

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

$b_1 \in \langle 110{,}145 \rangle$

Příklad - změna b_1

- Dojde ke změně času na lisu na 90 minut. Změní se báze optimálního řešení?
- $b_1^* = 90, b_1^* \notin \langle 110{,}145 \rangle$ - optimalita bude porušena
- $\mathbf{x} = (110, -10, 0, 110, 0)^{\mathrm{T}}$
- $z = 3\,800$
- $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = (30, 0, 10, 0, 0)$
- $f = 3\,800$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	0	0	0	1	110
x_2	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	-10
x_4	0	0	-2	1	1	110
z_j	0	0	30	0	10	3 800

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

Příklad - změna b_1

- Jak najdeme OŘ?
- $\mathbf{x}^* = (90, 0, 0, 90, 20)^{\mathrm{T}}$
- $z^* = 3\,600$
- $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = (40, 0, 0, 0, 20)$
- $f^* = 3\,600$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	0	0	0	1	110
x_2	0	1	$^1/_2$	0	$-^1/_2$	-10
x_4	0	0	-2	1	1	110
z_j	0	0	30	0	10	3 800

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	2	1	0	0	90
x_5	0	-2	-1	0	1	20
x_4	0	2	-1	1	0	90
z_j	0	20	40	0	0	3 600

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

Příklad - změna b_1

- $\mathbf{x}^* = (90, 0, 0, 90, 20)^{\mathrm{T}}$
- $z^* = 3\,600$
- $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = (40, 0, 0, 0, 20)$
- $f^* = 3\,600$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	2	1	0	0	90
x_5	0	-2	-1	0	1	20
x_4	0	2	-1	1	0	90
z_j	0	20	40	0	0	3 600

- Změnila se báze: proměnnou x_2 nahradila proměnná x_5
- Změnily se i hodnoty duálních proměnných

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

Příklad - intervaly stability pravých stran - způsob 2

$$\boxed{\mathbf{B}_s^{-1}\Delta\mathbf{b} \geq -\mathbf{b}^s}$$

- $\mathbf{B}_s^{-1} \cdot \Delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -110 \\ -5 \\ -50 \end{pmatrix}$
- $0 \geq -110$
- $1/2 \cdot \Delta b_1 \geq -5 \quad \rightarrow \quad \Delta b_1 \geq -10$
- $-2 \cdot \Delta b_1 \geq -50 \quad \rightarrow \quad \Delta b_1 \leq 25$
- $\Delta b_1 \in \langle -10, 25 \rangle$
- $b_1 \in \langle 120 - 10, 120 + 25 \rangle \rightarrow b_1 \in \langle 110, 145 \rangle$

7.1 Analýza citlivosti pravých stran

Příklad - intervaly stability pravých stran - způsob 3

$$\max \frac{-b_i^s}{b_{ip} > 0} \leq \Delta b_p \leq \min \frac{-b_i^s}{b_{ip} < 0}$$

- $b_1 \in \langle 110{,}145 \rangle$
- $b_2 \in \langle 130, \infty)$
- $b_3 \in \langle 60{,}120 \rangle$

	x_3	x_4	x_5	$-b_i^s$	Δb_1	Δb_2	Δb_3
x_1	0	0	1	-110	–	–	**−110**
x_2	$1/2$	0	$-1/2$	-5	**−10**	–	**10**
x_4	-2	1	1	-50	**25**	**−50**	**−50**
b_i					120	180	110

7. Postoptimalizační analýza

- **Analýza citlivosti (intervaly stability)**
  - Pravých stran
  - Cenových koeficientů (cen)
- **Postoptimalizační změny**
  - Změna pravých stran
  - Změna cenových koeficientů (cen)
  - Změna v počtu procesů (proměnných) – přidání a ubrání
  - Změna v počtu činitelů (omezení) – přidání a ubrání

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

- Druhou z podmínek optimality řešení maximalizační úlohy je nezápornost koeficientů v řádce účelové funkce z_j
- Pro koeficienty řádky účelové funkce tedy musí platit

$$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1} \geq \mathbf{0}$$

- Jestliže se změní některý cenový koeficient, může být tento vztah porušen
- Koeficient z_j je podle obecného vzorce:

$$z_j = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}a_j - c_j$$

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

- Odtud je zřejmé, že změna ceny nezákladní proměnné má na optimalitu řešení jiný vliv než změna ceny základní proměnné

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

1. Interval stability ceny nezákladní proměnné x_k

- Změní se cena nezákladní proměnné x_k na hodnotu $c_k^* = c_k + \Delta c_k$
  - změní se jedna složka vektoru $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$
  - vektor $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$ se nezmění

$$\boxed{z_j = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{s}}^{-\mathbf{1}} a_j - c_j}$$

- Ze vzorce je zřejmé, že všechna z_j zůstanou stejná až na koeficient z_k^*

$$z_k^* = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{s}}^{-\mathbf{1}} a_k - (c_k + \Delta c_k) = z_k - \Delta c_k$$

  - kde Δc_k je velikost změny c_k
- Podmínka zachování optimality řešení:

$$z_k^* \geq 0, \text{ a tedy } z_k - \Delta c_k \geq 0$$

- Řešení zůstává optimální, pokud $\Delta c_k \leq z_k$

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

1. Interval stability ceny nezákladní proměnné x_k

- Řešení zůstává optimální, pokud $\Delta c_k \leq z_k$
- Odtud je zřejmé, že změna ceny nezákladní proměnné v maximalizační úloze není zdola omezená, tj. $-\infty < \Delta c_k$
- Povolená změna ceny je tedy $-\infty < \Delta c_k \leq z_k$
- Neboť $c_k^* = c_k + \Delta c_k$, platí $-\infty < c_k + \Delta c_k \leq c_k + z_k$
- Interval stability pro c_j je $c_k^* \in \langle d_k, h_k \rangle$
  - dolní mez hodnoty j-tého cenového koeficientu $d_k = -\infty$
  - horní mez hodnoty j-tého cenového koeficientu $h_k = c_k + z_k$

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

1. Interval stability ceny nezákladní proměnné x_k

- Interval stability pro c_k je

$$c_k^* \in (-\infty\ , c_k + z_k\rangle$$

- Odtud je zřejmé, že cena nezákladní proměnné v maximalizační úloze může klesat neomezeně
- Růst je omezen původní hodnotou ceny zvýšenou o redukovanou cenu z_k

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

2. Interval stability ceny <u>základní</u> proměnné x_k

- Změní se cena základní proměnné x_k na hodnotu

$$c_k^* = c_k + \Delta c_k$$

  - změní se jedna složka vektoru $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$
  - vektor $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$ se také změní

- Ze vzorce je zřejmé, že se obecně změní všechny koeficienty z_j^*

$$z_j^* = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_s^{-1} a_j - c_j$$

- Řešení zůstává optimální, pokud $z_j^* \geq 0$ pro všechna j

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

2. Interval stability ceny základní proměnné x_j

- Změní se cena základní proměnné x_k na hodnotu
$$c_k^* = c_k + \Delta c_k$$
- Novou cenu c_k^* dosadíme do obecných vzorců:
$$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1} \geq \mathbf{0}$$
- Rozepíšeme soustavu nerovnic a vyřešíme
- Vypočteme odtud
  - dolní mez d_k hodnot ceny základní proměnné x_k
  - horní mez h_k hodnot ceny základní proměnné x_k
- Interval stability pro c_k je $c_k^* \in \langle d_k, h_k \rangle$

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

2. Interval stability ceny základní proměnné x_j

- Změní se cena základní proměnné x_k na hodnotu

$$c_k^* = c_k + \Delta c_k$$

- Novou cenu c_k^* dosadíme do obecných vzorců:

$$\mathbf{c}_B^{*\mathrm{T}} \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c}^{*\mathrm{T}} \geq \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \mathbf{c}_B^{*\mathrm{T}} \mathbf{B}_s^{-1} \geq \mathbf{0}$$

$$\left(\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} + \Delta \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\right) \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{A} - \left(\mathbf{c}^{\mathrm{T}} + \Delta \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\right) \geq \mathbf{0} \;\; \text{a} \;\; \left(\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} + \Delta \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\right) \mathbf{B}_s^{-1} \geq \mathbf{0}$$

- A odvodíme:

$$\boxed{a_{qj} \cdot \Delta c_k \geq -z_j}$$

  - kde x_k je základní proměnná v *q*-tém řádku
  - a a_{qj} je transformovaný strukturní koeficient v *q*-tém řádku

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

- Pokud $a_{qj} > 0$, musí platit $\Delta c_k \geq \frac{-z_j}{a_{qj}}$
  - A tedy $\Delta c_k \geq \max\limits_{a_{qj}>0} \frac{-z_j}{a_{qj}}$
- Pokud $a_{qj} < 0$, musí platit $\Delta c_k \leq \frac{-z_j}{a_{qj}}$
  - A tedy $\Delta c_k \leq \min\limits_{a_{qj}<0} \frac{-z_j}{a_{qj}}$
- Přípustná změna je tedy:

$$\boxed{a_{qj} \cdot \Delta c_k \geq -z_j}$$

$$\boxed{\max_{a_{qj} > 0} \frac{-z_j}{a_{qj}} \leq \Delta c_k \leq \min_{a_{qj} < 0} \frac{-z_j}{a_{qj}}}$$

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

Příklad

- Je dána úloha LP:

$$x_1 + 2x_2 \leq 120$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 180$$
$$x_1 \qquad \leq 110$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z = 40x_1 + 60x_2 \dots max$$

- Tabulka optimálního řešení:
- $\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 0)^{\mathrm{T}}$
- $z^* = 4\,700$
- $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = (30, 0, 10, 0, 0)$
- $f^* = 4\,700$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	0	0	0	1	110
x_2	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	5
x_4	0	0	-2	1	1	50
z_j	0	0	30	0	10	4 700

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

Příklad

$$\boxed{\mathbf{B}_s^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 180 \\ x_1 \qquad &\leq 110 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$z = 40x_1 + 60x_2 \ldots max$$

- $\mathbf{B}_s^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2) = (40, 60)$
- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, c_4) = (40, 60, 0)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	0	0	0	1	110
x_2	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	5
x_4	0	0	-2	1	1	50
z_j	0	0	30	0	10	4 700

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

Příklad

- Určete interval stability c_1
- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = (c_1^*, 60, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (c_1^*, 60) \geq (0, 0)$
- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1} = (c_1^*, 60, 0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \geq (0, 0, 0)$

$$\boxed{\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1} \geq \mathbf{0}}$$

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

Příklad

- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = (c_1^*, 60, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (c_1^*, 60) \geq (0, 0)$
- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1} = (c_1^*, 60, 0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \geq (0, 0, 0)$
- Rozepíšeme po složkách:
  - $c_1^* - c_1^* \geq 0$
  - $60 - 60 \geq 0$
- $1/2 \cdot 60 \geq 0$
- $0 \geq 0$
- $c_1^* - 1/2 \cdot 60 \geq 0 \quad \rightarrow \quad c_1 \geq 30$

$$\boxed{c_1 \in \langle 30, \infty)}$$

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

Příklad

- Určete interval stability c_2
- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}=(40,c_2^*,0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}-(40,c_2^*)\geq(0,0)$
- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}=(40,c_2^*,0)\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ {}^1/_2 & 0 & -{}^1/_2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\geq(0,0,0)$

$$\boxed{\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\geq\mathbf{0}\quad \text{a} \quad \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\geq\mathbf{0}}$$

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

Příklad

- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = (40, c_2^*, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (40, c_2^*) \geq (0,0)$
- $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1} = (40, c_2^*, 0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \geq (0,0,0)$
- Rozepíšeme po složkách:
  - $40 - 40 \geq 0$
  - $c_2^* - c_2^* \geq 0$
- $1/2 \cdot c_2^* \geq 0 \quad \rightarrow \quad c_2 \geq 0$
- $0 \geq 0$
- $40 - 1/2 \cdot c_2^* \geq 0 \quad \rightarrow \quad c_2 \leq 80$

$$\boxed{c_2 \in \langle 0, 80 \rangle}$$

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

Příklad - intervaly stability cenových koeficientů

- Je dána úloha LP:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\
x_1 + 4x_2 &\leq 180 \\
x_1 \qquad &\leq 110 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$z = 40x_1 + 60x_2 \dots max$$

- $c_1 \in \langle 30, \infty)$
- $c_2 \in \langle 0, 80 \rangle$

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

$$c_2 \in \langle 0, 80 \rangle$$

Příklad - změna c_2

- Dojde ke změně zisku z krabičky matic na 50 Kč. Změní se báze optimálního řešení?
- $c_2^* = 50, c_2^* \in \langle 0, 80 \rangle$ - optimalita nebude porušena

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

Příklad - změna c_2

- Spočítáme nové koeficienty řádky účelové funkce:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	0	0	0	1	110
x_2	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	25
x_4	0	0	-2	1	1	5
z_j	0	0	25	0	15	5 650

$$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \geq 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1} \geq 0$$

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

Příklad - změna c_2

$$c_2 \in \langle 0, 80 \rangle$$

- Dojde ke změně zisku z krabičky matic na 100 Kč. Změní se báze optimálního řešení?
- $c_2^* = 100, c_2^* \notin \langle 0, 80 \rangle$ - optimalita bude porušena

$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}$	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{b}$

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

Příklad - změna c_2

- Spočítáme nové koeficienty řádky účelové funkce:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	0	0	0	1	110
x_2	0	1	$^1/_2$	0	$-^1/_2$	25
x_4	0	0	-2	1	1	5
z_j	0	0	50	0	-10	6 900

$$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_s^{-1} \geq \mathbf{0}$$

7.2 Analýza citlivosti cenových koeficientů

Příklad - změna c_2

- Jak najdeme OŘ?
- $\mathbf{x}^* = (105, 27.5, 0, 0, 5)^{\mathrm{T}}$
- $z^* = 6\,950$
- $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = (30, 10, 0, 0, 0)$
- $f^* = 6\,950$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	0	0	0	1	110
x_2	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	25
x_4	0	0	-2	1	1	5
z_j	0	0	50	0	-10	6 900

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i^s
x_1	1	0	2	-1	0	105
x_2	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	27,5
x_5	0	0	-2	1	1	5
z_j	0	0	30	10	0	6 950

7.3 Motivační příklad – stabilita v LINGO

- Firma LINDO Systems, Inc.
- LINDO (Linear INteractive and Discrete Optimizer)
- www.lindo.com
- LINGO (verze 16.0, 17.0) – Windows, Mac, Linux

LINGO 11.0 - LINGO Model - priklad

File Edit LINGO Window Help

LINGO Model - priklad

```
model:
[lis]              1*x1 + 2*x2 <= 120;
[baleni]           1*x1 + 4*x2 <= 180;
[poptavka]         1*x1 - 1*x2 >=  90;
[sroubky]            x1        <= 110;

[zisk]       max = 40*x1 + 60*x2;
end
```

Range Report - priklad

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	40.00000	INFINITY	10.00000
X2	60.00000	20.00000	60.00000

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
BALENI	180.0000	INFINITY	50.00000
POPTAVKA	90.00000	15.00000	INFINITY
SROUBKY	110.0000	10.00000	10.00000
LIS	120.0000	25.00000	10.00000

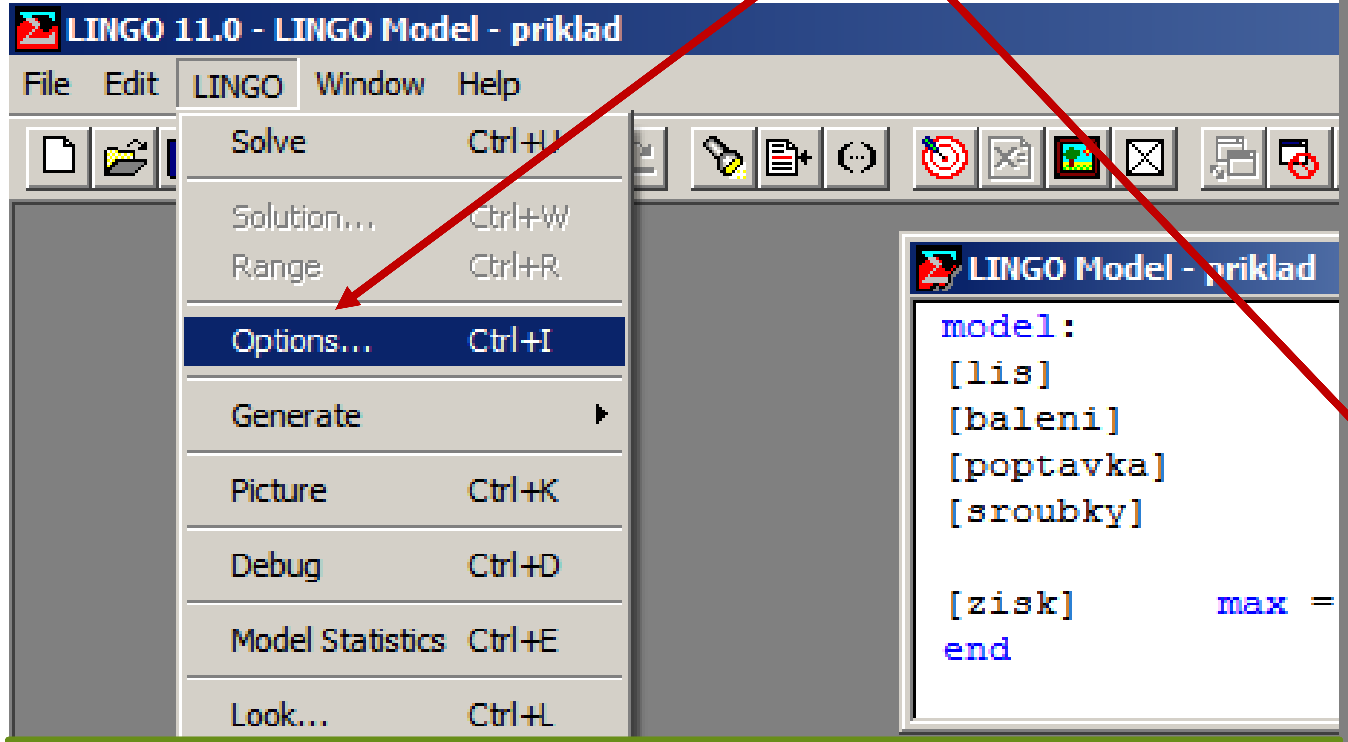
Solution Report - priklad

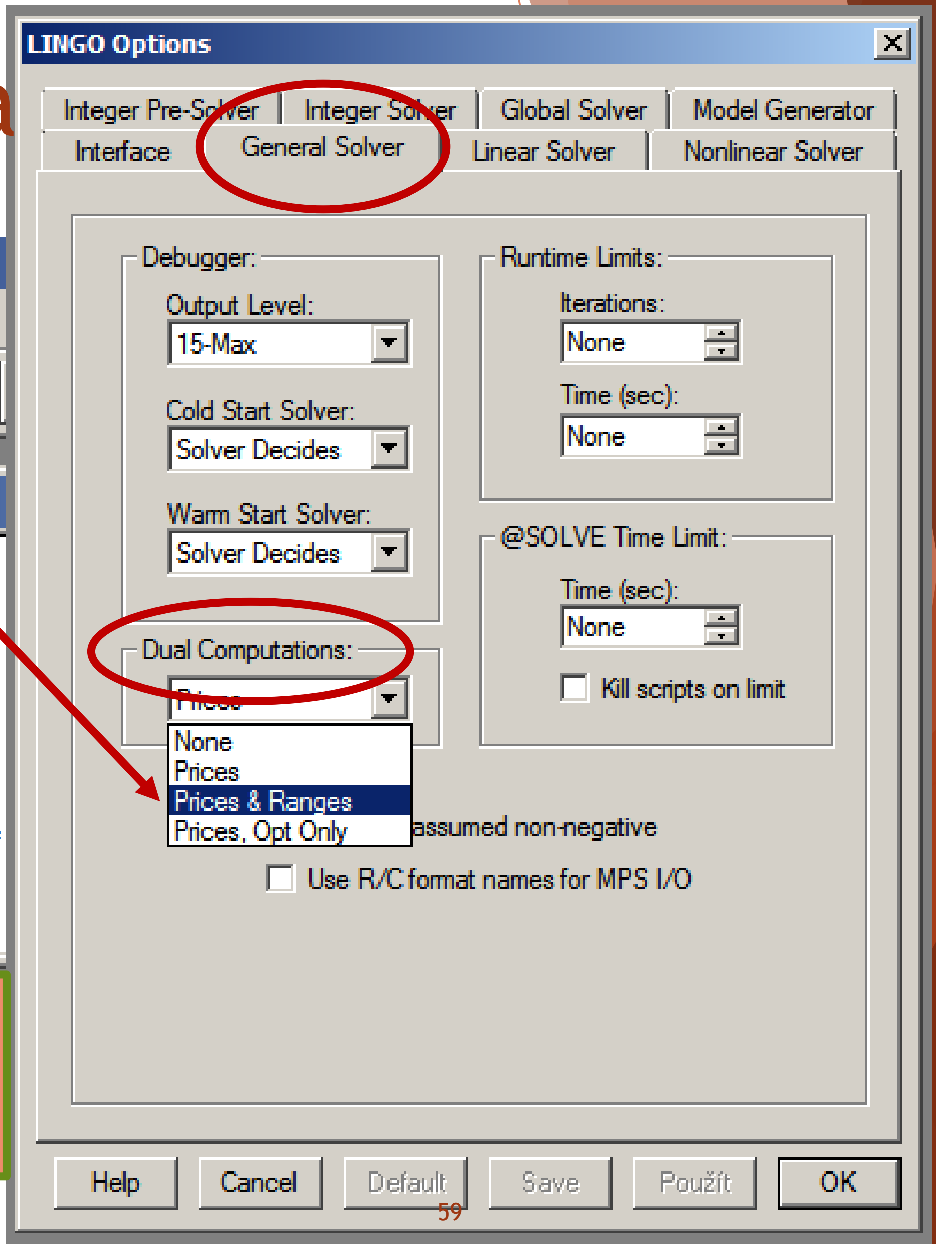
Global optimal solution found.
Objective value: 4700.000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 2

Variable	Value	Reduced Cost
X1	110.0000	0.000000
X2	5.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LIS	0.000000	30.00000
BALENI	50.00000	0.000000
POPTAVKA	15.00000	0.000000
SROUBKY	0.000000	10.00000
ZISK	4700.000	1.000000

7.3 LINGO - stabilita

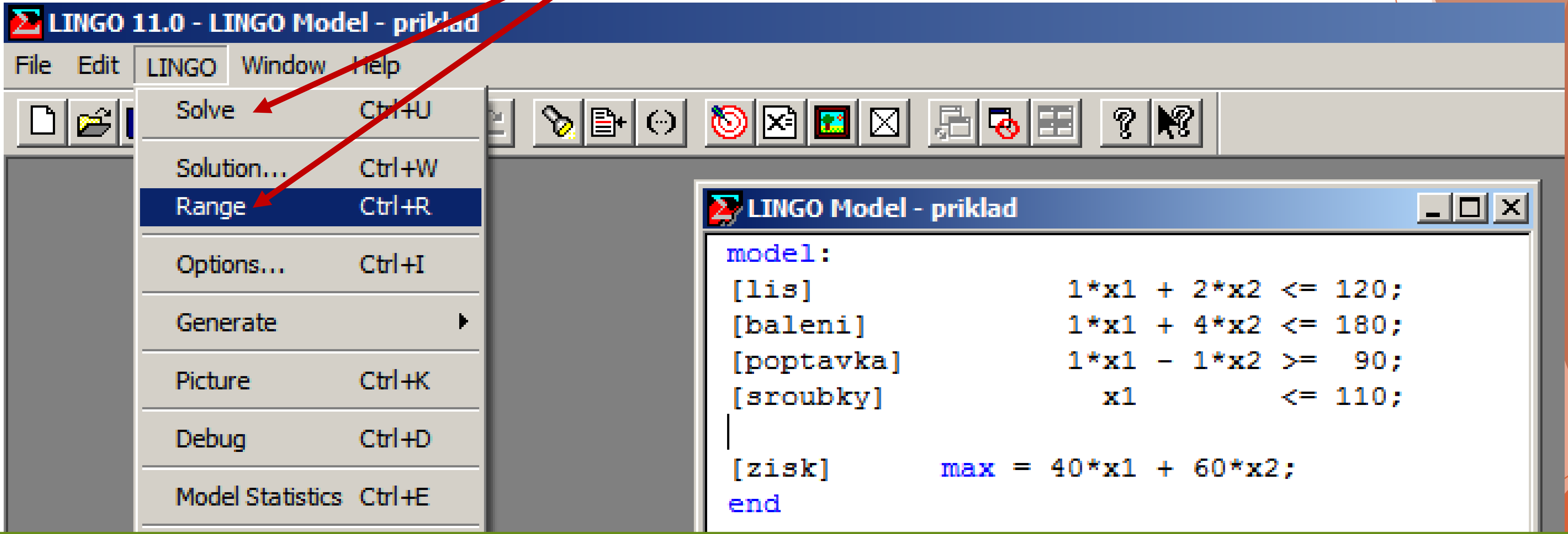




LINGO ⟶ Options… ⟶ General Solver

⟶ Dual Computations ⟶ Prices & Ranges

7.3 LINGO - stabilita



- Vyřešit úlohu (CTRL + U)
- Z okna s modelem (ne s řešením) zobrazit Range report (CTRL + R)

7.3 LINGO - stabilita

Range Report - priklad

Ranges in which t … ged

Současná hodnota | Povolený nárůst | Povolený pokles

Proměnné → Variable

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	40.00000	INFINITY	10.00000
X2	60.00000	20.00000	60.00000

Omezení → Row

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
BALENI	180.0000	INFINITY	50.00000
POPTAVKA	90.00000	15.00000	INFINITY
SROUBKY	110.0000	10.00000	10.00000
LIS	120.0000	25.00000	10.00000

Intervaly stability cenových koeficientů

- Účelová funkce: $z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

Objective Coefficient Ranges			
	Current	Allowable	Allowable
Variable	Coefficient	Increase	Decrease
X1	40.00000	INFINITY	10.00000
X2	60.00000	20.00000	60.00000

- $c_1 \in \langle 40 - 10, 40 + \infty) \rightarrow c_1 \in \langle 30, \infty)$
- $c_2 \in \langle 60 - 60, 60 + 20\rangle \rightarrow c_2 \in \langle 0, 80\rangle$

Intervaly stability pravých stran

		Righthand Side Ranges	
Row	Current	Allowable	Allowable
	RHS	Increase	Decrease
BALENI	180.0000	INFINITY	50.00000
POPTAVKA	90.00000	15.00000	INFINITY
SROUBKY	110.0000	10.00000	10.00000
LIS	120.0000	25.00000	10.00000

- $b_1 \in \langle 120 - 10, 120 + 25\rangle \rightarrow b_1 \in \langle 110, 145\rangle$
- $b_2 \in \langle 180 - 50, 180 + \infty) \rightarrow b_2 \in \langle 130, \infty)$
- $b_3 \in \langle 90 - \infty, 90 + 15\rangle \rightarrow b_3 \in (-\infty, 105\rangle$
- $b_4 \in \langle 110 - 10, 110 + 10\rangle \rightarrow b_4 \in \langle 100, 120\rangle$

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 5

KONEC