4EK213 – Lineární modely

9. Parametrické programování

9. Parametrické programování

- Dosud úlohy LP s fixními
  - Pravými stranami (kapacity, požadavky, apod.)
  - Cenami (náklady, zisky, časy, apod.)
  - Strukturními koeficienty (jednotková spotřeba, apod.)
- Často se hodnoty modelu mohou měnit v závislosti na parametru t (např. v čase)
  - Pokles nebo růst cen
  - Sezónní výkyvy v dodávkách surovin
  - Výkyvy v poptávce atd.

$$
\begin{aligned}
2\,x_1 + 1\,x_2 &\leq 20 \\
1\,x_1 + 1\,x_2 &\leq \;\;6 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$80\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max\ [\text{Kč}]$$

© Mgr. Sekničková Jana, Ph.D.

9. Parametrické programování

- Dosud úlohy LP s fixními
  - **Pravými stranami** (kapacity, požadavky, apod.)
  - **Cenami** (náklady, zisky, časy, apod.)
  - Strukturními koeficienty (jednotková spotřeba, apod.)
- Často se hodnoty modelu mohou měnit v závislosti na parametru t (např. v čase)
  - Pokles nebo růst cen
  - Sezónní výkyvy v dodávkách surovin
  - Výkyvy v poptávce atd.

$$
\begin{aligned}
2\,x_1 + 1\,x_2 &\leq 20 \\
1\,x_1 + 1\,x_2 &\leq \ \ 6 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$80\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max\ [\text{Kč}]$$

© Mgr. Sekničková Jana, Ph.D.

9. Parametrické programování

- Pravé strany nebo ceny se v modelu úlohy LP mění **spojitě** v závislosti na hodnotě parametru t
- V těchto případech neřešíme jednu úlohu LP, ale **celou řadu úloh**

© Mgr. Sekničková Jana, Ph.D.

9. Parametrické programování

- Princip výpočtu
  - Parametr ***t*** je **reálné číslo** ze zadaného intervalu
  - Úlohu LP řešíme nejdříve pro **dolní mez** hodnot parametru t
  - **SM** najdeme **první optimální bázi**
  - S rostoucí hodnotou parametru ***t*** je v určitém okamžiku porušena optimalita současné báze a je třeba najít **další optimální bázi**
  - Výpočet končí tak, že:
    - vyčerpáme všechny zadané hodnoty t
    - pro další hodnoty t optimální báze neexistuje

9.1 Parametrické pravé strany – formulace

- Řešíme parametrickou úlohu LP

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b_0} + \mathbf{b_1}t$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$
$$z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \ \dots \ \max$$

kde t … je reálné číslo z intervalu $T_0 \leq t \leq T_1$

- Řešit tuto úlohu znamená vypočítat **řadu bází**, které jsou optimální v jednotlivých **dílčích intervalech** hodnot parametru t
- Parametr t může být neomezen zdola nebo shora (v tom případě nahradíme mez vhodným číslem)

9.1 Parametrické pravé strany – příklad

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$
$$z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \; \dots \; \max$$

kde t … je reálné číslo z intervalu $T_0 \leq t \leq T_1$

$$2\,x_1 + 1\,x_2 \leq 20 + 2\,t$$
$$1\,x_1 + 1\,x_2 \leq 6 + 3\,t$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\mathrm{z} = 80\,x_1 + 60\,x_2 \dots \max \, [\mathrm{Kč}]$$
$$1 \leq t \leq 100$$

© Mgr. Sekničková Jana, Ph.D.

9.1 Parametrické pravé strany – výpočet

- *Výpočet 1. optimální báze*
  - Položíme t = T_0 a vypočteme **výchozí hodnoty** pravých stran:

    $$b_i = b_{0i} + b_{1i}\,t,\ pro\ i = 1, 2, \dots, m$$

  - Je-li některá pravá strana po této úpravě záporná, vynásobíme omezení (−1)
  - Simplexovou tabulku rozšíříme o sloupec $\mathbf{b_0}$ a $\mathbf{b_1}$
  - Počítáme **SM** optimální řešení podle pravých stran $\mathbf{b}$
  - Sloupce $\mathbf{b_0}$ a $\mathbf{b_1}$ pouze transformujeme

9.1 Parametrické pravé strany – příklad

$$2\,x_1 + 1\,x_2 \leq 20 + 2\,t$$
$$1\,x_1 + 1\,x_2 \leq \;\; 6 + 3\,t$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{z} = 80\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max\,[\text{Kč}]$$
$$1 \leq \; t \; \leq 100$$

- Položíme ***t* = 1** a vypočteme pravé strany:
  - $b_1 = 20 + 2 \cdot 1 = 22$
  - $b_2 = 6 + 3 \cdot 1 = 9$
- Výchozí řešení přepíšeme do ST a řešíme SM

Výchozí řešení

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	b_{0i}	b_{1i}	t
x_3	2	1	1	0	22	20	2	11
x_4	1	1	0	1	9	6	3	9
z_j	–80	–60	0	0	0	0	0	-

- Klíčový řádek počítáme podle hodnot b_i
- Tabulku transformujeme

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	β_i	β_{0i}	β_{1i}
x_3	0	−1	1	−2	4	8	−4
x_1	1	1	0	1	9	6	3
z_j	0	20	0	80	720	480	240

© Mgr. Sekničková Jana, Ph.D

9.1 Parametrické pravé strany – příklad

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	β_i	β_{0i}	β_{1i}
x_3	0	−1	1	−2	4	8	−4
x_1	1	1	0	1	9	6	3
z_j	0	20	0	80	720	480	240

- Řešení: $\mathbf{x} = (9, 0, 4, 0)^{\mathrm{T}}, z = 720$ je optimální pro $t = 1$
- Hodnoty základních proměnných v parametrické úloze vypočteme podle

$$\beta_{0i} + \beta_{1i}\, t$$

- Z tabulky je řešení:

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{6} + \mathbf{3}\boldsymbol{t}, \mathbf{0}, \mathbf{8} - \mathbf{4}\boldsymbol{t}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}},$$
$$z = 480 + 240\, t$$

9.1 Parametrické pravé strany – příklad

- *Interval pro 1. optimální bázi*

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{(6 + 3}\boldsymbol{t}\mathbf{, 0, 8 - 4}\boldsymbol{t}\mathbf{, 0)}^{\mathrm{T}}$$

- V OŘ musí platit:

$$x_3 = 8 - 4t \geq 0 \rightarrow t \leq 2$$
$$x_1 = 6 + 3t \geq 0 \rightarrow t \geq -2$$

- Řešení je tedy optimální pro všechna $t \in \langle -2, 2 \rangle$.
- My ale řešíme úlohu pro $1 \leq t \leq 100$, řešení je tedy optimální pro $\boldsymbol{t} \in \langle \mathbf{1, 2} \rangle$
- **Dolní hranice** prvního intervalu: $\boldsymbol{t}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{(1)}} = \mathbf{1}$
- **Horní hranice** prvního intervalu: $\boldsymbol{t}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{(1)}} = \mathbf{2}$

9.1 Parametrické pravé strany – příklad

$$1 \leq \ t \ \leq 100$$
$$t \in \langle 1,2 \rangle \text{: } \mathbf{x}^{(1)} = \ (\mathbf{6} + \mathbf{3}\boldsymbol{t}, \mathbf{0}, \mathbf{8} - \mathbf{4}\boldsymbol{t}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}},\ z = 480 + 240t$$

- Pro $t = 1$:

$$\mathbf{x}^{(\boldsymbol{t}\,=\,\mathbf{1})} = (\mathbf{9}, \mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}, \mathrm{z} = 720.$$

- Pro $t = 2$:

$$\mathbf{x}^{(\boldsymbol{t}\,=\,\mathbf{2})} = (\mathbf{12}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}, \mathrm{z} = 960.$$

- Pro $t > 2$:

řešení je primárně nepřípustné

9.1 Parametrické pravé strany – příklad

$$1 \leq \ t \ \leq 100$$
$$t \in \langle 1, 2 \rangle\!: \mathbf{x}^{(1)} = \ (\mathbf{6} + \mathbf{3}\boldsymbol{t}, \mathbf{0}, \mathbf{8} - \mathbf{4}\boldsymbol{t}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}},\ z = 480 + 240t$$

- Pro $t > 2$:

řešení je primárně nepřípustné

- Zvolme např. $t = 3$:

$$\mathbf{x}^{(\boldsymbol{t}=\mathbf{3})} = (\mathbf{15}, \mathbf{0}, -\mathbf{4}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$$
$$x_3 = 8 \ - \ 4t = -\mathbf{4}$$
$$x_1 = 6 \ + \ 3t = 15$$

9.1 Parametrické pravé strany – výpočet

- *Meze optimální báze*
  - V OŘ parametrické úlohy v bázi $\mathbf{B}_s$ je:

$$\beta_{0i} + \beta_{1i}\, t \geq 0$$

  - Je-li $\beta_{1i} > 0$, pak v i-tém omezení pro t platí:

$$t \geq -\beta_{0i}/\beta_{1i}$$

  - Je-li $\beta_{1i} < 0$, pak v i-tém omezení pro t platí:

$$t \leq -\beta_{0i}/\beta_{1i}$$

9.1 Parametrické pravé strany – výpočet

- *Meze optimální báze*
  - **Dolní mez** hodnot t v s-tém intervalu je odtud
    $$t_0^{(s)} = \max(-\beta_{0i}/\beta_{1i})$$
    pro $i = 1, 2, \dots, m, \beta_{1i} > 0$
  - **Horní mez** hodnot t v s-tém intervalu je odtud
    $$t_1^{(s)} = \min(-\beta_{0i}/\beta_{1i})$$
    pro $i = 1, 2, \dots, m, \beta_{1i} < 0$
  - Dílčí s-tý interval je tedy
    $$t \in \left\langle t_0^{(s)}, t_1^{(s)} \right\rangle$$

9.1 Parametrické pravé strany – výpočet

- *Pokračování výpočtu*
  - Je-li horní hranice dílčího intervalu menší než celková horní hranice, tj.

    $$t_1^{(s)} < T_1$$

    počítáme další optimální bázi
  - Protože pro $t > t_1^{(s)}$ je řešení primárně nepřípustné, počítáme **DSM**
  - **Klíčový řádek** je ten, ve kterém jsme našli horní hranici intervalu $t_1^{(s)}$
  - Dolní hranice intervalu *s* + 1 je vždy rovna horní hranici *s*-tého intervalu

9.1 Parametrické pravé strany – výpočet

- *<u>Zakončení výpočtu</u> může skončit 2 způsoby:*

1) $\boldsymbol{t_1^{(s)} \geq T_1}$

- vypočetli jsme všechny optimální báze
- výpočet končí

2) $\boldsymbol{t_1^{(s)} < T_1}$

- Ale v klíčovém řádku není záporný koeficient
- Pro $\boldsymbol{t > t_1^{(s)}}$ neexistuje přípustné a tedy ani optimální řešení
- Dosadíme $\boldsymbol{t_1^{(s)} = T_1}$ a výpočet končí

© Mgr. Sekničková Jana, Ph.D.

Pokračování výpočtu

$s=1$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\beta_{0i}^{(1)}$	$\beta_{1i}^{(1)}$	$t_1^{(1)}$
x_3	0	−1	1	−2	8	−4	2
x_1	1	1	0	1	6	3	x
z_j	0	20	0	80	480	240	

$s=2$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\beta_{0i}^{(2)}$	$\beta_{1i}^{(2)}$	$t_1^{(2)}$
x_2	0	1	−1	2	−8	4	x
x_1	1	0	1	−1	14	−1	14
z_j	0	0	20	40	640	160	

© Mgr. Sekničková Jana, Ph.D

9.1 Parametrické pravé strany – příklad

- *Interval pro 2. optimální bázi*

$$\mathbf{x}^{(2)} = (\mathbf{14 - 1}t, \mathbf{-8 + 4}t, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$$

$$z = 640 + 160t$$

- V OŘ musí platit:

$$x_2 = -8 + 4t \geq 0 \rightarrow t \geq 2$$

$$x_1 = 14 - 1t \geq 0 \rightarrow t \leq 14$$

- Řešení je tedy optimální pro všechna $t \in \langle 2, 14 \rangle$.

$s = 2$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\beta_{0i}^{(2)}$	$\beta_{1i}^{(2)}$	$t_1^{(2)}$
x_2	0	1	−1	2	−8	4	x
x_1	1	0	1	−1	14	−1	14
z_j	0	0	20	40	640	160	

© Mgr. Sekničková Jana, Ph.D.

9.1 Parametrické pravé strany – příklad

$$1 \leq t \leq 100$$

$$t \in \langle 1, 2 \rangle: \quad \mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{6} + \mathbf{3}t, \mathbf{0}, \mathbf{8} - \mathbf{4}t, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}, \qquad z = 480 + 240t$$

$$t \in \langle 2, 14 \rangle: \mathbf{x}^{(2)} = (\mathbf{14} - \mathbf{1}t, -\mathbf{8} + \mathbf{4}t, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}, \qquad z = 640 + 160t$$

- Pro $t = 2$:

$$\mathbf{x}^{(t=2)} = (\mathbf{12}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}, \mathrm{z} = 960.$$

- Na rozhraní dvou sousedních intervalů tedy existují **dvě optimální báze**
- Protože $t_1^{(2)} < T_1$ počítáme další optimální bázi DSM

Pokračování výpočtu

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	β_{0i}	β_{1i}	$t_1^{(2)}$
x_2	0	1	−1	2	−8	4	x
x_1	1	0	1	−1	14	−1	14
z_j	0	0	20	40	640	160	

$s = 3$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\beta_{0i}^{(3)}$	$\beta_{1i}^{(3)}$	$t_1^{(3)}$
x_2	2	1	−1	0	20	2	∞
x_4	−1	0	1	1	−14	1	∞
z_j	40	0	60	0	1200	120	

© Mgr. Sekničková Jana, Ph.D

9.1 Parametrické pravé strany – příklad

- *Interval pro 3. optimální bázi*

$$\mathbf{x}^{(3)} = (\mathbf{0}, \mathbf{20} + \mathbf{2}\boldsymbol{t}, \mathbf{0}, -\mathbf{14} + \mathbf{1}\boldsymbol{t})^{\mathrm{T}}$$

$$z = 1200 + 120t$$

- V OŘ musí platit:

$$x_2 = 20 + 2t \geq 0 \rightarrow t \geq -10$$
$$x_4 = -14 + 1t \geq 0 \rightarrow t \geq 14$$

- Řešení je tedy optimální pro všechna $t \in \langle 14, 100 \rangle$.

$s = 3$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\beta_{0i}^{(3)}$	$\beta_{1i}^{(3)}$	$t_1^{(3)}$
x_2	2	1	−1	0	20	2	∞
x_4	−1	0	1	1	−14	1	∞
z_j	40	0	60	0	1200	120	

© Mgr. Sekničková Jana, Ph.D.

9.1 Parametrické pravé strany – příklad

- ***Přehled výsledků:***

$$1 \leq \ t \ \leq 100$$

$$
\begin{array}{lll}
t \in \langle 1,2 \rangle: & \mathbf{x}^{(1)} = \ (\mathbf{6+3}\boldsymbol{t}, \mathbf{0}, \mathbf{8-4}\boldsymbol{t}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}, & z = \ \ 480 + 240t \\
t \in \langle 2,14 \rangle: & \mathbf{x}^{(2)} = \ (\mathbf{14-1}\boldsymbol{t}, \mathbf{-8+4}\boldsymbol{t}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}, & z = \ \ 640 + 160t \\
t \in \langle 14,100 \rangle: & \mathbf{x}^{(3)} = (\mathbf{0}, \mathbf{20+2}\boldsymbol{t}, \mathbf{0}, \mathbf{-14+1}\boldsymbol{t})^{\mathrm{T}}, & z = 1200 + 120t
\end{array}
$$

9.2 Parametrické ceny

- Řešíme parametrickou úlohu LP

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{z} = (\mathbf{c_0} + \mathbf{c_1}t)^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \ \dots \ \max$$

kde t … je reálné číslo z intervalu

$$T_0 \leq t \leq T_1$$

- Celý postup je obdobný postupu s parametrickými pravými stranami

9.2 Parametrické ceny – příklad

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$
$$z = (\mathbf{c_0} + \mathbf{c_1} t)^{\mathbf{T}} \mathbf{x} \ \dots \ \max$$

kde t … je reálné číslo z intervalu $T_0 \leq t \leq T_1$

$$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$$
$$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$$
$$1\,x_1 \qquad\quad \leq 110$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z = (40 + 6t)\,x_1 + (60 - 2t)\,x_2 \dots \max \ [\text{Kč}]$$
$$0 \leq t \leq 40$$

© Mgr. Sekničk

9.2 Parametrické ceny – výpočet

- *Výpočet 1. optimální báze*
  - Položíme ***t* = T$_0$** a vypočteme **výchozí hodnoty** cenových koeficientů:

$$c_j = c_{0j} + c_{1j}\, t,\ pro\ j = 1, 2, \dots, n$$

  - Simplexovou tabulku rozšíříme o řádek $\mathbf{g}_0$ a $\mathbf{g}_1$ tak, že

$$z_j = g_{0j} + g_{1j} t$$

  - $g_{0j} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_{\mathrm{S}}^{-1} a_j - c_{0j}$
  - $g_{1j} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_{\mathrm{S}}^{-1} a_j - c_{1j}$

9.2 Parametrické ceny – výpočet

- ***Výpočet 1. optimální báze***
  - Počítáme **SM** optimální řešení podle řádku z_j
  - Řádky g_{0j} a g_{1j} transformujeme klasicky

9.2 Parametrické ceny – příklad

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + 2\,x_2 &\le 120\\
1\,x_1 + 4\,x_2 &\le 180\\
1\,x_1 \qquad\quad &\le 110\\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

$$z = (40 + 6t)\,x_1 + (60 - 2t)\,x_2 \ldots \max\ [\text{Kč}]$$

$$0 \le\ t\ \le 40$$

- Položíme ***t* = 0** a vypočteme cenové koeficienty:
  - $c_1 = 40 + 6 \cdot 0 = 40, c_2 = 60 - 2 \cdot 0 = 60$
- Výchozí řešení přepíšeme do ST a řešíme SM

9.2 Parametrické ceny – příklad

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	120
x_4	1	4	0	1	0	180
x_5	1	0	0	0	1	110
z_j	−40	−60	0	0	0	0
g_{0j}	−40	−60	0	0		
g_{1j}	−6	2	0	0		

- V posledních dvou řádcích jsou vypočteny **koeficienty g_{0j} a g_{1j}**
- **Klíčový sloupec** je určen podle koeficientů z_j

$$\begin{aligned} 1\,x_1 + 2\,x_2 &\le 120 \\ 1\,x_1 + 4\,x_2 &\le 180 \\ 1\,x_1 \quad\quad\quad &\le 110 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$z = (40 + 6t)x_1 + (60 - 2t)x_2 \ldots \max$$
$$0 \le t \le 40$$

© Mgr. Sekničková Jana, Ph.D.

9.1 Parametrické pravé strany – příklad

$S = 1$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i
x_1	1	0	0	0	1	110
x_2	0	1	1/2	0	-1/2	5
x_4	0	0	-2	1	1	50
z_j	0	0	30	0	10	4700
g_{0j}	0	0	30	0	10	4700
g_{1j}	0	0	−1	0	7	650
Hor. mez	x	x	30	x	∞	x

- Řešení: $\mathbf{x} = (110, 5, 0, 50, 0)^{\mathrm{T}}, z = 4700$ je optimální pro $t = 0$
- Z tabulky je řešení:

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{110}, \mathbf{5}, \mathbf{0}, \mathbf{50}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}},$$
$$z = 4700 + 650\,t$$

9.2 Parametrické ceny – příklad

- ***Interval pro 1. optimální bázi***

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{110}, \mathbf{5}, \mathbf{0}, \mathbf{50}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$$

- Řešení v ST je primárně přípustné
- Optimální je, pokud je i duálně přípustné, tj. pokud pro maximalizaci

$$z_j = g_{0j} + g_{1j}t \geq 0$$

- V OŘ musí platit:

$$z_3 = 30 - 1t \geq 0 \rightarrow t \leq 30$$
$$z_5 = 10 + 7t \geq 0 \rightarrow t \geq -10/7$$

- Řešení je tedy optimální pro všechna $t \in \langle -10/7, 30 \rangle$.
- My ale řešíme úlohu pro $0 \leq t \leq 40$, řešení je tedy optimální pro $\boldsymbol{t} \in \langle \mathbf{0}, \mathbf{30} \rangle$

9.2 Parametrické ceny – příklad

- *Interval pro 1. optimální bázi*

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{110}, \mathbf{5}, \mathbf{0}, \mathbf{50}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$$

$$z = 4700 + 650\,t$$

- Řešení je optimální pro $\boldsymbol{t} \in \langle \mathbf{0}, \mathbf{30} \rangle$
- **Dolní hranice** prvního intervalu: $\boldsymbol{t}_{\mathbf{0}}^{(\mathbf{1})} = \mathbf{0}$
- **Horní hranice** prvního intervalu: $\boldsymbol{t}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{1})} = \mathbf{30}$

$$0 \le t \le 40$$

$$t \in \langle 0, 30 \rangle : \mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{110}, \mathbf{5}, \mathbf{0}, \mathbf{50}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}},\ z = 4700 + 650t$$

9.2 Parametrické ceny – výpočet

- *Meze optimální báze*
  - V OŘ parametrické úlohy v bázi $\mathbf{B}_s$ je:

$$z_j = g_{0j} + g_{1j}\,t \geq 0 \text{ (pro max)}$$

  - Je-li $g_{1j} > 0$, pak v *j*-tém sloupci pro t platí:

$$t \geq -g_{0j}/g_{1j}$$

  - Je-li $g_{1j} < 0$, pak v *i*-tém omezení pro t platí:

$$t \leq -g_{0j}/g_{1j}$$

© Mgr. Sekničková Jana, Ph.D.

9.2 Parametrické ceny – výpočet

- *Meze optimální báze*
  - Dolní mez hodnot t v s-tém intervalu je odtud
    $$t_0^{(s)} = \max\left(-g_{0j}/g_{1j}\right)$$
    pro $j = 1, 2, \dots, n + m, g_{1j} > 0$
  - Horní mez hodnot t v s-tém intervalu je odtud
    $$t_1^{(s)} = \min\left(-g_{0j}/g_{1j}\right)$$
    pro $j = 1, 2, \dots, n + m, g_{1j} < 0$
  - Dílčí s-tý interval je tedy
    $$t \in \left\langle t_0^{(s)}, t_1^{(s)} \right\rangle$$

9.2 Parametrické ceny – příklad

$S = 1$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0	0	1	110
x_2	0	1	1/2	0	-1/2	5
x_4	0	0	-2	1	1	50
g_{0j}	0	0	30	0	10	4700
g_{1j}	0	0	−1	0	7	650
Hor. mez	x	x	30	x	∞	x

- Pro $t > 30$ není řešení v tabulce optimální
- Pokračujeme ve výpočtu klasickou SM

9.2 Parametrické ceny – příklad

$S = 2$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0	0	1	110
x_3	0	2	1	0	-1	10
x_4	0	4	0	1	−1	70
g_{0j}	0	−60	0	0	40	4400
g_{1j}	0	2	0	0	6	660
Hor. mez	x	∞	x	x	∞	x

- Z tabulky je řešení:

$$\mathbf{x}^{(2)} = (\mathbf{110}, \mathbf{0}, \mathbf{10}, \mathbf{70}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}},$$
$$z = 4400 + 660\,t$$

9.2 Parametrické ceny – příklad

$S = 2$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	0	0	1	110
x_3	0	2	1	0	-1	10
x_4	0	4	0	1	−1	70
g_{0j}	0	−60	0	0	40	4400
g_{1j}	0	2	0	0	6	660
Hor. mez	x	∞	x	x	∞	x

- V OŘ musí platit:

$$z_2 = -60 + 2t \ \geq \ 0 \ \rightarrow \ t \geq 30$$
$$z_5 = 40 \ + 6t \ \geq \ 0 \ \rightarrow \ t \ \geq -20/3$$

- Řešení je tedy optimální pro všechna $t \in \langle 30, \infty)$.

9.2 Parametrické ceny – příklad

- *Přehled výsledků:*

$$0 \leq t \leq 40$$

$$t \in \langle 0, 30 \rangle: \quad \mathbf{x}^{(1)} = (\mathbf{110}, \mathbf{5}, \mathbf{0}, \mathbf{50}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}, \quad z = 4700 + 650t$$

$$t \in \langle 30, 40 \rangle: \quad \mathbf{x}^{(2)} = (\mathbf{110}, \mathbf{0}, \mathbf{10}, \mathbf{70}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}, \quad z = 4400 + 660t$$

9.2 Parametrické ceny – výpočet

- *Zakončení výpočtu může skončit 2 způsoby:*

1) $\boldsymbol{t_1^{(s)} \geq T_1}$

- vypočetli jsme všechny optimální báze
- výpočet končí

2) $\boldsymbol{t_1^{(s)} < T_1}$

- Ale v klíčovém sloupci není kladný koeficient
- Pro $\boldsymbol{t > t_1^{(s)}}$ má optimální řešení neomezenou hodnotu účelové funkce
- Dosadíme $\boldsymbol{t_1^{(s)} = T_1}$ a výpočet končí

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 5.3

KONEC