4EK213 – Lineární modely

10. Celočíselné programování

10.1 Matematický model úlohy ILP

- Nalézt **extrém účelové funkce**

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \; \dots + c_nx_n$$

na soustavě vlastních omezení

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \; \dots + a_{1n}x_n \mathbf{R}\; b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \; \dots + a_{2n}x_n \mathbf{R}\; b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \; \dots + a_{3n}x_n \mathbf{R}\; b_3$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \; \dots + a_{mn}x_n \mathbf{R}\; b_m$$

za podmínek nezápornosti

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Úloha LP

10.1 Matematický model úlohy ILP

- Nalézt **extrém účelové funkce**

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots + c_nx_n$$

na soustavě vlastních omezení

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ \dots + a_{1n}x_n\mathbf{R}\ b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ \dots + a_{2n}x_n\mathbf{R}\ b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ \dots + a_{3n}x_n\mathbf{R}\ b_3$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ \dots + a_{mn}x_n\mathbf{R}\ b_m$$

za podmínek nezápornosti

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$
$$\boldsymbol{x_j} \ - \textbf{celé}, \boldsymbol{j = 1, 2, \dots, n}$$

Úloha ILP

10.1 Matematický model úlohy ILP

- Nalézt **extrém účelové funkce**

$$z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

na soustavě vlastních omezení

$$\mathbf{A}\mathbf{x}\ \mathrm{R}\ \mathbf{b}$$

za podmínek nezápornosti

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

a podmínek celočíselnosti (bivalence)

$$\mathbf{x}\ - \text{celé (binární)}.$$

Úloha ILP

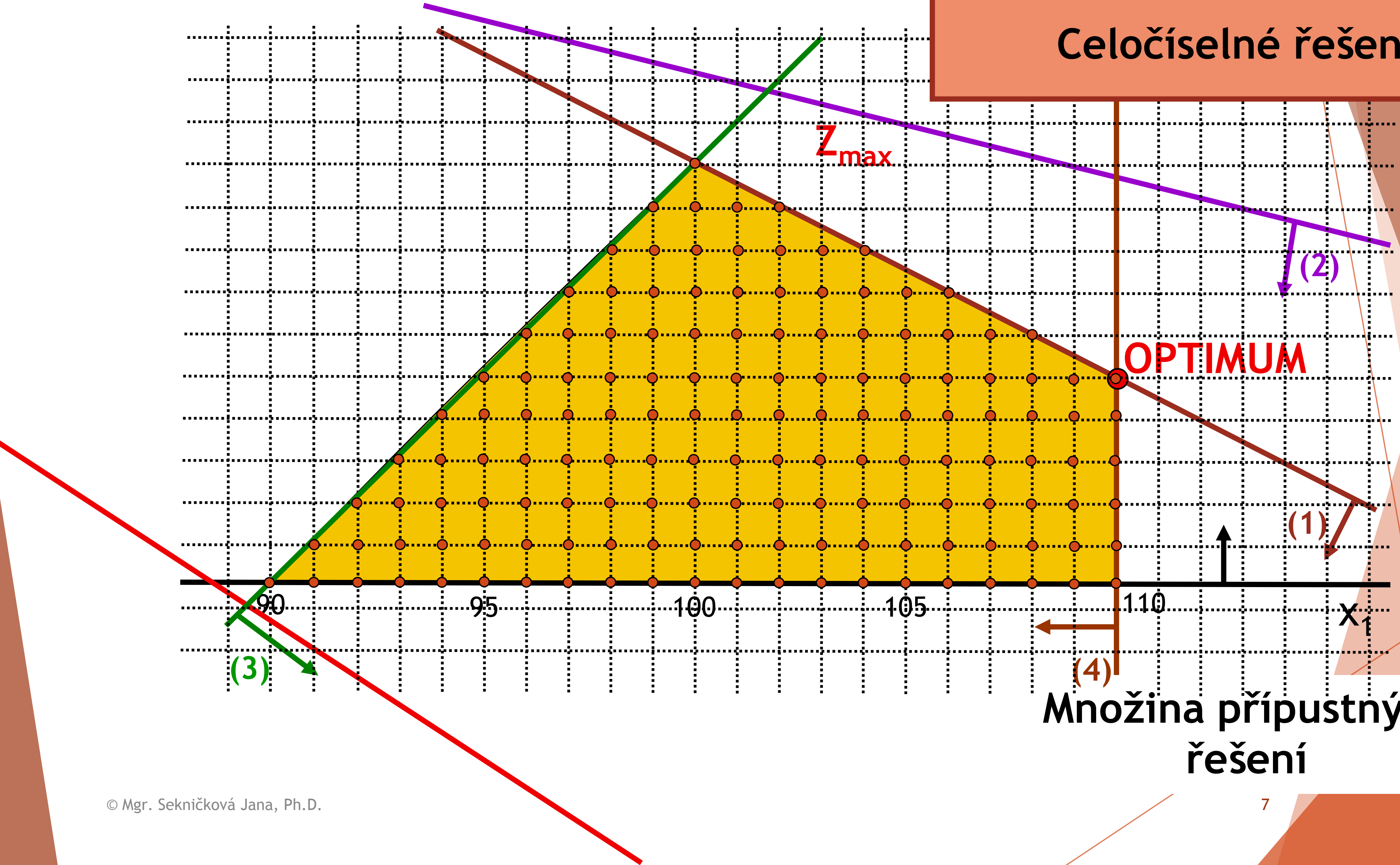
10.1 Matematický model úlohy ILP

- **LP** – Úlohy lineárního programování
- **ILP** – Úlohy celočíselného lineárního programování
- **PILP** – Úlohy ryze celočíselného lineárního programování
- **MILP** – Úlohy smíšeně celočíselného lineárního programování

10.2 Množina přípustných řešení

- V úlohách LP bez podmínek celočíselnosti je množina přípustných řešení spojitá
- Z této spojité množiny vybereme body, které vyhovují podmínkám celočíselnosti proměnných
- Vznikne celočíselná mřížka (množina izolovaných bodů)
- Množina přípustných řešení úlohy ILP je diskrétní

Celočíselné řešení



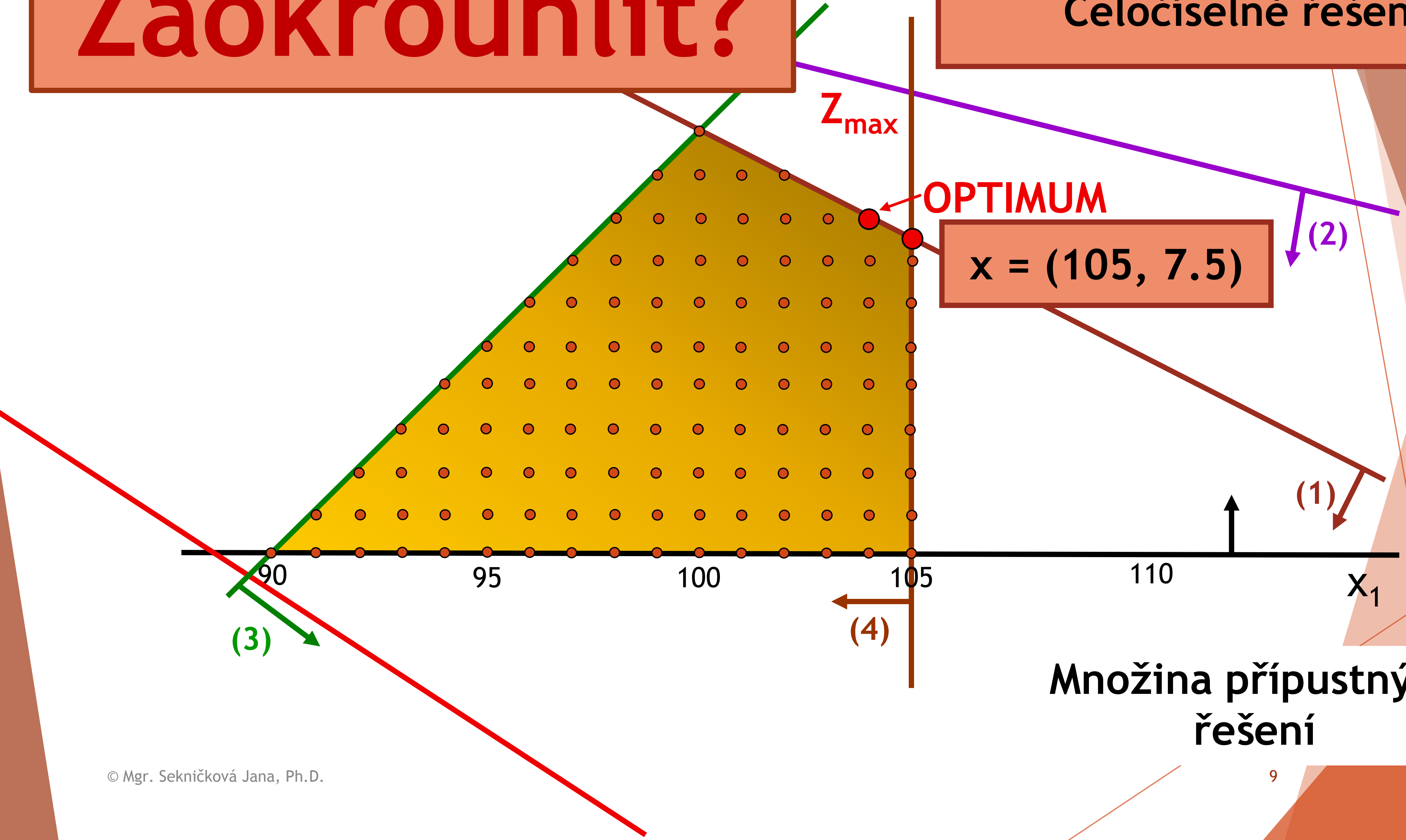
Množina přípustných řešení

10.2 Metody řešení úloh ILP

- **Metody pro řešení úloh LP**
  - Pokud je nalezené OŘ úlohy LP celočíselné, je zároveň OŘ úlohy ILP
  - Pokud celočíselné není, musíme použít některou metodu pro ILP

Zaokrouhlit?

Celočíselné řešení



Množina přípustných řešení

10.2 Metody řešení úloh ILP

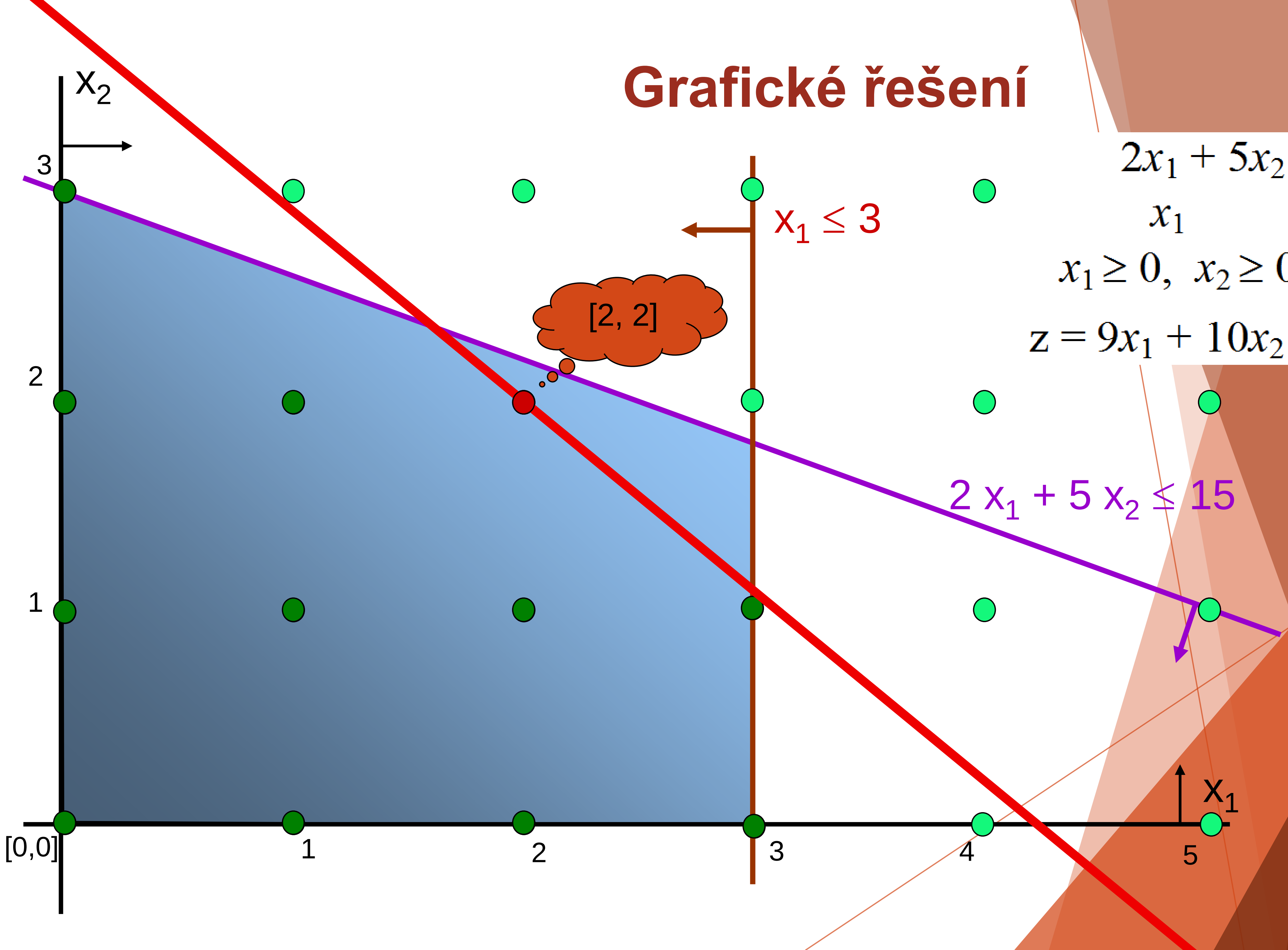
- Úlohu ILP nelze tedy řešit SM, kde celočíselnost OŘ není zaručena
- Neceločíselné řešení nelze ani jednoduše zaokrouhlit:
  - zaokrouhlené řešení nemusí být vždy PŘ úlohy ILP
  - zaokrouhlené řešení může být sice PŘ, ale nemusí být OŘ úlohy ILP

10.2 Metody řešení úloh ILP

- **Metody pro řešení úloh LP**
  - Pokud je nalezené OŘ úlohy LP celočíselné, je zároveň OŘ úlohy ILP
- **Metody pro řešení úloh ILP**
  - Grafické řešení
  - Metody řezných nadrovin (Gomoryho metoda)
  - Kombinatorické metody (metoda větvení a mezí)
  - Dekompoziční metody
  - Heuristické metody

Grafické řešení

$$2x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$x_1 \qquad \leq \ 3$$
$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0\ ,\ \text{celé}$$
$$z = 9x_1 + 10x_2 \ldots \max.$$



10.3 Metody řezných nadrovin

- Vypočteme simplexovou metodou OŘ (bez ohledu na podmínky celočíselnosti)
- Je-li řešení celočíselné, máme hledané OŘ
- Pokud není, z množiny PŘ „odřízneme“ část tak, aby neobsahovala žádný celočíselný bod
- Znovu hledáme OŘ bez ohledu na celočíselnost
- Reprezentantem těchto metod je

Gomoryho metoda

10.3 Gomoryho metoda

- Vypočteme OŘ úlohy ILP bez ohledu na podmínky celočíselnosti
- Označme s index Gomoryho iterace a položme $s = 0$

10.3 Gomoryho metoda

1. Test optima (celočíselnosti)

- Pokud je OŘ celočíselné, **výpočet končí**
  - Nalezli jsme hledané OŘ úlohy ILP

- Pokud není OŘ celočíselné, položíme $s = s + 1$
  - a pokračujeme ve výpočtu

10.3 Gomoryho metoda

2. Zdrojový řádek

- Vypočteme celočíselné zbytky všech pravých stran (zbytek po celočíselném dělení 1)

$$r_{i0} = \beta_i - [\beta_i], i = 1, \dots, m$$

- Najdeme řádek s největším zbytkem

$$g = \max_i r_{i0} = r_{p0}$$

- Tento p-tý řádek je zdrojový

10.3 Gomoryho metoda

3. Gomoryho řez

- Vypočteme celočíselné zbytky koeficientů zdrojového řádku r_{pj}:

$$r_{pj} = \alpha_{pj} - [\alpha_{pj}], j = 1, 2, \dots, n + m + s$$

- Formulujeme $m + s$–té omezení:

$$\sum_{j=1}^{n+m+s} (-r_{pj} \cdot x_j) + x_{n+m+s} = -r_{p0}$$

10.3 Gomoryho metoda

4. Řešení duálně simplexovou metodou

- Klíčovým řádkem je Gomoryho omezení (jediná záporná pravá strana)
- Klíčový sloupec podle

$$t = \min_{j, \alpha_{qj} < 0} \left| \frac{z_j}{\alpha_{qj}} \right|$$

- Pokud jsou všechna $\alpha_{qj} \geq 0$, OŘ neexistuje, **výpočet končí**
- Jinak transformujeme tabulku a vracíme se k bodu 1

10.3 Gomoryho metoda

- **Příklad – Gomoryho metoda**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 \qquad &\le \ \ 3 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0 \text{ , celé}$$

$$z = 9x_1 + 10x_2 \ldots \text{max.}$$

10.3 Gomoryho metoda

- **Příklad - Gomoryho metoda**
  - Řešení úlohy simplexovou metodou
  - Ručně, pomocí LINGO či graficky
  - Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (3, 9/5)^{\mathrm{T}}, z^{(0)} = 45$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \text{ , celé}$$
$$z = 9x_1 + 10x_2 \dots \text{max.}$$

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	β_i
x_2	0	1	1/5	-2/5	9/5
x_1	1	0	0	1	3
z_j	0	0	2	5	45

10.3 Gomoryho metoda

1. Test optima (celočíselnosti)

- Optimální řešení $\mathbf{x}^{(0)} = (3, 9/5)^{\mathrm{T}}$,

$$z^{(0)} = 45$$

není celočíselné

- Není tedy OŘ původní úlohy
- Pokračujeme ve výpočtu

10.3 Gomoryho metoda

2. Zdrojový řádek

- Vypočteme celočíselné zbytky všech pravých stran

$$r_{10} = \frac{9}{5} - \left[\frac{9}{5}\right] = \frac{4}{5}$$
$$r_{20} = 3 - [3] = 0$$

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	β_i
x_2	0	1	1/5	-2/5	9/5
x_1	1	0	0	1	3
z_j	0	0	2	5	45

- Najdeme řádek s největším zbytkem

$$g = \max_i r_{i0} = \frac{4}{5} = r_{10}$$

- Řádek s indexem $p = 1$ je zdrojový (první řádek)

10.3 Gomoryho metod

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	β_i
x_2	0	1	1/5	-2/5	9/5
x_1	1	0	0	1	3
z_j	0	0	2	5	45

3. Gomoryho řez

- Vypočteme celočíselné zbytky koeficientů zdrojového řádku r_{pj}
- Formulujeme $m+s$–té omezení:

$$\sum_{j=1}^{n+m+s} (-r_{pj} \cdot x_j) + x_{n+m+s} = -r_{p0}$$

Jaké?

$$(-0 \cdot x_1) + (-0 \cdot x_2) + \left(-\frac{1}{5} \cdot x_3\right) + (-\frac{3}{5} \cdot x_4) + x_5 = -\frac{4}{5}$$

10.3 Gomoryho metoda

4. Řešení duálně simplexovou metodou

- Klíčový řádek je třetí, tj. Gomoryho omezení (jediná záporná pravá strana)

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i
x_2	1	0	1/5	-2/5	0	9/5
x_1	0	1	0	1	0	3
x_5	0	0	-1/5	-3/5	1	-4/5
z_j	0	0	2	5	0	45

10.3 Gomoryho metoda

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i
x_2	1	0	1/3	0	-2/3	7/3
x_1	0	1	-1/3	0	5/3	5/3
x_4	0	0	1/3	1	-5/3	4/3
z_j	0	0	1/3	0	25/3	115/3

- Řešení není celočíselné
- Gomoryho omezení pro druhý řádek

$$(-0 \cdot x_1) + (-0 \cdot x_2) + \left(-\frac{2}{3} \cdot x_3\right) + (-0 \cdot x_4) + \ (-\frac{2}{3} \cdot x_5) + x_6 = -\frac{2}{3}$$

10.3 Gomoryho metoda

- Klíčový řádek je čtvrtý, tj. Gomoryho omezení (jediná záporná pravá strana)

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β_i
x_2	0	1	1/3	0	-2/3	0	7/3
x_1	1	0	-1/3	0	5/3	0	5/3
x_4	0	0	1/3	1	-5/3	0	4/3
x_6	0	0	-2/3	0	-2/3	1	-2/3
z_j	0	0	1/3	0	25/3	0	115/3

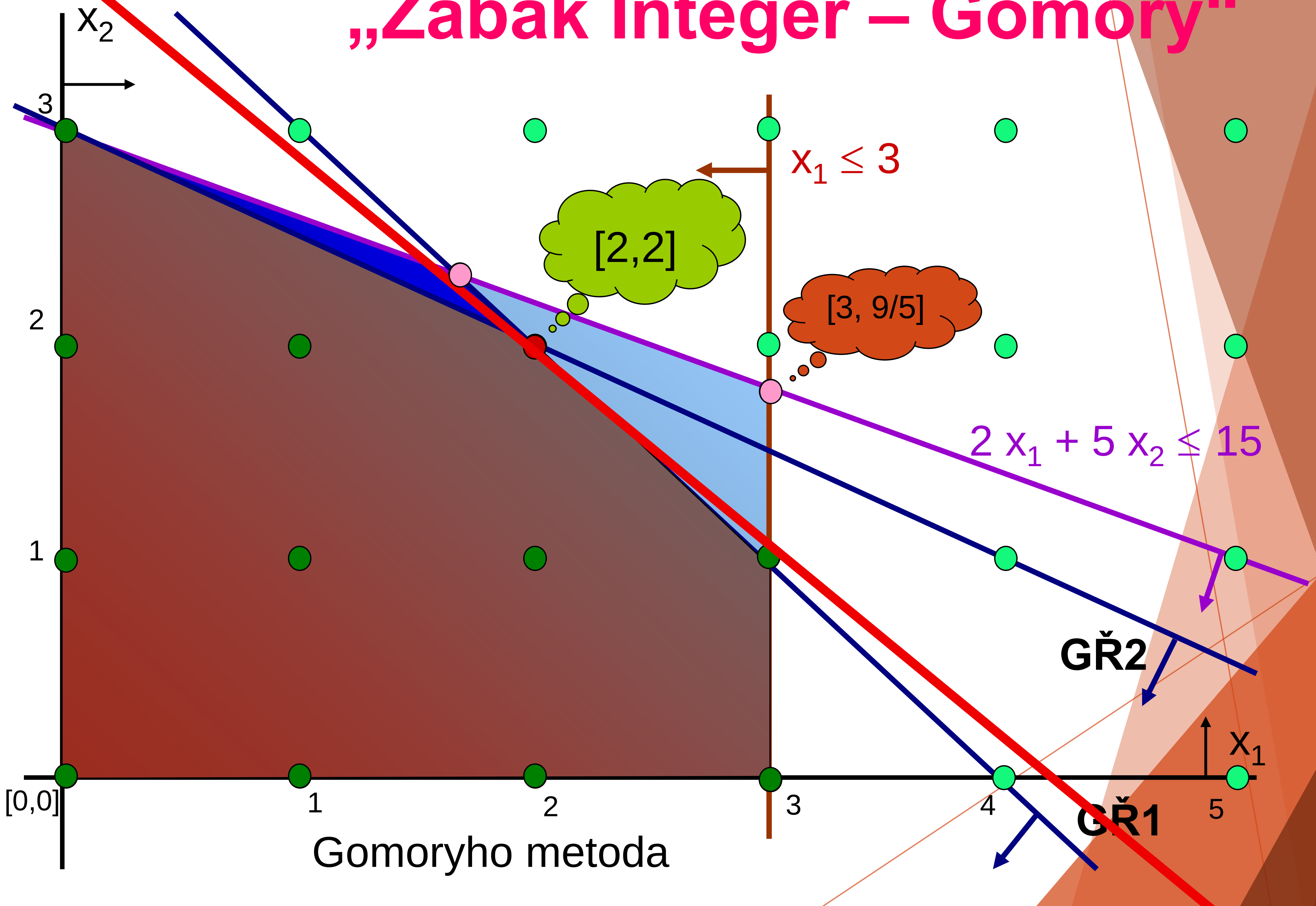
10.3 Gomoryho metoda

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β_i
x_2	0	1	0	0	-1	-2/3	2
x_1	1	0	0	0	2	5/3	2
x_4	0	0	0	1	-2	-5/3	1
x_3	0	0	1	0	1	-2/3	1
z_j	0	0	0	0	8	25/3	38

- Řešení je celočíselné a tedy optimální

$$\mathbf{x}^{(3)} = (2, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}, z = 38$$

„Žabák Integer – Gomory“



Gomoryho metoda

10.3 Metody řezných nadrovin

- Nevýhody:
  - Koeficienty Gomoryho omezení jsou zvláště v dalších iteracích velmi malá čísla, blízká nule
  - Při eliminaci proto vznikají zaokrouhlovací chyby
  - Ty mohou způsobit to, že výpočet nerozezná optimální řešení a zkolabuje
  - Proto programové systémy používají většinou kombinatorické metody

10.4 Metody větví a mezí

- Metoda větvení a mezí
- Metoda větví a mezí
- Metoda větvení a hranic
- Metoda větví a hranic
- Metoda B and B
- Branch and bound method
- Branches and bounds method

10.4 Metody větví a mezí

- Mohou se použít pro řešení **všech úloh IP i MIP**
- Podmínkou je celočíselnost koeficientů účelové funkce (lze splnit vždy)
- Různé varianty této metody
- Jsou založeny na **efektivním prohledávání** množiny přípustných řešení

10.4 Metoda větví a mezí – výchozí řešení

- Úlohu LP bez podmínek celočíselnosti označíme $\mathrm{LP}^{(0)}$
- Množinu přípustných řešení úlohy $\mathrm{LP}^{(0)}$ označíme $\mathbf{X}^{(0)}$
- Simplexovou metodou vypočteme optimální řešení

$$\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}$$

s hodnotou účelové funkce $z^{(0)}$

- Jestliže $\mathbf{x}^{(0)}$ vyhovuje i podmínkám celočíselnosti, je to **optimální celočíselné řešení** a **výpočet končí**
- Pokud ne, začneme větvení

10.4 Metoda větví a mezí – větvení

- Z vektoru $\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}$ vybereme libovolnou proměnnou, která porušuje podmínku celočíselnosti
- Označíme ji x_k a její hodnotu $x_k^{(0)}$ ⟶ **větvící proměnná**
- Množinu přípustných řešení $\mathbf{X}^{(0)}$ rozdělíme podle proměnné x_k na dvě podmnožiny ⟶ **větve**

levá větev **pravá větev**

10.4 Metoda větví a mezí – větvení

levá větev

- K úloze LP$^{(0)}$ přidáme podmínku $x_k \leq [x_k^{(0)}]$
  - a vytvoříme tak úlohu LP$^{(1)}$

pravá větev

- K úloze LP$^{(0)}$ přidáme podmínku $x_k \geq \left[x_k^{(0)}\right] + 1$
  - a vytvoříme tak úlohu LP$^{(2)}$
- Tyto úlohy opět řešíme SM bez ohledu na podmínky celočíselnosti a případně dále větvíme

10.4 Metoda větví a mezí – meze

- V každé větvi je odvozována **horní mez** hodnoty účelové funkce (za předpokladu maximalizace) celočíselného řešení:
  - $h^{(s)} = \lfloor z^{(s)} \rfloor$ v úlohách PILP
  - $h^{(s)} = z^{(s)}$ v úlohách MILP
  - kde s … je index úlohy LP$^{(s)}$, tj. s-té větve,

    $z^{(s)}$ … je optimální hodnota účelové funkce LP$^{(s)}$
- Mez $h^{(0)} = \lfloor z^{(0)} \rfloor$ je horní mezí hodnoty účelové funkce celočíselného řešení

10.4 Metoda větví a mezí – konec větve

1. Celočíselné řešení

- Výpočet v s-té větvi se ukončí, je-li v úloze LP$^{(s)}$
  - nalezeno OŘ $\mathbf{x}^{(s)}$, které je celočíselné
- Toto řešení je přípustným řešením (PŘ) původní úlohy LP$^{(0)}$ s podmínkami celočíselnosti
- Označme nejlepší dosud nalezené PŘ $\mathbf{x}^{(*)}$

  a jeho hodnotu účelové funkce $z^{(*)}$
- Je-li $z^{(s)} > z^{(*)}$, máme nové nejlepší PŘ a $z^{(*)} = z^{(s)}$

10.4 Metoda větví a mezí – konec větve

2. Nepřípustné řešení

- Výpočet v s-té větvi se ukončí, neexistuje-li v úloze $LP^{(s)}$ žádné PŘ
- Pak zde nemůže existovat ani PŘ původní úlohy $LP^{(0)}$ s podmínkami celočíselnosti

10.4 Metoda větví a mezí – konec větve

3. Nízká horní mez

- Výpočet v s-té větvi se ukončí, je-li $h^{(s)} < z^{(*)}$
- Pak ve větvi LP$^{(s)}$ nemůže existovat lepší PŘ původní úlohy, než řešení $\mathbf{x}^{(*)}$ již nalezené v jiné větvi

10.4 Metoda větví a mezí – konec

- Algoritmus končí, jestliže jsou uzavřeny všechny větve
- Nejlepší dosud nalezené PŘ $\mathbf{x}^{(*)}$ je hledaným optimálním řešením $\mathbf{x}^{*}$ celočíselné úlohy
- Jeho hodnota účelové funkce je $z^{*} = z^{(*)}$

10.4 Metoda větví a mezí

- Příklad - větve a meze

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\
x_1 \qquad\quad &\leq \ \ 3 \\
x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 &\text{ , celé} \\
z = 9x_1 + 10x_2 &\ \ldots\ \max.
\end{aligned}
$$

- Označme tuto úlohu (bez celočíselnosti) **LP$^{(0)}$**

10.4 Metoda větví a mezí

- **Příklad - větve a meze**
  - Řešení úlohy LP$^{(0)}$ simplexovou metodou
  - Ručně, pomocí LINGO či graficky
  - Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (3, 9/5)^{\mathrm{T}}, z^{(0)} = 45$$

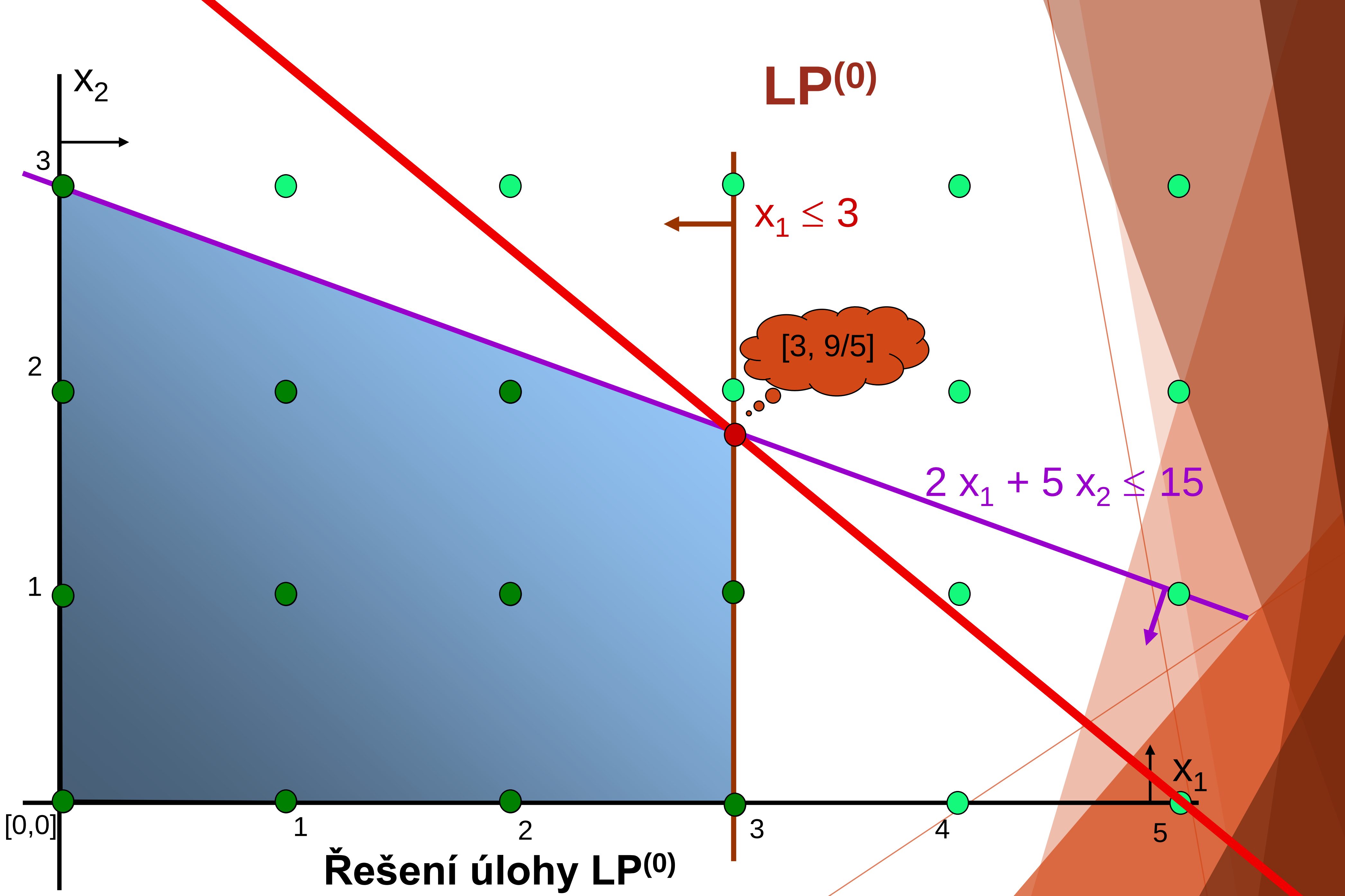
$$2x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \text{ , celé}$$
$$z = 9x_1 + 10x_2 \ldots \text{ max.}$$

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	β_i
x_2	0	1	1/5	-2/5	9/5
x_1	1	0	0	1	3
z_j	0	0	2	5	45

10.4 Metoda větví a mezí

- **Příklad - meze**
  - Optimální řešení $\mathbf{x}^{(0)} = (3, 9/5)^{\mathrm{T}}$,
    $$z^{(0)} = 45$$
    není celočíselné
  - Hodnota účelové funkce $z^{(0)} = h^{(0)} = [45]$ je **horní mezí** hodnoty účelové funkce celočíselné úlohy
  - Řešení úlohy znázorníme graficky

$LP^{(0)}$



Řešení úlohy $LP^{(0)}$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$x_1 \qquad \leq \ 3$$
$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \text{ , celé}$$
$$z = 9x_1 + 10x_2 \ldots \max.$$

10.4 Metoda větví a mezí

- **Příklad - větvení**
  - $\mathbf{x}^{(0)} = (3, 9/5)^{\mathrm{T}}, \ z^{(0)} = 45$
  - Proměnná x_2 porušuje podmínku celočíselnosti, vybereme ji jako **větvící proměnnou**
  - Vytvoříme **levou větev: $x_2 \leq [x_2]$, tj.**

    $$x_2 \leq 1,$$

    a **pravou větev: $x_2 \geq [x_2] + 1$, tj.**

    $$x_2 \geq 2.$$
- Formulujeme úlohy **LP$^{(1)}$** a **LP$^{(2)}$**

10.4 Metoda větví a mezí

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 &\le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0\text{, celé} \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\dots \max. \end{aligned}$$

- **Příklad - větvení úlohy LP$^{(0)}$**

Levá větev: LP$^{(1)}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 &\le 3 \\ \boldsymbol{x_2} &\boldsymbol{\le 1} \\ x_j &\ge 0 \\ j &= 1,2 \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\dots \max. \end{aligned}$$

Pravá větev: LP$^{(2)}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 &\le 3 \\ \boldsymbol{x_2} &\boldsymbol{\ge 2} \\ x_j &\ge 0 \\ j &= 1,2 \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\dots \max. \end{aligned}$$

10.4 Metoda větví a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(1)}$**
- K OŘ úlohy **LP$^{(0)}$** přidáme omezení $\mathbf{x_2 \leq 1}$

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i
x_2	0	1	1/5	-2/5	0	9/5
x_1	1	0	0	1	0	3
x_5	0	1	0	0	1	1
z_j	0	0	2	5	0	45

- **Jak musíme omezení upravit?**
-

x_5	0	0	-1/5	2/5	1	-4/5

10.4 Metoda větví a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(1)}$**
- Řešíme duálně simplexovou metodou
- Optimální řešení úlohy **LP$^{(1)}$** je celočíselné:

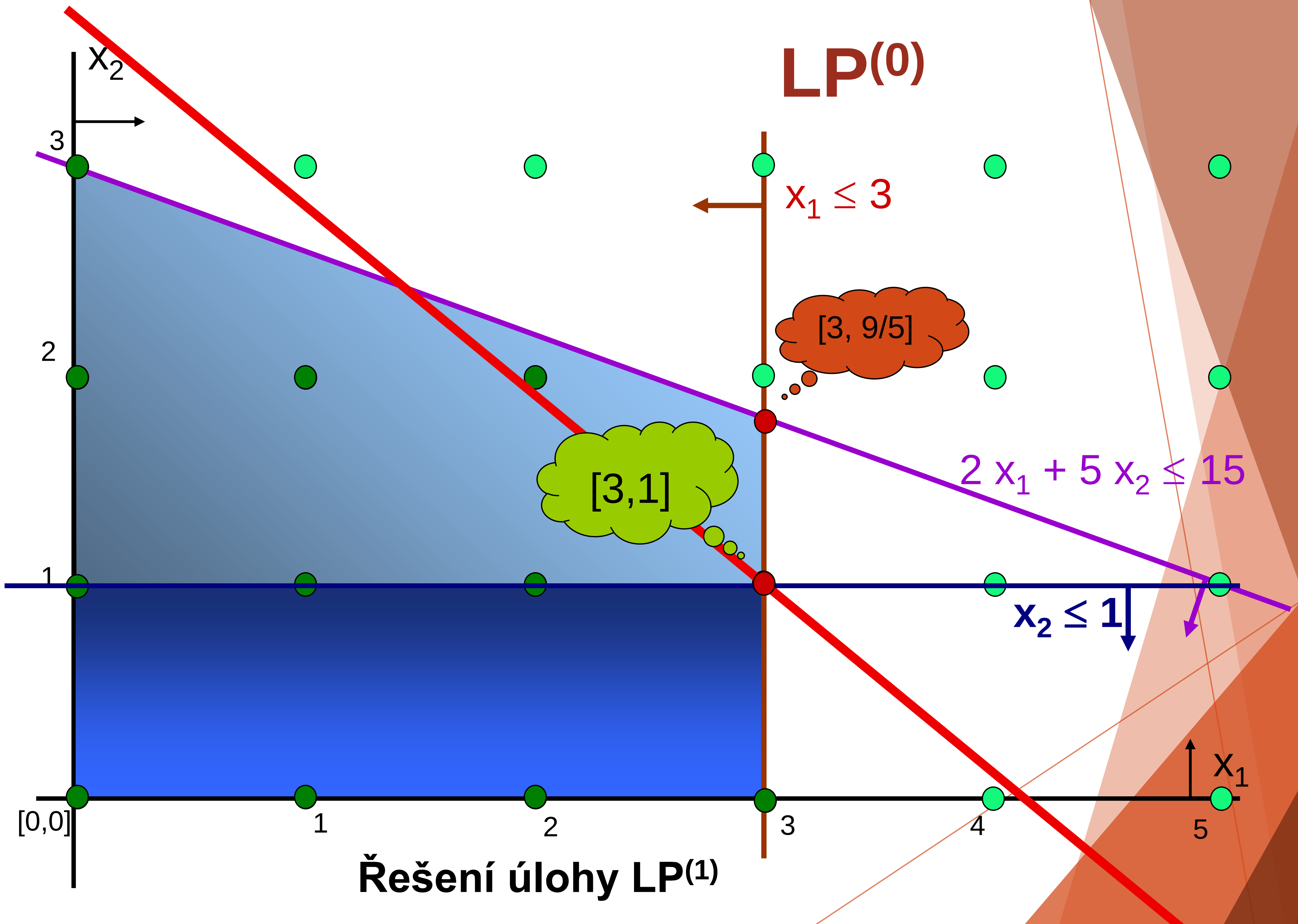
$$\mathbf{x}^{(1)} = (3,\ 1,\ 4,\ 0),\ z^{(1)} = 37$$

- Dosadíme $z^* = 37$

KONEC VĚTVE

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i
x_2	0	1	0	0	1	1
x_1	1	0	0	1	0	3
x_3	0	0	1	-2	-5	4
z_j	0	0	0	9	0	37

$LP^{(0)}$



Řešení úlohy $LP^{(1)}$

$LP^{(0)}$

$\mathbf{x}^{(0)} = (3;\ \mathbf{9/5})$

$z^{(0)} = 45$

Mez = 45

$x_2 \leq 1$

$x_2 \geq 2$

$LP^{(1)}$

$\mathbf{x}^{(1)} = (3;\ 1)$

$z^{(1)} = 37$

$z^{*} = \mathbf{37}$

KONEC VĚTVE

Úloha $LP^{(1)}$

10.4 Metoda větví a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(2)}$**
- K OŘ úlohy **LP$^{(0)}$** přidáme omezení $-x_2 \leq -2$

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i
x_2	0	1	1/5	-2/5	0	9/5
x_1	1	0	0	1	0	3
x_5	0	-1	0	0	1	-2
z_j	0	0	2	5	0	45

- **Jak musíme omezení upravit?**
-

x_5	0	0	1/5	-2/5	1	-1/5

10.4 Metoda větví a mezí

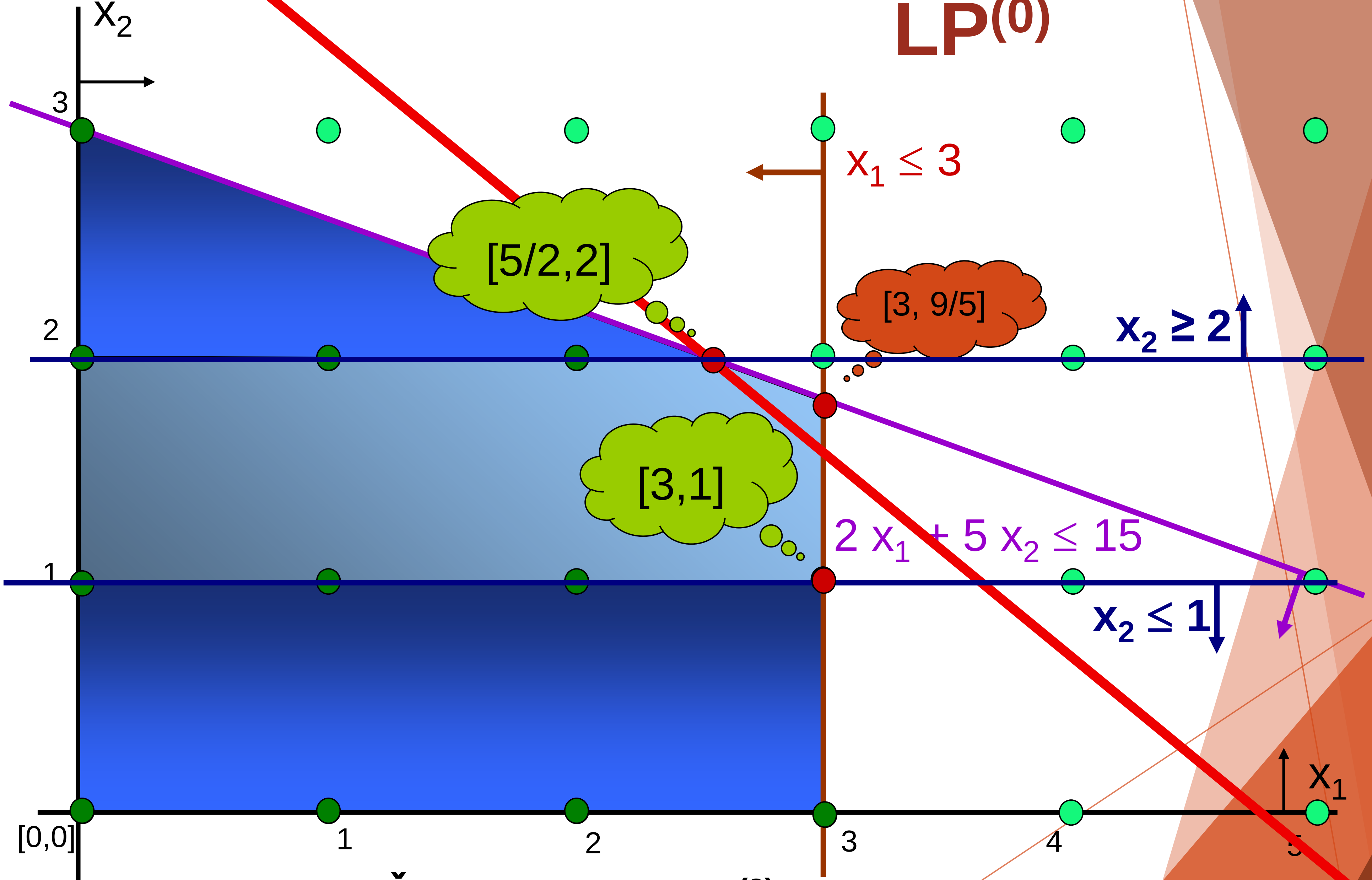
- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(2)}$**
- Řešíme duálně simplexovou metodou
- Optimální řešení úlohy **LP$^{(2)}$** není celočíselné:

$$\mathbf{x^{(2)} = (5/2,\ 2,\ 0,\ 1/2,\ 0),\ z^{(2)} = 85/2}$$

- $h^{(2)} = [85/2] > z^* = 37 \rightarrow$ větvíme **LP$^{(2)}$**

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0	0	-1	2
x_1	1	0	1/2	0	5/2	5/2
x_4	0	0	-1/2	1	-5/2	1/2
z_j	0	0	9/2	0	25/2	85/2

LP$^{(0)}$



Řešení úlohy LP$^{(2)}$

LP$^{(0)}$

$\mathbf{x}^{(0)} = (3;\ \mathbf{9/5})$

$x^{(0)} = 45$

Mez = 45

$x_2 \leq 1$

$x_2 \geq 2$

LP$^{(1)}$

$\mathbf{x}^{(1)} = (3;\ 1)$

$x^{(1)} = 37$

$z^* = 37$

KONEC VĚTVE

LP$^{(2)}$

$\mathbf{x}^{(2)} = (\mathbf{5/2};\ 2)$

$x^{(2)} = 42{,}5$

Mez = 42

Úloha LP$^{(2)}$

10.4 Metoda větví a mezí

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 \qquad &\le \ \ 3 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 &\text{ , celé} \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \text{ max.} \end{aligned}$$

- Příklad - větvení úlohy LP$^{(2)}$, $x_1 = 5/2$

Levá větev: LP$^{(3)}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 \qquad &\le 3 \\ x_2 &\ge 2 \\ x_1 \qquad &\le 2 \\ x_j &\ge 0 \\ j &= 1, 2 \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \text{ max.} \end{aligned}$$

Pravá větev: LP$^{(4)}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 \qquad &\le 3 \\ x_2 &\ge 2 \\ x_1 \qquad &\ge 3 \\ x_j &\ge 0 \\ j &= 1, 2 \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \text{ max.} \end{aligned}$$

10.4 Metoda větví a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(3)}$**
- K OŘ úlohy **LP$^{(2)}$** přidáme omezení **$x_1 \leq 2$**

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β_i
x_2	0	1	1/2	0	-1	0	2
x_1	1	0	1/2	0	5/2	0	5/2
x_4	0	0	-1/2	1	-5/2	0	1/2
x_6	0	0	-1/2	0	-5/2	1	-1/2
z_j	0	0	9/2	0	25/2	0	85/2

- Řešíme duálně simplexovou metodou

10.4 Metoda větví a mezí

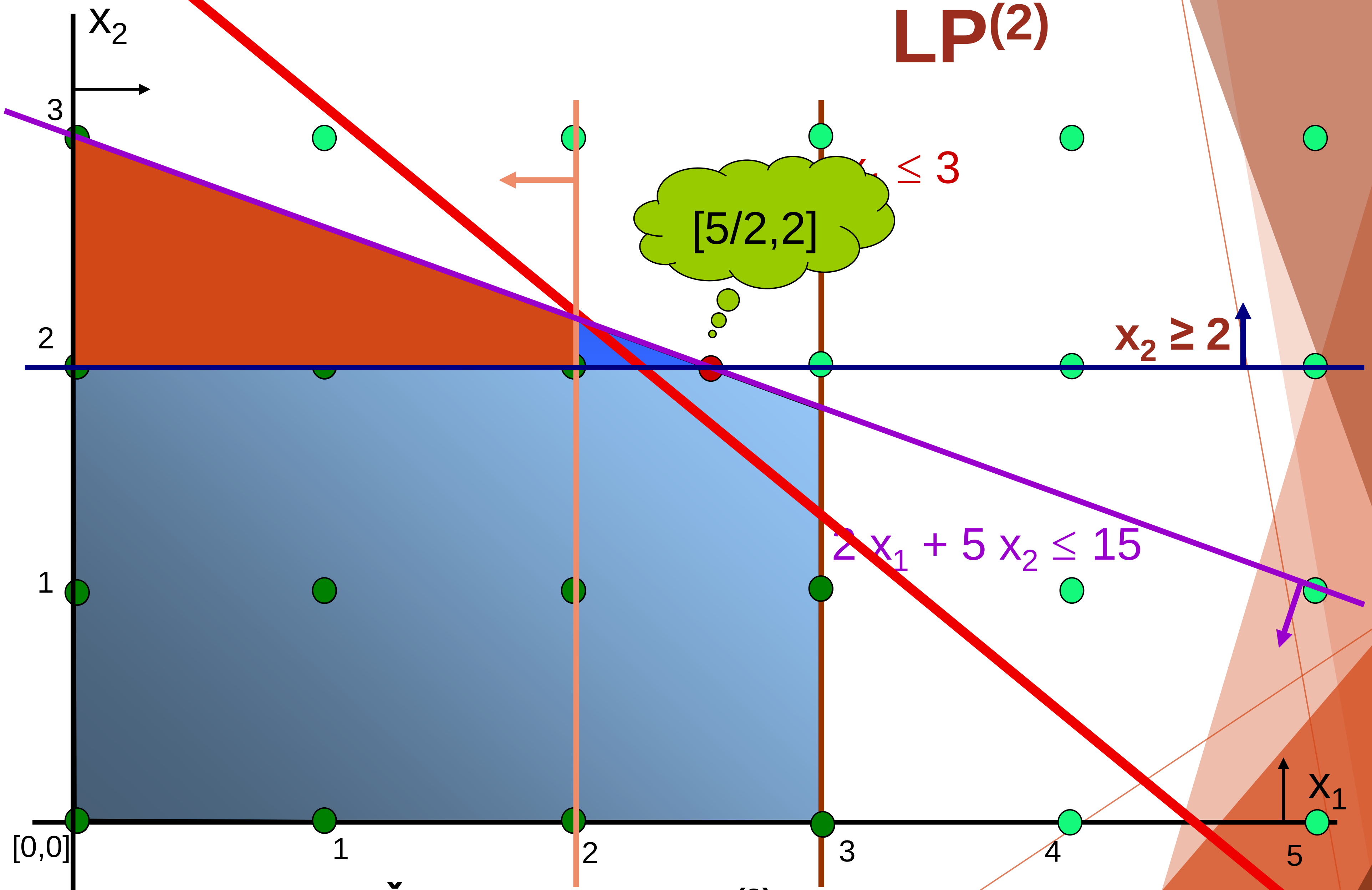
- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(3)}$**
- Řešíme duálně simplexovou metodou
- Optimální řešení úlohy LP$^{(2)}$ není celočíselné:

$$x^{(3)}=(2,\ 11/5,\ 0,\ 1),\ z^{(3)} = 40$$

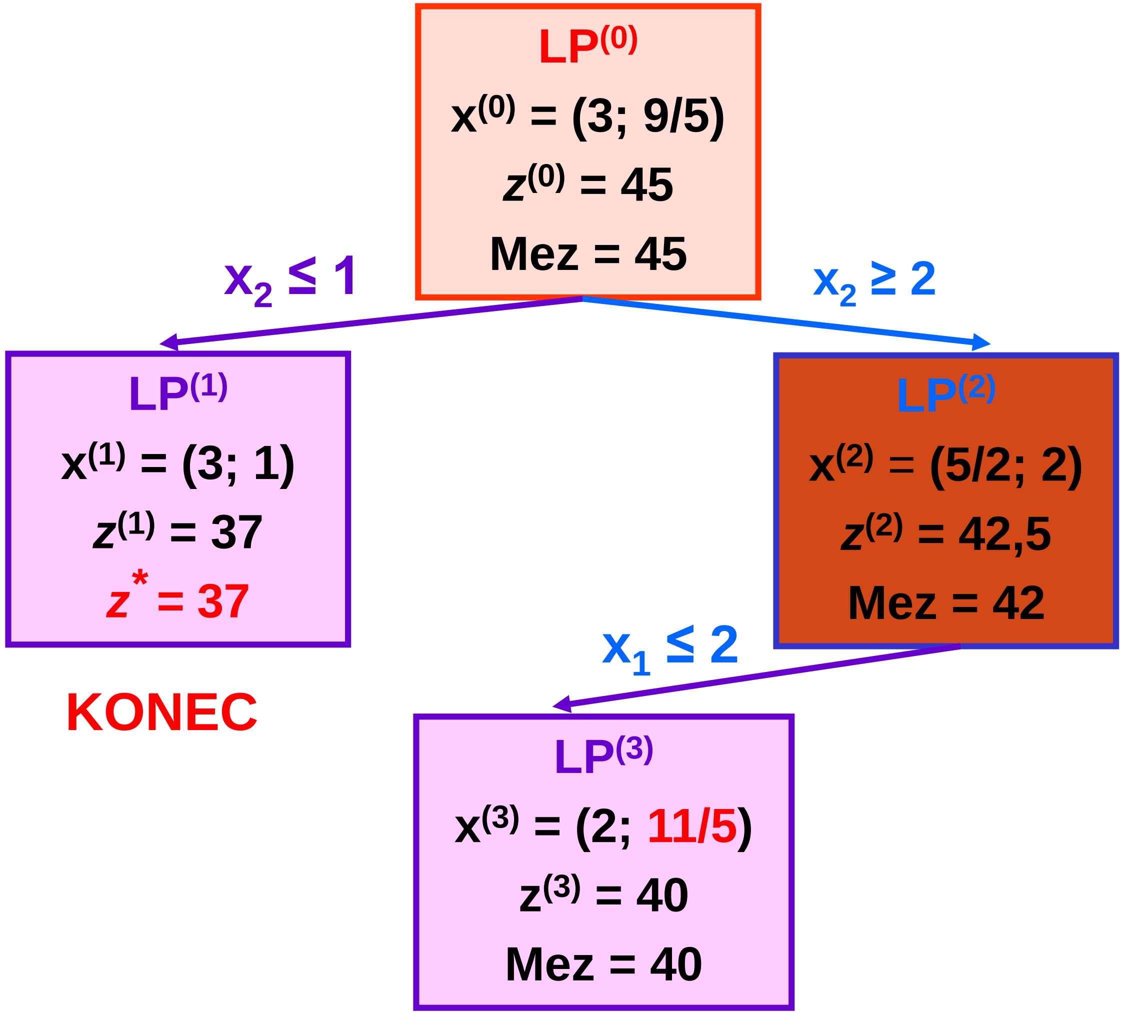
- $h^{(3)} = [40] > z^{*} = 37 \rightarrow$ větvíme LP$^{(3)}$

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_2	0	1	1/5	0	0	-2/5	11/5
x_1	1	0	0	0	0	1	2
x_4	0	0	0	1	0	-1	1
x_5	0	0	1/5	0	1	-2/5	1/5
z_j	0	0	2	0	0	5	40

LP$^{(2)}$



Řešení úlohy LP$^{(3)}$


$LP^{(0)}$
$x^{(0)} = (3; 9/5)$
$z^{(0)} = 45$
Mez = 45
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
$LP^{(1)}$
$x^{(1)} = (3; 1)$
$z^{(1)} = 37$
$z^* = 37$
KONEC
$LP^{(2)}$
$x^{(2)} = (5/2; 2)$
$z^{(2)} = 42,5$
Mez = 42
$x_1 \leq 2$
$LP^{(3)}$
$x^{(3)} = (2; 11/5)$
$z^{(3)} = 40$
Mez = 40

Úloha $LP^{(3)}$

10.4 Metoda větví a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(4)}$**
- K OŘ úlohy LP$^{(2)}$ přidáme omezení $x_1 \geq 3$

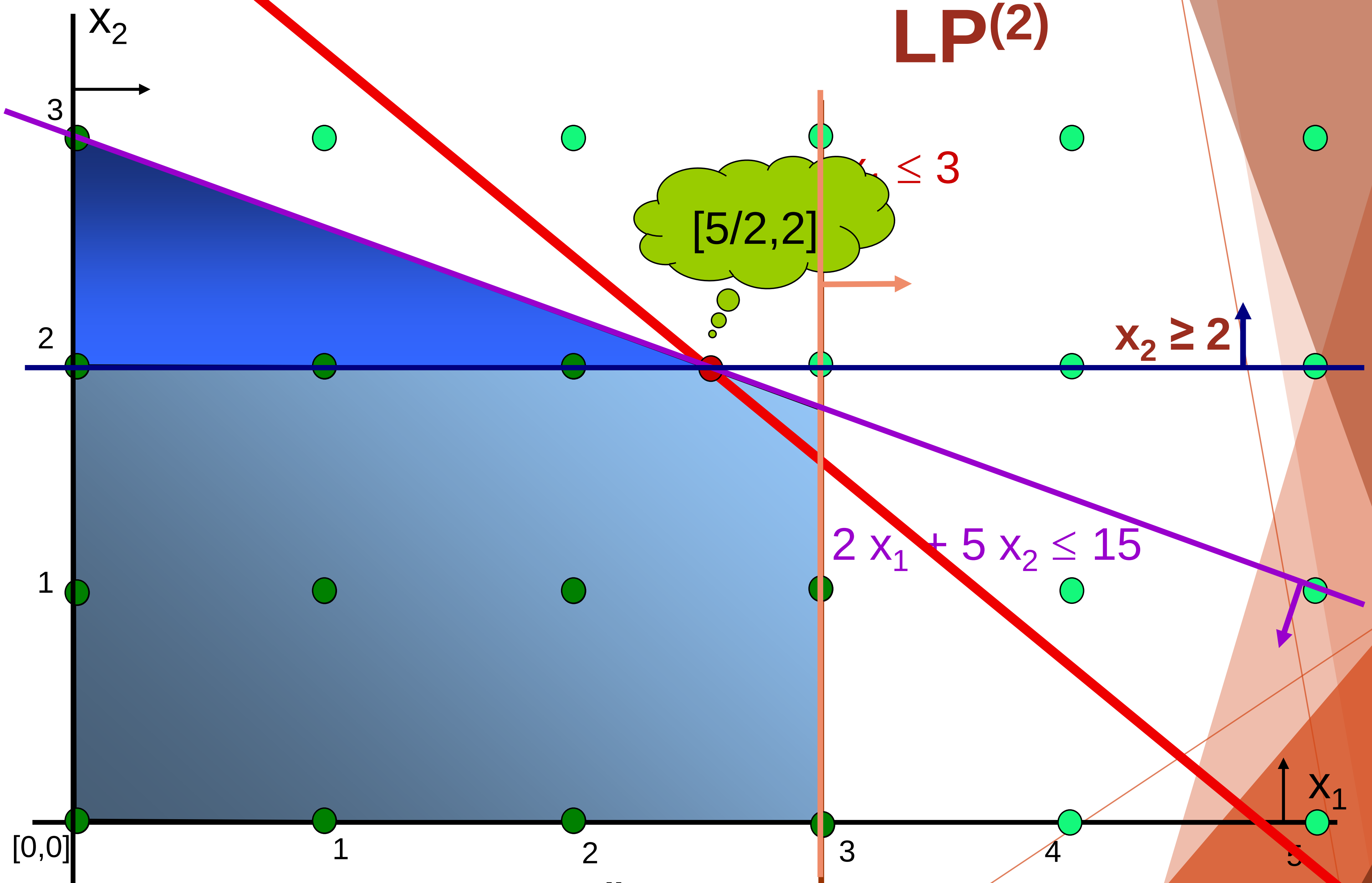
Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β_i
x_2	0	1	1/2	0	-1	0	2
x_1	1	0	1/2	0	5/2	0	5/2
x_4	0	0	-1/2	1	-5/2	0	1/2
x_6	0	0	1/2	0	5/2	1	-1/2
z_j	0	0	9/2	0	25/2	0	85/2

- Řešíme duálně simplexovou metodou

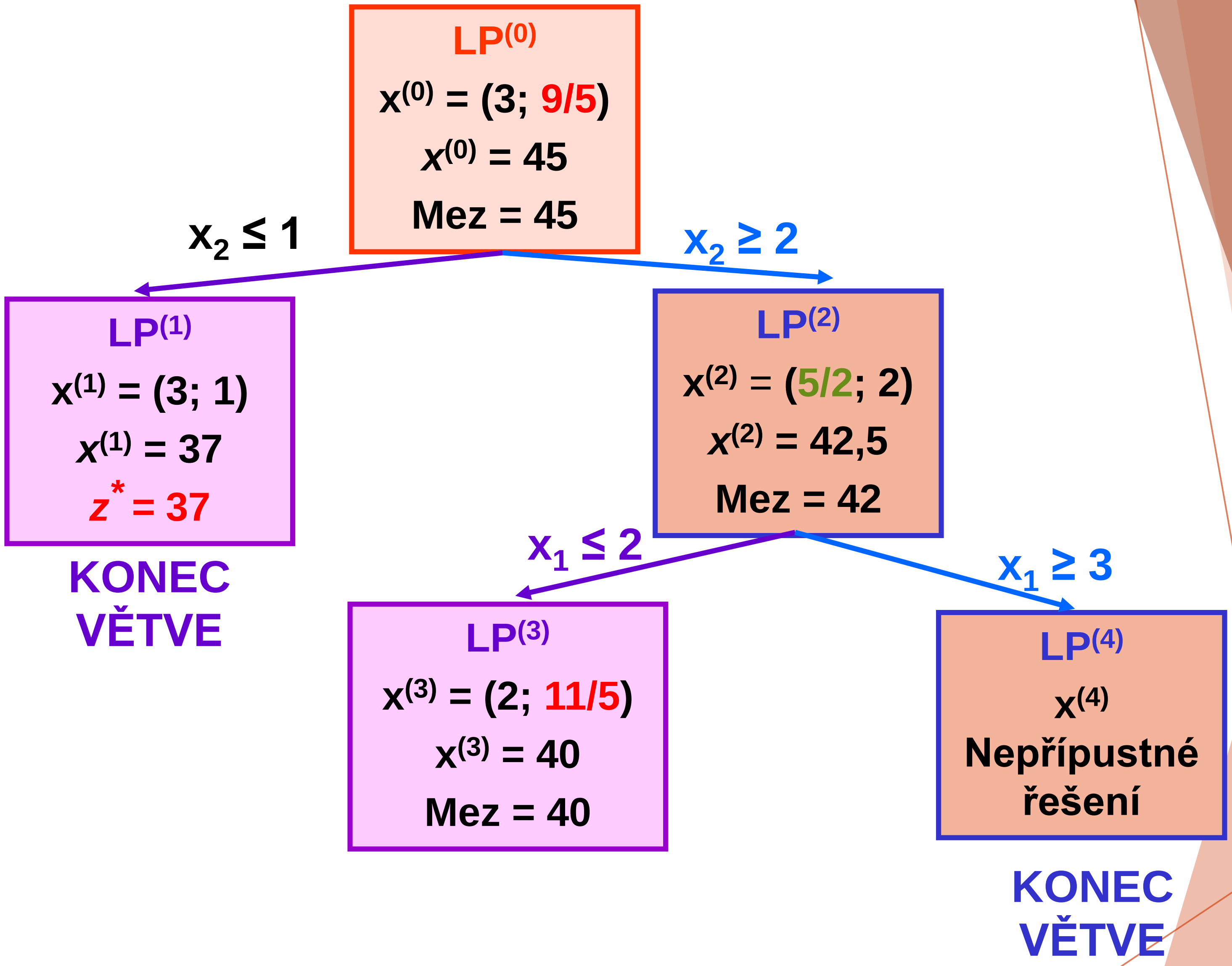
Úloha LP$^{(4)}$ nemá žádné přípustné (ani optimální) řešení

KONEC VĚTVE

$LP^{(2)}$



Obr. 5.5 – Řešení úlohy $LP^{(4)}$



$LP^{(0)}$
$x^{(0)} = (3; 9/5)$
$x^{(0)} = 45$
Mez = 45
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
$LP^{(1)}$
$x^{(1)} = (3; 1)$
$x^{(1)} = 37$
$z^* = 37$
KONEC VĚTVE
$LP^{(2)}$
$x^{(2)} = (5/2; 2)$
$x^{(2)} = 42{,}5$
Mez = 42
$x_1 \leq 2$
$x_1 \geq 3$
$LP^{(3)}$
$x^{(3)} = (2; 11/5)$
$x^{(3)} = 40$
Mez = 40
$LP^{(4)}$
$x^{(4)}$
Nepřípustné řešení
KONEC VĚTVE

Úloha $LP^{(4)}$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 \quad\quad &\le \ \ 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0&\text{ , celé} \\ z = 9x_1 + 10x_2 &\ldots \text{ max.} \end{aligned}$$

10.4 Metoda větví a mezí

- Příklad - větvení úlohy LP(3), $x_2 = 11/5$

Levá větev: LP(5)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 &\le 3 \\ \mathbf{x_2} &\ \mathbf{\ge 2} \\ \mathbf{x_1} &\ \mathbf{\le 2} \\ \mathbf{x_2} &\ \mathbf{\le 2} \\ x_j &\ge 0 \\ j &= 1, 2 \end{aligned}$$

$z = 9x_1+10x_2$ … max.

Pravá větev: LP(6)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1 &\le 3 \\ \mathbf{x_2} &\ \mathbf{\ge 2} \\ \mathbf{x_1} &\ \mathbf{\le 2} \\ \mathbf{x_2} &\ \mathbf{\ge 3} \\ x_j &\ge 0 \\ j &= 1, 2 \end{aligned}$$

$z = 9x_1+10x_2$ … max.

10.4 Metoda větví a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(5)}$**
- K OŘ úlohy **LP$^{(3)}$** přidáme omezení $x_2 \leq 2$

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i
x_2	0	1	1/5	0	0	-2/5	0	11/5
x_1	1	0	0	0	0	1	0	2
x_4	0	0	0	1	0	-1	0	1
x_5	0	0	1/5	0	1	-2/5	0	1/5
x_7	0	0	-1/5	0	0	2/5	1	-1/5
z_j	0	0	2	0	0	5	0	40

- Řešíme duálně simplexovou metodou

10.4 Metoda větví a mezí

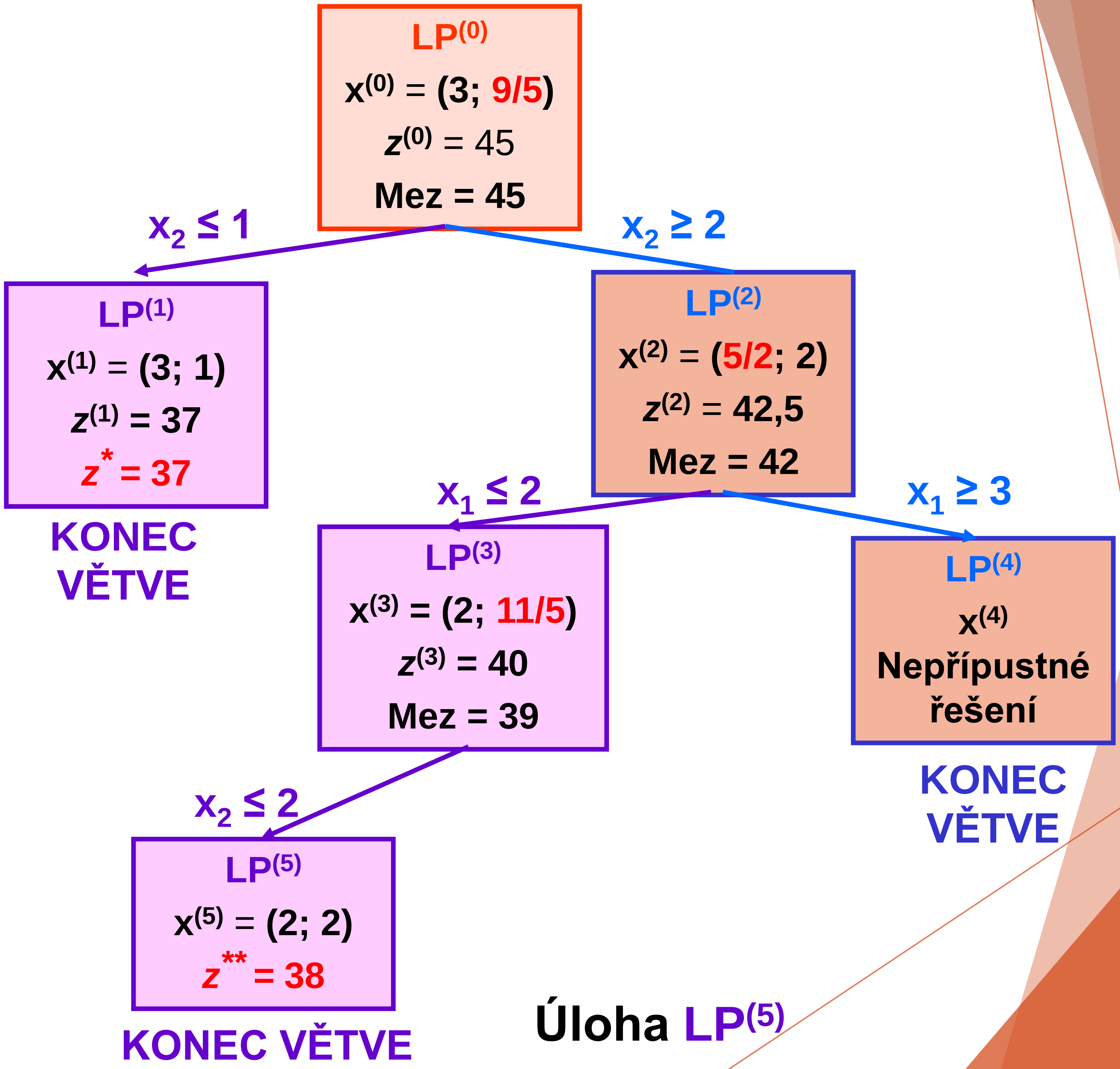
- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(5)}$**
- Řešíme duálně simplexovou metodou
- Optimální řešení úlohy **LP$^{(5)}$** je celočíselné:

$$x^{(5)} = (2, 2, 1, 1),\ z^{(5)} = 38$$

- $h^{(5)} = 38 > z^{*} \rightarrow z^{**} = 38$

KONEC VĚTVE

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i
x_2	0	1	0	0	0	0	1	2
x_1	1	0	0	0	0	1	0	2
x_4	0	0	0	1	0	-1	0	1
x_5	0	0	0	0	1	0	1	0
x_3	0	0	1	0	0	-2	-5	1
z_j	0	0	0	0	0	9	10	38



$LP^{(0)}$
$x^{(0)} = (3;\ 9/5)$
$z^{(0)} = 45$
Mez = 45
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
$LP^{(1)}$
$x^{(1)} = (3;\ 1)$
$z^{(1)} = 37$
$z^{*} = 37$
KONEC VĚTVE
$LP^{(2)}$
$x^{(2)} = (5/2;\ 2)$
$z^{(2)} = 42{,}5$
Mez = 42
$x_1 \leq 2$
$x_1 \geq 3$
$LP^{(3)}$
$x^{(3)} = (2;\ 11/5)$
$z^{(3)} = 40$
Mez = 39
$LP^{(4)}$
$x^{(4)}$
Nepřípustné řešení
KONEC VĚTVE
$x_2 \leq 2$
$LP^{(5)}$
$x^{(5)} = (2;\ 2)$
$z^{**} = 38$
KONEC VĚTVE

Úloha $LP^{(5)}$

10.4 Metoda větví a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(6)}$**
- K OŘ úlohy **LP$^{(3)}$** přidáme omezení $x_2 \geq 3$

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i
x_2	0	1	1/5	0	0	-2/5	0	11/5
x_1	1	0	0	0	0	1	0	2
x_4	0	0	0	1	0	-1	0	1
x_5	0	0	1/5	0	1	-2/5	0	1/5
x_7	0	0	1/5	0	0	-2/5	1	-4/5
z_j	0	0	2	0	0	5	0	40

- Řešíme duálně simplexovou metodou

10.4 Metoda větví a mezí

- **Příklad - řešení úlohy LP$^{(6)}$**
- Řešíme duálně simplexovou metodou
- Optimální řešení úlohy **LP$^{(6)}$** je celočíselné:

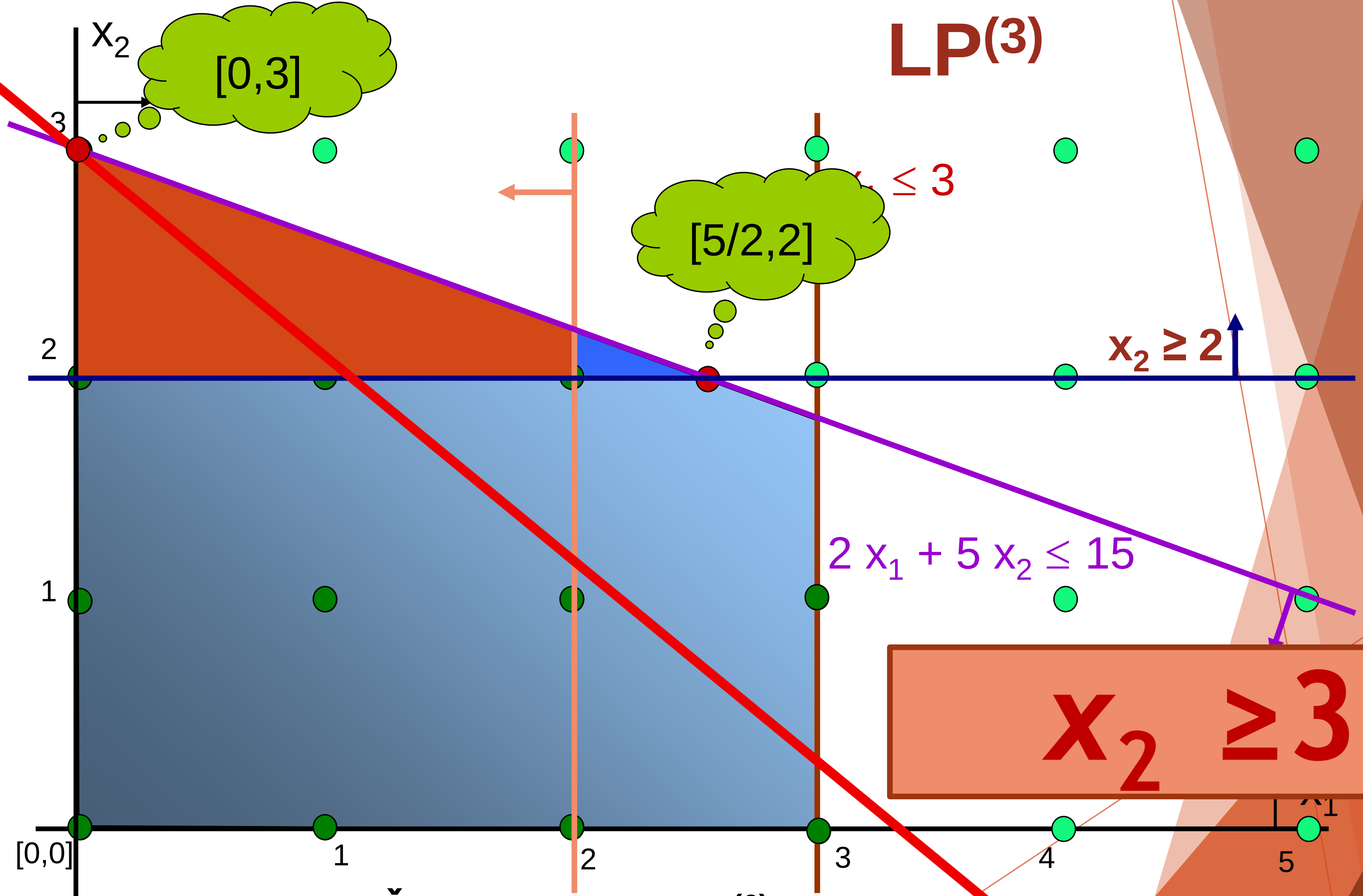
$$x^{(6)} = (0, 3, 0, 3),\ z^{(6)} = 30$$

- $h^{(6)} = 30 < z^{**} = 38$

KONEC VĚTVE

Zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β_i
x_2	0	1	0	0	0	0	-1	3
x_1	1	0	1/2	0	0	0	5/2	0
x_4	0	0	-1/2	1	0	0	-5/2	3
x_5	0	0	0	0	1	0	-1	1
x_6	0	0	-1/2	0	0	1	-5/2	2
z_j	0	0	9/2	0	0	0	25/2	30

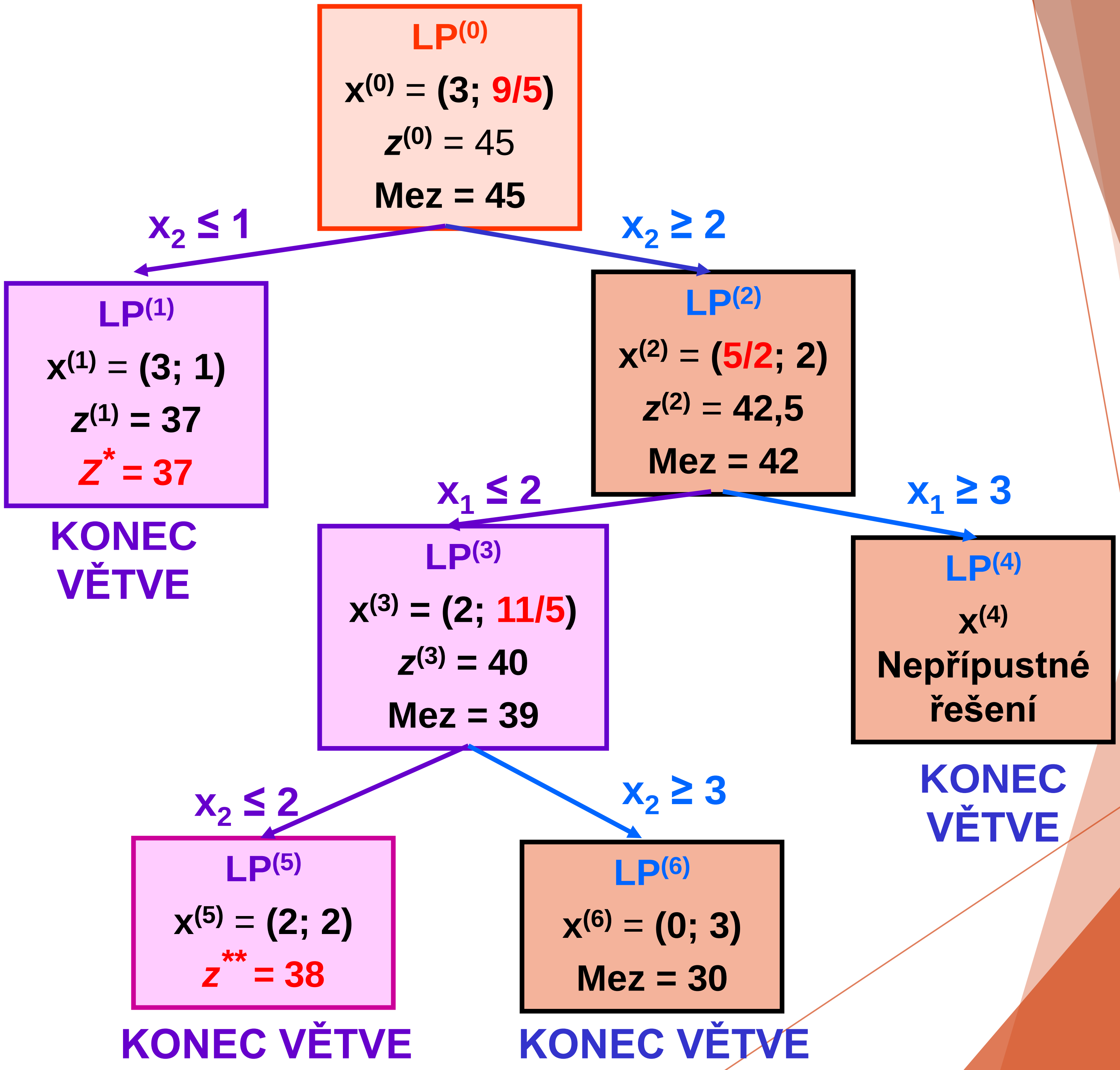
$LP^{(3)}$



$x_2\ \geq 3$

Řešení úlohy $LP^{(6)}$

Úloha $LP^{(6)}$



LP(0)
x(0) = (3; 9/5)
z(0) = 45
Mez = 45
x2 ≤ 1
x2 ≥ 2
LP(1)
x(1) = (3; 1)
z(1) = 37
Z* = 37
KONEC VĚTVE
LP(2)
x(2) = (5/2; 2)
z(2) = 42,5
Mez = 42
x1 ≤ 2
x1 ≥ 3
LP(3)
x(3) = (2; 11/5)
z(3) = 40
Mez = 39
LP(4)
x(4)
Nepřípustné řešení
KONEC VĚTVE
x2 ≤ 2
x2 ≥ 3
LP(5)
x(5) = (2; 2)
z** = 38
KONEC VĚTVE
LP(6)
x(6) = (0; 3)
Mez = 30
KONEC VĚTVE

10.4 Metoda větví a mezí

- **Příklad - zakončení výpočtu**
- Všechny větve jsou ukončeny
- Optimální hodnota účelové funkce celočíselné úlohy

$$z^{**} = 38$$

- Optimálním řešením úlohy IP je

$$x^{(5)} = (2, 2, 1, 1),\ z^{(5)} = 38$$

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 7

KONEC