4EK213 – Lineární modely

12. Dopravní problém – výchozí řešení

12. Distribuční úlohy LP

- Úlohy výrobního plánování (alokace zdrojů)
- Úlohy finančního plánování (optimalizace portfolia)
- Úlohy reklamního plánování (plánování reklamy)
- Směšovací problémy
- Nutriční problém (spec. případ směšovacího problému)
- Úlohy o dělení materiálu (řezné problémy)
- Rozvrhování pracovníků
- Distribuční úlohy (dopravní problém a další)

12. Distribuční úlohy LP

- Úkolem celé velké skupiny distribučních úloh je zajistit distribuci (tj. rozdělení) určité homogenní komodity (např. zboží) z jedné oblasti (např. dodavatelé) do druhé oblasti (např. odběratelé).
- **Proměnné:** přiřazení jednotky z první skupiny k jednotce z druhé skupiny (např. doprava od daného dodavatele k danému odběrateli), hodnoty určují, zda k přiřazení dojde či ne (0/1) nebo jak intenzivní přiřazení je (množství převáženého zboží)
- **Omezení:** kapacity a požadavky
- **Cíl:** obvykle minimalizace nákladů

12. Distribuční úlohy LP

- dopravní problém
- kontejnerový dopravní problém
- obecný distribuční problém
- přiřazovací problém
- úloha o pokrytí
- okružní dopravní problém
- výrobně-přepravní problém atd.

12. Distribuční úlohy LP

- Liší se od běžných úloh LP svým specifickým matematickým modelem
- Řada z nich je charakteristická požadavkem celočíselnosti proměnných
- Řeší se proto specifickými metodami
- Nejjednodušším reprezentantem je dopravní problém (DP)

12.1 Dopravní problém (DP)

- DP řeší distribuci homogenní látky od dodavatelů k odběratelům
- Je dán:
  - počet dodavatelů m (index $i = 1, 2, \dots, m$)
  - počet odběratelů n (index $j = 1, 2, \dots, n$)
  - kapacity dodavatelů a_i
  - požadavky odběratelů b_j
  - „cena“ (náklady, vzdálenost atd.) za dodání jedné jednotky od i-tého dodavatele k j-tému odběrateli c_{ij}
- Kapacity dodavatelů jsou zadány ve stejných jednotkách jako požadavky odběratelů

12.1 Dopravní problém (DP)

Úkol:

- určit, kolik jednotek dodá každý dodavatel každému odběrateli

Cíl:

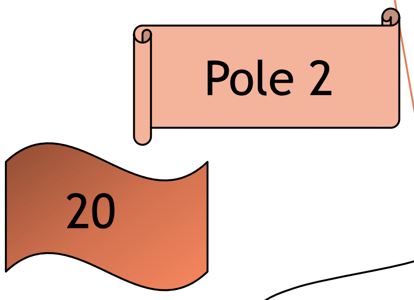
- uspokojit požadavky odběratelů tak, aby hodnota stanoveného cíle byla minimální

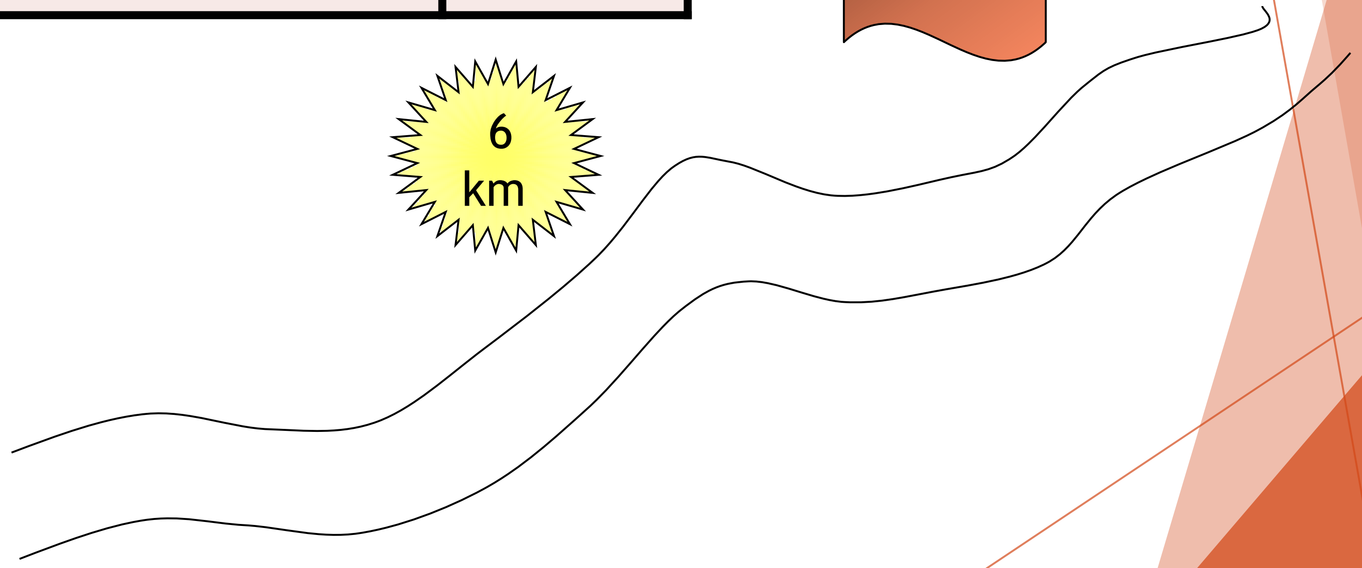
12.1 Příklad - zadání

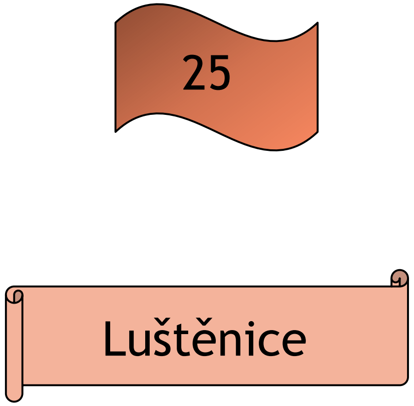
- V okolí Mladé Boleslavi působí mimo jiné tři zemědělská družstva: Sever Loukovec, Čistá u Mladé Boleslavi a Luštěnice.
- Družstva disponují 15, 20 a 25 kombajny.
- Je potřeba posekat tři pole s obilím, přičemž na první je potřeba poslat 22 kombajnů, na druhé 20 a na třetí 18.
- Vzdálenosti mezi jednotlivými družstvy a poli jsou uvedeny v tabulce.
- Určete přepravované počty kombajnů z jednotlivých družstev na pole tak, aby počet ujetých kilometrů byl minimální.

12.1 Příklad - zadání

[km]	*Pole 1*	*Pole 2*	*Pole 3*	Kapacity
Sever Loukovec	9	3	2	15
Čistá u Mladé Boleslavi	7	8	4	20
Luštěnice	5	6	11	25
Požadavky	22	20	18	60







4.1 Příklad - proměnné

- Proměnné označíme x_{ij}
- Hodnota proměnné x_{ij} určuje množství kombajnů v kusech dodaných i–tým dodavatelem (družstvem) j–tému odběrateli (poli)
- Proměnných je $m \cdot n = 3 \cdot 3 = 9$
- Vektor proměnných má složky

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33})^{\mathrm{T}}$$

- Na obrázku byla znázorněna volba náhodně zvolené proměnné x_{32}

4.1 Dopravní problém – formulace MM

- Proměnné v DP označíme x_{ij} (dvojitý index)
- Hodnota proměnné x_{ij} určuje množství homogenní látky dodané i–tým dodavatelem j–tému odběrateli
- Počet proměnných: $m \cdot n$
- Vektor proměnných má složky

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})^{\mathrm{T}}$$

- Předpokládá se rovnost součtu kapacit a součtu požadavků (vyrovnaný DP)*
- Omezení jsou proto formulována v rovnicích

4.1 Příklad – matematický model

minimalizovat

$$z = 9x_{11} + 3x_{12} + \cdots + 11x_{33}$$

za podmínek:

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 15$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 25$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 22$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 18$$

x_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	15
D2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	20
D3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	25
b_j	22	20	18	60

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$$

4.1 Příklad – matematický model

minimalizovat

$$z = 9x_{11} + 3x_{12} + \cdots + 11x_{33}$$

za podmínek:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & & & & = & 15 \\
 & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & & & & = & 20 \\
 & & & & & & x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & = & 25 \\
 & & & & & & & & & & \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & +x_{31} & & & = & 22 \\
 & x_{12} & & & +x_{22} & & & +x_{32} & & = & 20 \\
 & & x_{13} & & & +x_{23} & & & +x_{33} & = & 18
\end{array}$$

4.1 Zvláštnosti MM DP

- Matice strukturních koeficientů $\mathbf{A}$ se skládá pouze z nul a jedniček
- Vektor strukturních koeficientů proměnné x_{ij} má jedničku na i-tém a $j+m$-tém místě, ostatní prvky jsou rovny nule
- Ve vyrovnaném DP je vždy jedno vlastní omezení lineární kombinací ostatních
- Hodnost rozšířené matice $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ vyrovnaného DP je vždy $m+n-1$
- Všechny proměnné, kapacity i požadavky jsou ve stejných jednotkách

4.1 Dopravní problém – formulace MM

- Počet omezení DP je $m + n$
  - m pro dodavatele (řádková omezení, zajišťují kapacitu)

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = a_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

  - n pro odběratele (sloupcová omezení, zajišťují požadavky)

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} = b_j, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \ldots, n$$

4.1 Dopravní problém – formulace MM

- Podmínky nezápornosti:

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

- Účelová funkce:

minimalizovat $\quad z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ \dots + c_{mn}x_{mn}$

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

4.1 Dopravní problém – obecný model

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

4.1 Dopravní problém – formulace MM

- Každý **vyrovnaný dopravní problém**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

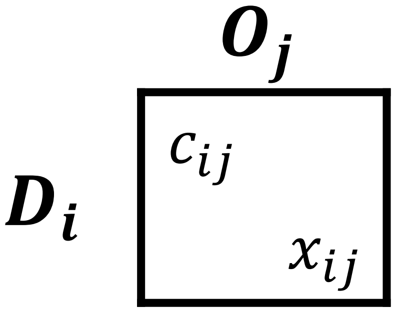
- má vždy přípustné řešení i optimální řešení
- Každý **nevyrovnaný dopravní problém**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- lze převést na vyrovnaný dopravní problém

4.1 Dopravní problém – dopravní tabulka

- Zejména z důvodu přehlednosti
- Řádek tabulky odpovídá řádkovému omezení
- Sloupec tabulky odpovídá sloupcovému omezení
- Řádky a sloupce vymezují políčka
- Políčko tabulky odpovídá jedné dopravní cestě mezi dodavatelem a odběratelem, tj. jedné proměnné x_{ij}



4.1 Příklad – dopravní tabulka

z = 411

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 15	3 –	2 –	15
D_2	7 7	8 –	4 13	20
D_3	5 –	6 20	11 5	25
b_j	22	20	18	60

4.1 Dopravní problém – nevyrovnaný DP

- Každý **<u>nevyrovnaný dopravní problém</u>**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- lze převést na vyrovnaný dopravní problém
  - Buď přidáním fiktivního dodavatele
  - Nebo přidáním fiktivního odběratele

4.1 Příklad - zadání

- Předpokládejme nyní, že Pole 3 je již posekané.
- Všechny ostatní informace zůstávají beze změny.
- Určete přepravované počty kombajnů z jednotlivých družstev na pole tak, aby počet ujetých kilometrů byl minimální.

[km]	*Pole 1*	*Pole 2*	Kapacity
Sever Loukovec	9	3	15
Čistá u Mladé Boleslavi	7	8	20
Luštěnice	5	6	25
Požadavky	22	20	42 / 60

4.1 Příklad – fiktivní odběratel

c_{ij}	O1	O2	a_i
D1	9	3	15
D2	7	8	20
D3	5	6	25
b_j	22	20	

Cenové koeficienty fiktivního odběratele jsou nulové

	O_1	O_2	F_3	a_i
D_1	9	3	0	15
D_2	7	8	0	20
D_3	5	6	0	25
b_j	22	20	18	60

4.1 Dopravní problém – nevyrovnaný DP

- Přebytek kapacit nad požadavky

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Přidání fiktivního odběratele (sloupec) s požadavkem

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Představuje neodeslané zboží (nevyčerpaná kapacita)

4.1 Příklad - zadání

- Předpokládejme nyní, že oproti původnímu zadání má zemědělské družstvo Sever Loukovec celodružstevní dovolenou a jejich kombajny nemohou sekat.
- Všechny ostatní informace zůstávají beze změny.
- Určete přepravované počty kombajnů z jednotlivých družstev na pole tak, aby počet ujetých kilometrů byl minimální.

[km]	*Pole 1*	*Pole 2*	*Pole 3*	Kapacity
Čistá u Mladé Boleslavi	7	8	4	20
Luštěnice	5	6	11	25
Požadavky	**22**	**20**	**18**	**60 / 45**

4.1 Příklad – fiktivní dodavatel

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
b_j	22	20	18	

	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9	3	2	**15**
D_2	7	8	4	**20**
F_3	0	0	0	**25**
b_j	**22**	**20**	**18**	**60**

Cenové koeficienty fiktivního dodavatele jsou nulové

4.1 Dopravní problém – nevyrovnaný DP

- Přebytek požadavků nad kapacitami

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Přidání fiktivního dodavatele (řádek) s kapacitou

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

- Představuje nedodané zboží (nesplněný požadavek)

4.2 Vlastnosti DP

- Definice 1: Přípustné řešení DP

Přípustné řešení DP je vektor

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})^{\mathrm{T}},$$

jehož složky vyhovují všem omezením (vlastním i podmínkám nezápornosti)

4.2 Vlastnosti DP

- Věta 1:

Každý DP má přípustné řešení.

- Důkaz:
- Položme $x_{ij} = \frac{a_i \cdot b_j}{K}$, pro všechna i a j,

  kde $K = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$
- Ukažme, že takové řešení je přípustné.

4.2 Vlastnosti DP

- Důkaz:
- Položme $x_{ij} = \frac{a_i \cdot b_j}{K}$, pro všechna i a j,

  kde $K = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$
- Dosaďme do řádkových omezení:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i \cdot b_j}{K} = \frac{a_i}{K} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{K} K = a_i \quad ☑$$

4.2 Vlastnosti DP

- Důkaz:
- Totéž pro sloupcová omezení:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i \cdot b_j}{K} = \frac{b_j}{K} \sum_{j=1}^{n} a_i = \frac{b_j}{K} K = b_j \quad ☑$$

- Řešení je přípustné
- Nevyrovnaný DP bychom nejprve vyrovnali a dokázali stejně

4.2 Vlastnosti DP

- Definice 2: Základní přípustné řešení DP

Základní přípustné řešení DP
je přípustné řešení,
které má nejvýše $(m + n - 1)$ kladných složek.
Vektory strukturních koeficientů
u kladných složek
tvoří lineárně nezávislou soustavu.

4.2 Vlastnosti DP

- Věta 2:

  Každý DP má základní přípustné řešení.

- Důkaz:
- Položme $x_{rs} = \min(a_r, b_s)$,
- kde a_r a b_s jsou upravené požadavky a kapacity po vyškrtnutí řádku či sloupce (viz příklad).
- V posledním kroku vyškrtneme řádek i sloupec.
- Obsadíme tedy maximálně $m + n - 1$ políček (základních proměnných). ☑

4.2 Vlastnosti DP

- <u>Definice 3</u>: Optimální řešení DP

Optimální řešení
je přípustné řešení,
které minimalizuje účelovou funkci

4.2 Vlastnosti DP

- Věta 3:

Každý DP má optimální řešení.

- Důkaz:
- Již jsme ukázali, že každý DP má přípustné řešení. ☑
- Jedinou možností, jak nemít OŘ, by byla neomezená hodnota účelové funkce.
- Podmínky nezápornosti však z omezují zdola. ☑

4.3 Duální problém k DP

- Duální proměnné přiřazené řádkovým omezením označíme u_i
- Duální proměnné odpovídající sloupcovým omezením označíme v_j
- Počet duálních proměnných je $m + n$
- Počet vlastních omezení je $m \cdot n$
- Vlastní omezení jsou nerovnice typu $\leq$
- Účelovou funkci maximalizujeme

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

4.3 Příklad – duální problém

minimalizovat

$$z = 9x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 7x_{21} + 8x_{22} + 4x_{23} + 5x_{31} + 6x_{32} + 11x_{33}$$

za podmínek:

$$\begin{array}{ll}
1 \cdot x_{11} + 1 \cdot x_{12} + 1 \cdot x_{13} + 0 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{22} + 0 \cdot x_{23} + 0 \cdot x_{31} + 0 \cdot x_{32} + 0 \cdot x_{33} = 15 & u_1 \\
0 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{13} + 1 \cdot x_{21} + 1 \cdot x_{22} + 1 \cdot x_{23} + 0 \cdot x_{31} + 0 \cdot x_{32} + 0 \cdot x_{33} = 20 & u_2 \\
0 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{13} + 0 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{22} + 0 \cdot x_{23} + 1 \cdot x_{31} + 1 \cdot x_{32} + 1 \cdot x_{33} = 25 & u_3 \\
 & \\
1 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{13} + 1 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{22} + 0 \cdot x_{23} + 1 \cdot x_{31} + 0 \cdot x_{32} + 0 \cdot x_{33} = 22 & v_1 \\
0 \cdot x_{11} + 1 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{13} + 0 \cdot x_{21} + 1 \cdot x_{22} + 0 \cdot x_{23} + 0 \cdot x_{31} + 1 \cdot x_{32} + 0 \cdot x_{33} = 20 & v_2 \\
0 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + 1 \cdot x_{13} + 0 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{22} + 1 \cdot x_{23} + 0 \cdot x_{31} + 0 \cdot x_{32} + 1 \cdot x_{33} = 18 & v_3
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$$

4.3 Příklad – duální problém

maximalizovat

$$f = 15u_1 + 20u_2 + 25u_3 + 22v_1 + 20v_2 + 18v_3$$

za podmínek:

$$u_1 + v_1 \leq 9$$
$$u_1 + v_2 \leq 3$$
$$u_1 + v_3 \leq 2$$
$$u_2 + v_1 \leq 7$$
$$u_2 + v_2 \leq 8$$
$$u_2 + v_3 \leq 4$$
$$u_3 + v_1 \leq 5$$
$$u_3 + v_2 \leq 6$$
$$u_3 + v_3 \leq 11$$
$$u_i, v_j \ - libovolné, i = 1,2,3, j = 1,2,3$$

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

4.3 Duální problém k DP

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

maximalizovat

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot v_j$$

za podmínek:

$$u_i + v_j \leq c_{ij},$$

$$i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

u_i, v_j - libovolné

- **Nesymetrický duální problém**

4.4 Výchozí řešení DP

- DP by bylo možné řešit simplexovou metodou
  - A většina softwarů to tak dělá
- Díky struktuře modelu DP používáme pro ruční výpočty dopravní tabulku a tzv. MODI metodu (modifikovaná distribuční metoda),
  - Ta svým postupem v podstatě odpovídá simplexové metodě v kombinaci s řešením duální úlohy

4.4 Výchozí řešení DP

- 1. krok – Nalezení výchozího základního přípustného řešení
- 2. krok – zlepšování řešení až do okamžiku, kdy je nalezeno optimální řešení

4.4 Výchozí řešení DP

- **1. krok - Nalezení výchozího základního přípustného řešení**
- Výchozím řešením může být libovolné základní přípustné řešení DP podle definice 2
- Výchozí řešení lze vypočítat přímo (není třeba pomocných proměnných)
- Z řady aproximačních metod si představíme tři typické:
  - metodu severozápadního rohu (SZR)
  - indexní metodu (metoda maticového minima)
  - Vogelovu aproximační metodu (VAM)

4.4 Výchozí řešení DP

- **Metoda severozápadního rohu (SZR)**
- 1. Vybereme neobsazené políčko, které je nevíce nahoře (sever) a nejvíce vlevo (západ). Tím určíme základní proměnnou - x_{rs}.

  (Začneme: x_{11}, $r = 1$, $s = 1$, $\widetilde{a_r} = a_r$, $\widetilde{b_s} = b_s$)
- 2. Hodnotu této základní proměnné určíme

$$x_{rs} = \min\left(\widetilde{a_r}, \widetilde{b_s}\right) = t$$

- 3. Upravíme zbytkovou kapacitu a požadavek:

$$\widetilde{a_r} = \widetilde{a_r} - t$$
$$\widetilde{b_s} = \widetilde{b_s} - t$$

4.4 Výchozí řešení DP

- **Metoda severozápadního rohu (SZR)**
- 4. Pokud $\widetilde{a_r} = 0$, vyškrtneme r-tý řádek (tj. ostatní proměnné v řádku jsou nezákladní).
- 5. Pokud $\widetilde{b_s} = 0$, vyškrtneme s-tý sloupec (tj. ostatní proměnné ve sloupci jsou nezákladní).
- 6. Pokračujeme od bodu 1.

4.4 Výchozí řešení DP

- **Metoda severozápadního rohu (SZR)**
- Obsazujeme, dokud $r < m$ a $s < n$
- Obsadíme tak $m + n - 2$ políček (základních proměnných)
- Poslední políčko obsadíme zbytkovou kapacitou (a zbytkovým požadavkem):

$$x_{mn} = t = \widetilde{a_m} = \widetilde{b_n}$$

4.4 Příklad – VŘ - SZR

z = 528

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 15	3 –	2 –	0
D_2	7 7	8 13	4 –	0
D_3	5 –	6 7	11 18	0
b_j	0	0	0	60

4.4 Výchozí řešení DP

- **Metoda maticového minima – indexní (IND)**
- 1. Obsazujeme vždy neobsazené políčko s nejnižší cenou. Tím určíme základní proměnnou - x_{rs}.
- Další postup je analogický s postupem u metody severozápadního rohu
- 2. Určíme hodnotu vybrané základní proměnné podle bodu 2
- 3. Vypočteme zbytkové kapacity a požadavky podle bodu 3.
- 4. Vyškrtneme řádek či sloupec analogicky bodům 4 a 5.
- 5. Vracíme se k bodu 1 tohoto algoritmu.

4.4 Výchozí řešení DP

- **Metoda maticového minima - indexní (IND)**
- Pokud se stane, že máme více políček s minimální cenou:
  - Obsadíme políčko s vyšší možnou hodnotou proměnné (t)
  - Tzn., že obsadíme políčko s minimální cenou, do kterého se vejde nejvíce
  - Je–li např. $c_{14} = 1$ a $x_{14} = \min(100, 200) = 100$ a $c_{42} = 1$ a $x_{42} = \min(300, 200) = 200$, obsadíme políčko proměnné x_{42}

4.4 Výchozí řešení DP

- **Metoda maticového minima - indexní (IND)**
- Poznámky:
  - V posledním řádku či sloupci můžeme políčka obsazovat již v libovolném pořadí
  - Máme-li model s fiktivním dodavatelem či odběratelem, jsou ceny fiktivních proměnných nulové
    - Tyto proměnné obsazujeme až nakonec

4.4 Příklad – VŘ - IND

z = 306

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 –	3 –	2 15	0
D_2	7 –	8 17	4 3	0
D_3	5 22	6 3	11 –	0
b_j	0	0	0	60

4.4 Výchozí řešení DP

- **Vogelova aproximační metoda (VAM)**
- 1. V každém řádku a sloupci vypočteme rozdíl (diferenci) dvou nejnižších cen u neobsazených políček (2. nejnižší cena mínus nejnižší cena)
- 2. Ze všech takto vypočtených diferencí najdeme nejvyšší (největší rozdíl) – tím identifikujeme řádek či sloupec.
- 3. V identifikovaném řádku nebo sloupci vybereme políčko s nejnižší cenou. Tím určíme základní proměnnou - x_{rs}.

1. $\min c_{ij}$

2. $\max d$

3. $\min c_{ij}$

4.4 Výchozí řešení DP

- **Vogelova aproximační metoda (VAM)**
- Další postup je analogický s postupem u metody severozápadního rohu
- 4. Určíme hodnotu vybrané základní proměnné podle bodu 2
- 5. Vypočteme zbytkové kapacity a požadavky podle bodu 3
- 6. Vyškrtneme řádek či sloupec analogicky bodům 4 a 5
- 7. Vracíme se k bodu 1 tohoto algoritmu.

4.4 Výchozí řešení DP

- **Vogelova aproximační metoda (VAM)**
- Pokud se stane, že máme více políček s maximální diferencí:
  - Vybereme teoreticky obsazované políčko (kandidát) pro každou maximální diferenci
  - Následně obsadíme to políčko, která má nejnižší cenu
  - Pokud by i tak bylo kandidátů více, vybereme to s vyšší možnou hodnotou proměnné (t)
  - Tzn., že obsadíme políčko s maximální diferencí, které má nejnižší cenu (příp. do kterého se vejde nejvíce)

4.4 Výchozí řešení DP

- **Vogelova aproximační metoda (VAM)**
- Poznámky:
  - Vyškrtneme-li řádek, stačí přepočítat jen sloupcové rozdíly
  - Vyškrtneme-li sloupec, stačí přepočítat jen řádkové rozdíly
  - V posledním řádku či sloupci můžeme políčka obsazovat již v libovolném pořadí
  - Máme-li model s fiktivním dodavatelem či odběratelem, jsou ceny fiktivních proměnných nulové
    - Tyto proměnné obsazujeme klasicky podle algoritmu VAM, považujeme je za proměnné s nejnižší cenou

4.4 Příklad – VŘ - VAM

	O_j
D_i	c_{ij} / x_{ij}

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

	O_1	O_2	O_3	a_i	
D_1	9 –	3 15	2 –	0	$d = 1$
D_2	7	8	4	20	$d = 3$
D_3	5	6	11	25	$d = 1$
b_j	22	5	18	60	
	$d = 2$	$d = 3$	$d = 2$		

4.4 Příklad – VŘ - VAM

	O_j
D_i	c_{ij} / x_{ij}

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

	O_1	O_2	O_3	a_i	
D_1	9 –	3 15	2 –	0	
D_2	7	8	4 18	2	$d = 3$
D_3	5	6	11 –	25	$d = 1$
b_j	22	5	0	60	
	$d = 2$	$d = 2$	$d = 7$		

4.4 Příklad – VŘ - VAM

$$O_j$$

D_i: c_{ij}, x_{ij}

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

	O_1	O_2	O_3	a_i	
D_1	9 –	3 15	2 –	0	
D_2	7 –	8	4 18	2	$d = 1$
D_3	5 22	6	11 –	3	$d = 1$
b_j	0	5	0	60	
		$d = 2$	$d = 2$		

4.4 Příklad – VŘ - VAM

z = 261

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 –	3 15	2 –	0
D_2	7 –	8 2	4 18	0
D_3	5 22	6 3	11 –	0
b_j	0	0	0	60

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 6

KONEC