4EK213 – Lineární modely

12. Dopravní problém – MODI metoda

Mgr. Jana Sekničková, Ph.D.

jana.seknicka.eu

12.5 Báze DP

- <u>Definice 2 (připomenutí)</u>:

Základní přípustné řešení DP
je přípustné řešení,
které má nejvýše $(m+n-1)$ kladných složek.

Vektory strukturních koeficientů
u kladných složek
tvoří lineárně nezávislou soustavu.

12.5 Báze DP

- **Uzavřený obvod** v dopravní tabulce
  - grafické znázornění lineární kombinace vektorů
- Konstrukce uzavřeného obvodu:
  - Vyjdeme z určitého políčka dopravní tabulky
  - Pohybujeme se po obsazených polích v řádcích a sloupcích (ne diagonálně)
  - Vrátíme se k výchozímu políčku
  - Přitom můžeme některá obsazená políčka přeskočit (v lineární kombinaci mají koeficient roven nule)

12.5 Příklad - Báze DP

- Tabulka uvádí řešení DP:

$$m + n - 1 = 6$$

	O_1	O_2	O_3	O_4
D_1	x_{11}	x_{12}		x_{14}
D_2		x_{22}	x_{23}	
D_3		x_{32}		x_{34}

Řešení není ZPŘ?

12.5 Příklad - Báze DP

Tvoří uzavřený okruh.

	O_1	O_2	O_3	O_4
D_1	x_{11}	x_{12}		x_{14}
D_2			x_{23}	
D_3		x_{32}		x_{34}

Řešení není ZPŘ?

12.5 Příklad - Báze DP

Tvoří uzavřený okruh.

	$\boldsymbol{O_1}$	$\boldsymbol{O_2}$	$\boldsymbol{O_3}$	$\boldsymbol{O_4}$
$\boldsymbol{D_1}$	x_{11}	x_{12}		
$\boldsymbol{D_2}$	x_{21}			x_{24}
$\boldsymbol{D_3}$		x_{32}		x_{34}

Řešení není ZPŘ?

12.5 Příklad - Báze DP

Netvoří uzavřený okruh.

	O_1	O_2	O_3	O_4
D_1	x_{11}	x_{12}		x_{14}
D_2			x_{23}	
D_3			x_{33}	x_{34}

Řešení je ZPŘ?

12.5 Báze DP

- Matice báze $\mathbf{B}$:
  - Vektory strukturních koeficientů základních proměnných
  - Počet sloupců matice $\mathbf{B}$ je $m + n - 1$
  - Počet řádků matice $\mathbf{B}$ je $m + n$
  - Jeden řádek je lineární kombinací ostatních, můžeme ho z matice $\mathbf{B}$ vynechat
- Dostaneme redukovanou matici báze $\mathbf{B_0}$

12.5 Báze DP

- Věta 4:

  Všechny báze jsou trojúhelníkové.

- Alespoň jedna proměnná je tedy osamocena v řádku a alespoň jedna ve sloupci
- Hodnoty základních proměnných se tedy dají vyjádřit sčítáním a odčítáním kapacit a požadavků

12.5 Báze DP

- Hodnoty základních proměnných se tedy dají vyjádřit sčítáním a odčítáním kapacit a požadavků
- <u>Důsledek:</u> jsou-li všechny kapacity a_i a požadavky b_j celá čísla, jsou rovněž všechny proměnné každého základního řešení celá čísla
- Dopravní problém je tedy vždy možno řešit v celých číslech

12.5 Příklad – Báze DP

VAM	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 -	3 **15**	2 -	**15**
D_2	7 -	8 **2**	4 **18**	**20**
D_3	5 **22**	6 **3**	11 -	**25**
b_j	**22**	**20**	**18**	**60**

$$\mathbf{B} = [a_{12}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}]$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12.5 Příklad – Báze DP

VAM	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 / -	3 / 15	2 / -	**15**
D_2	7 / -	8 / 2	4 / 18	**20**
D_3	5 / 22	6 / 3	11 / -	**25**
b_j	**22**	**20**	**18**	**60**

$$x_{12} = a_1$$
$$x_{23} = b_3$$
$$x_{22} = a_2 - x_{23} = a_2 - b_3$$
$$x_{31} = b_1$$
$$x_{32} = a_3 - x_{31} = a_3 - b_1$$

12.6 Řešení DP

- Některou z aproximačních metod vypočteme výchozí řešení
- Pokračujeme iterační metodou:
  - Krok 1: Test optima
    - Je-li řešení optimální, výpočet končí
    - Není-li řešení optimální, určíme vstupující proměnou
  - Krok 2: Určení vystupující proměnné (v DP existuje vždy)
  - Krok 3: Transformace řešení, návrat ke kroku 1

12.6 Řešení DP

- Pro výpočet lze použít např. distribuční metodu
- Modifikovaná distribuční metoda (MODI) využívá pro test optima vlastností sdružených problémů definovaných ve větách o dualitě
- Princip metody:
  - 1. Vyjdeme z primárně přípustného řešení
  - 2. Vypočteme duální proměnné podle první podmínky věty o rovnováze:

$$x_j > 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = c_j$$

12.6 Řešení DP

- Výpočet u_i a v_j
- Vyjdeme z omezení duálního problému

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

- Vybereme všechna omezení odpovídající základním proměnným $(x_{ij} > 0)$
- Tato omezení jsou podle 1. podmínky věty o rovnováze splněna jako rovnost:

$$x_{ij} > 0 \rightarrow u_i + v_j = c_{ij}$$

12.6 Řešení DP

- <u>Výpočet u_i a v_j</u>
- Dostaneme soustavu $m + n - 1$ rovnic o $m + n$ proměnných $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$
- Soustava má jeden stupeň volnosti
- Za jednu duální proměnnou (libovolnou) dosadíme libovolnou hodnotu (zpravidla nulu), hodnoty ostatních dopočítáme ze soustavy
- Softwary volí obvykle $u_1 = 0$
- Poznámka: Pokud položíme rovnou nule jinou proměnnou (nebo zvolíme jinou počáteční hodnotu), jsou vypočtené hodnoty duálních proměnných jiné, ale jejich součty jsou stejné

12.6 Příklad – Řešení DP

IND	$\boldsymbol{O_1}$	$\boldsymbol{O_2}$	$\boldsymbol{O_3}$	$\boldsymbol{u_i}$
$\boldsymbol{D_1}$	9 -	3 -	2 **15**	
$\boldsymbol{D_2}$	7 -	8 **17**	4 **3**	
$\boldsymbol{D_3}$	5 **22**	6 **3**	11 -	
$\boldsymbol{v_j}$				

$u_1 + v_3 = 2$
$u_2 + v_2 = 8$
$u_2 + v_3 = 4$
$u_3 + v_1 = 5$
$u_3 + v_2 = 6$

$u_1 + v_1 \leq 9$
$u_1 + v_2 \leq 3$
$u_1 + v_3 \leq 2$
$u_2 + v_1 \leq 7$
$u_2 + v_2 \leq 8$
$u_2 + v_3 \leq 4$
$u_3 + v_1 \leq 5$
$u_3 + v_2 \leq 6$
$u_3 + v_3 \leq 11$

12.6 Řešení DP

- <u>Test optima</u>
- Podle věty o dualitě ($\mathbf{x}$ je přípustným řešením primární úlohy, $z = f$) stačí testovat duální přípustnost
  - u_i a v_j jsou libovolná ☑
  - Stačí tedy ověřit splnění duálních omezení (vlastních):

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \text{ neboli } u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$$

12.6 Řešení DP

- Test optima
- Z obecných vzorců lze odvodit, že redukovaná cena proměnné x_{ij} je rovna právě

$$z_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

- Test optima: $z_{ij} \leq 0$
- Test optima je tedy identický s testem v simplexové metodě a i další postup SM odpovídá

12.6 Řešení DP

- <u>Test optima:</u> $z_{ij} \leq 0$
- Platí-li pro všechna políčka, jsou všechna duální omezení splněna a řešení je optimální
- Neplatí-li, výpočet pokračuje určením vstupující proměnné x_{pk} podle

$$g = \max(z_{ij}) = z_{pk}$$

- Tzn., že hledáme políčko, které nejvíce porušuje duální přípustnost, tj. test optima

12.6 Příklad – Řešení DP

IND	O_1	O_2	O_3	u_i
D_1	9 -4 -	3 3 -	2 15	-2
D_2	7 0 -	8 17	4 3	0
D_3	5 22	6 3	11 -9 -	-2
v_j	7	8	4	

Test optima:

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$
$$u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$$
$$z_{ij} \leq 0$$

Vstupující proměnná:

$$x_{12} = t$$

12.6 Řešení DP

- Volba vystupující proměnné:
- Utvoříme uzavřený obvod políčka vstupující proměnné x_{pk} s ostatními základními proměnnými (obsazenými políčky)
- Hodnotu vstupující proměnné označíme t, tj. $x_{pk} = t$
- Z podmínek nezápornosti $x_{pk} \geq 0$, a tedy $\mathrm{t} \geq 0$
- Tuto hodnotu střídavě přičteme a odečteme od základních proměnných tvořících uzavřený obvod (rohy uzavřeného obvodu)

12.6 Příklad – Řešení DP

IND	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 -	3 3 -	2 15	15
D_2	7 -	8 17	4 3	20
D_3	5 22	6 3	11 -	25
b_j	22	20	18	

- 1. Vstupující proměnná x_{pk}
- 2. Uzavřený obvod x_{pk} s ostatními obsazenými políčky
- 3. $x_{pk} = t$
- 4. Střídavě přičteme $(+t)$ a odečteme $(-t)$ v rozích uzavřeného obvodu

12.6 Řešení DP

- Volba vystupující proměnné:
- Řešení v dalším kroku musí být ZPŘ
  - Přičítat $(+t)$ můžeme jakoukoliv hodnotu
  - Odečítat $(-t)$ však můžeme pouze s ohledem na podmínky nezápornosti
- Proto je $t = min(x_{ij}^{(-)})$, kde $x_{ij}^{(-)}$ označuje hodnoty základních proměnných, od kterých se bude t odečítat
- Políčko s $min(x_{ij}^{(-)})$ odpovídá vystupující proměnné

12.6 Příklad – Řešení DP

IND	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 -	3 +t -	2 -t 15	**15**
D_2	7 -	8 -t 17	4 +t 3	**20**
D_3	5 22	6 3	11 -	**25**
b_j	**22**	**20**	**18**	

Kolik je t?

$$t = \min(\mathbf{15}, \mathbf{17})$$
$$t = \mathbf{15}$$

12.6 Řešení DP

- Transformace tabulky:
- V uzavřeném obvodu v tabulce podle znamének přičteme a odečteme t
- Nové řešení musí být základní přípustné
- Na políčku vstupující proměnné je nyní hodnota t
- Políčko vystupující proměnné je neobsazené, hodnota (nezákladní) proměnné je rovna nule

12.6 Příklad – Řešení DP

	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 -	3 +t 15	2 -t -	15
D_2	7 -	8 -t 2	4 +t 18	20
D_3	5 22	6 3	11 -	25
b_j	22	20	18	

$$t = \min(\mathbf{15}, \mathbf{17})$$
$$t = \mathbf{15}$$

Je toto řešení:

- Přípustné ☑
- Základní ☑
- Optimální

12.6 Příklad – Řešení DP

	O_1	O_2	O_3	u_i
D_1	9 **-**	3 **15**	2 **-**	**-5**
D_2	7 **-**	8 **2**	4 **18**	**0**
D_3	5 **22**	6 **3**	11 **-**	**-2**
v_j	**7**	**8**	**4**	

$$u_1 + v_2 = 3$$
$$u_2 + v_2 = 8$$
$$u_2 + v_3 = 4$$
$$u_3 + v_1 = 5$$
$$u_3 + v_2 = 6$$

12.6 Příklad – Řešení DP

	O_1	O_2	O_3	u_i
D_1	9 -7 -	3 **15**	2 -3 -	**-5**
D_2	7 0 -	8 **2**	4 **18**	**0**
D_3	5 **22**	6 **3**	11 -9 -	**-2**
v_j	**7**	**8**	**4**	

Test optima:

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

$$u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$$

$$z_{ij} \leq 0$$

Je řešení optimální?

12.6 Příklad – Řešení DP

OŘ	O_1	O_2	O_3	u_i
D_1	9 -7 -	3 15	2 -3 -	-5
D_2	7 0 -	8 2	4 18	0
D_3	5 22	6 3	11 -9 -	-2
v_j	7	8	4	

$$\mathbf{x}^* = $$
$$= (0, 15, 0, 0, 2, 18, 22, 3, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$z^* = 261$$

Toto řešení jsme našli už metodou VAM

12.6 Příklad – Řešení DP

OŘ	O_1	O_2	O_3	u_i
D_1	9 -7 -	3 15	2 -3 -	**-5**
D_2	7 0 -	8 2	4 18	**0**
D_3	5 22	6 3	11 -9 -	**-2**
v_j	**7**	**8**	**4**	

Redukovaná cena:

$$z_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$$

Je jediné optimální?

12.6 Řešení DP

- <u>Možnosti zakončení:</u>
- Dle věty má DP vždy optimální řešení
  - Jedno
  - Nekonečně mnoho

12.6 Řešení DP

- <u>Alternativní optimální řešení:</u>
- Jestliže je v optimálním řešení některý koeficient $z_{ij} = 0$ u nezákladní proměnné, existuje alternativní optimální řešení
- Vypočteme ho tak, že tuto nezákladní proměnnou zvolíme jako vstupující a transformujeme tabulku
- Optimálních řešení existuje nekonečně mnoho
- Každé další optimální řešení je konvexní lineární kombinací dosud vypočtených OŘ

12.6 Příklad – Řešení DP

OŘ	O_1	O_2	O_3	u_i
D_1	9 -7 -	3 **15**	2 -3 -	**-5**
D_2	7 0 -	8 **2**	4 **18**	**0**
D_3	5 **22**	6 **3**	11 -9 -	**-2**
v_j	**7**	**8**	**4**	

Kolik je t?

$$t = \min(2, 22)$$
$$t = 2$$

12.6 Příklad – Řešení DP

OŘ	O_1	O_2	O_3	u_i
D_1	9 -7 -	3 15	2 -3 -	**-5**
D_2	7 0 2	8 -	4 18	**0**
D_3	5 20	6 5	11 -9 -	**-2**
v_j	**7**	**8**	**4**	

$$\mathbf{x}^{*(1)} = \\ = (0, 15, 0, 0, 2, 18, 22, 3, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$z^{*(1)} = 261$$

$$\mathbf{x}^{*(2)} = \\ = (0, 15, 0, 2, 0, 18, 20, 5, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$z^{*(2)} = 261$$

12.6 Příklad – Řešení DP

- <u>Alternativní optimální řešení:</u>
- Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^{*(1)} = (0, 15, 0, 0, 2, 18, 22, 3, 0)^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{x}^{*(2)} = (0, 15, 0, 2, 0, 18, 20, 5, 0)^{\mathrm{T}}$$

- Alternativní optimální řešení:

$$\mathbf{x}^{*} = \alpha \cdot \mathbf{x}^{*(1)} + (1-\alpha) \cdot \mathbf{x}^{*(2)}, \alpha \in \langle 0,1 \rangle$$

- Nezákladní optimální řešení, např. pro $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}^{*(1)} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}^{*(2)} = (0, 15, 0, 1, 1, 18, 21, 4, 0)^{\mathrm{T}}$$

12.6 Příklad – Řešení DP

AOŘ	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 -	3 15	2 -	**15**
D_2	7 1	8 1	4 18	**20**
D_3	5 21	6 4	11 -	**25**
b_j	**22**	**20**	**18**	

$$\mathbf{x}^{*(\alpha=\frac{1}{2})} = \\ = (0, 15, 0, 1, 1, 18, 21, 4, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$z^{*(1)} = 261$$

12.7 Příklad – Degenerace v DP

	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 / **15**	3 / -	2 / -	**15**
D_2	7 / -	8 / **20**	4 / -	**20**
D_3	5 / **7**	6 / -	11 / **18**	**25**
b_j	**22**	**20**	**18**	**60**

z = 528

Je toto řešení:

- **Přípustné** ☑
- **Základní** ☑
- **Optimální**

12.7 Příklad – Degenerace v DP

	O_1	O_2	O_3	u_i
D_1	9 / **15**	3 / -	2 / -	**4**
D_2	7 / -	8 / **20**	4 / -	
D_3	5 / **7**	6 / -	11 / **18**	**0**
v_j	**5**		**11**	

Co dál?

12.7 Degenerace v DP

- V degenerovaném řešení je jedna nebo více základních proměnných rovna nule
- V dopravní tabulce jsou některá políčka (základní proměnné) obsazena nulou
- Při výpočtu mají stejný význam jako ostatní obsazená políčka
- Znamená to, že je bereme v úvahu jak při výpočtu hodnot duálních proměnných, tak i při určování hodnoty t

12.7 Příklad – Degenerace v DP

	O_1	O_2	O_3	u_i
D_1	9 **15**	3 **-**	2 **-**	**4**
D_2	7 **-**	8 $\boxed{\mathbf{20}}$	4 **-**	
D_3	5 **7**	6 **-**	11 **18**	**0**
v_j	**5**		**11**	

z = 528

Které základní proměnné jsou nulové?

12.7 Degenerace v DP

- K degeneraci může dojít ve dvou případech:
- 1. Během výpočtu, kdy $t = min(x_{ij}^{(-)})$ pro několik základních proměnných současně
  - Jako vstupující proměnnou volíme libovolnou z těch, pro které platil vztah
  - Je třeba si hlídat výměnu vstupující a vystupující proměnné (nuluje se více proměnných, ale nezákladní bude jen jedna)
- 2. Při konstrukci výchozího řešení, kdy jsme najednou vyškrtli řádek i sloupec
  - Jako základní proměnnou s nulovou hodnotou volíme libovolnou proměnnou ve vyškrtnutém sloupci nebo vyškrtnutém řádku

12.7 Příklad – Degenerace v DP

	O_1	O_2	O_3	u_i
D_1	9 / 15	3 / -	2 / -	4
D_2	7 / -	8 / $\boxed{20}$	4 / 0	-7
D_3	5 / 7	6 / -	11 / 18	0
v_j	5	15	11	

$z = 528$

12.7 Příklad – Degenerace v DP

	O_1	O_2	O_3	u_i
D_1	9 15	3 $+t$ 16 -	2 13 -	4
D_2	7 -9 -	8 20	4 0	-7
D_3	5 7	6 9 -	11 18	0
v_j	5	15	11	

z = 528

Uzavřený okruh?

12.7 Příklad – Degenerace v DP

	O_1	O_2	O_3	u_i
D_1	9 $-t$ **15**	3 $+t$ 16 -	2 13 -	**4**
D_2	7 -9 -	8 $-t$ **20**	4 $+t$ **0**	**-7**
D_3	5 $+t$ **7**	6 9 -	11 $-t$ **18**	**0**
v_j	**5**	**15**	**11**	

Kolik je t?

$t = 15$
a dále MODI

12.7 Degenerace v DP

- Při konstrukci výchozího řešení si tedy zkontrolujeme, že máme obsazeno právě m+n-1 políček
- To musí platit i kdykoliv v průběhu výpočtu
- Ve výpočtu pokračujeme klasicky MODI metodou
- Během výpočtu dojde zpravidla k odstranění degenerace
- Pozor při určování hodnoty t, která může být při degeneraci nulová

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 6

KONEC