

Cvičení 1 – Lineární algebra

Příklad 1 – Součet čísel, vektorů a matic

Nalezněte výsledky následujících operací:

a) $-5 + 2,7 =$

b) $3 + \begin{pmatrix} 7 \\ \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2,5 & 4 \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2,3 \\ \end{pmatrix} =$

d) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix} =$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ \end{pmatrix} =$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ \end{pmatrix} =$

g) $\begin{pmatrix} -3 & 2,5 & 4 & -2 \\ 1 & 2,3 & -3 & 1 \\ 3 & -1,2 & 2 & 5 \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3,5 & -2 & 1 \\ -1 & -1,3 & 3 & -1 \\ -2 & 1,2 & 1 & -10 \\ \end{pmatrix} =$

h) $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ \end{pmatrix} + 7 =$

Příklad 2 – Součin čísel, vektorů a matic

Nalezněte výsledky následujících operací:

a) $-5 \cdot 2,7 =$

b) $5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2,5 & 4 \\ \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ \end{pmatrix} \cdot 3 =$

d) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix} =$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \end{pmatrix} =$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 2,5 & 4 & -2 \\ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \\ \end{pmatrix} =$

g) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ \end{pmatrix} =$

$$\text{h) } \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\text{j) } \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\text{k) } \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\text{l) } \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\text{m) } \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

Příklad 3 – Transpozice vektorů a matic

Nalezněte výsledky následujících operací:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 2,5 & 4 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2,3 \end{pmatrix}^T =$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} -3 & 2,5 & 4 & -2 \\ 1 & 2,3 & -3 & 1 \\ 3 & -1,2 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3,5 & -2 & 1 \\ -1 & -1,3 & 3 & -1 \\ -2 & 1,2 & 1 & -10 \end{pmatrix}^T =$$

$$e) \begin{pmatrix} 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} =$$

$$f) \begin{pmatrix} 3 & 2,5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Příklad 4 – Inverze matic

a) Invertujte matici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a ověřte správnost výpočtu.

b) Invertujte matici:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Invertujte matici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Příklad 5 – Gaussova-Jordanova metoda úplné eliminace

Řešte Gaussovou-Jordanovou metodou úplné eliminace následující soustavu lineárních rovnic a ověřte správnost řešení:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -4$$

$$x_1 - 2x_4 = 5$$

Příklad 6 – Konvexní lineární kombinace vektorůa) V rovině jsou dány dva body $A = [3; 5]$, $B = [1; 7]$

i. Vyjádřete souřadnice všech bodů v rovině ležících na přímce AB.

ii. Vyjádřete souřadnice všech bodů v rovině ležících na úsečce AB.

iii. Vyjádřete souřadnice bodu ležícího ve středu úsečky AB.

b) Uvažujte dva vektory $\mathbf{u} = (3; 5)^T$, $\mathbf{v} = (1; 7)^T$.i. Proveďte lineární kombinaci vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} .ii. Proveďte konvexní lineární kombinaci vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} .

Příklad 7 – Operace s vektory a maticemi (domácí cvičení)

Předpokládejte následující vektory a matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \\ 110 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}, c_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Vyjádřete následující výrazy:

- B^{-1}
- $B^{-1}A$
- $B^{-1}b$
- AB
- Bc_B
- $c_B^T B^{-1}$
- $c_B^T B^{-1}b$
- $c_B^T B^{-1}A - c^T$
- $x^T A$
- $c^T x$
- Ax
- $u^T B$
- $u^T A$
- $u^T x$
- $u^T b$

Příklad 8 – Operace s vektory a maticemi v MS Excelu

Předpokládejte vektory a matice z příkladu 7. Vypočtěte v MS Excelu:

- $B^{-1}A$
- $B^{-1}b$
- $c_B^T B^{-1}$
- $c_B^T B^{-1}b$
- $c_B^T B^{-1}A - c^T$
- $u^T A$
- $u^T b$

Příklad 9 – Řešení úlohy lineárního programování v MS Excelu, doplňku Řešitel

Předpokládejte vektory a matice z příkladu 7. Nalezněte optimální řešení úlohy:

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = c^T x \\ \text{za podmíněk:} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Příklad 10 – Řešení úlohy LP v MS Excelu, doplňku Řešitel (domácí cvičení)

Zapište následující úlohu v maticové formě (tvar z příkladu 9) a nalezněte optimální řešení úlohy v doplňku Řešitel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 160 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 100 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 120 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \\ z &= -20x_1 + 10x_2 - 30x_3 \dots \text{min.} \end{aligned}$$