

## Cvičení 10 – Celočíslné programování

### Příklad 1

Uvažujte následující úlohu celočíselného lineárního programování:

$$\begin{aligned}2x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\3x_1 + x_2 &\leq 11 \\x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, \text{ celé} \\z = 5x_1 + 2x_2 &\dots \text{ max.}\end{aligned}$$

1. Vyřešte úlohy v jakémkoliv dostupném softwaru, který umíte ovládat.
2. Vyřešte úlohu graficky.
3. Vyřešte úlohu Gomoryho metodou.
4. Vyřešte úlohu metodou větvení a mezí.

### Příklad 2

Uvažujte následující úlohu celočíselného lineárního programování:

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 200 \\x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 150 \\x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, 3, \text{ celé} \\z = 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 &\dots \text{ max.}\end{aligned}$$

1. Vyřešte úlohy v jakémkoliv dostupném softwaru, který umíte ovládat.
2. Vyřešte úlohu Gomoryho metodou.
3. Vyřešte úlohu metodou větvení a mezí.

### Příklad 3

Uvažujte následující úlohu celočíselného lineárního programování:

$$\begin{aligned}5x_1 + 3x_2 &\leq 93 \\-6x_1 + 7x_2 &\leq 77 \\2x_1 + 2x_2 &\leq 41 \\x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, \text{ celé} \\z = 2x_1 + 4x_2 &\dots \text{ max.}\end{aligned}$$

1. Vyřešte úlohy v jakémkoliv dostupném softwaru, který umíte ovládat.
2. Vyřešte úlohu graficky.
3. Vyřešte úlohu Gomoryho metodou.
4. Vyřešte úlohu metodou větvení a mezí.

**Příklad 4**

Uvažujte následující úlohu celočíselného lineárního programování (pozor na znaménko třetí nerovnosti!):

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 11 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_j &\geq 0, \quad j=1, 2, \text{ celé} \\ z = 2x_1 + 3x_2 &\dots \text{ max.} \end{aligned}$$

1. Vyřešte úlohu graficky.
2. Vyřešte úlohu Gomoryho metodou.
3. Vyřešte úlohu metodou větvení a mezi.

**Příklad 5**

Uvažujte následující úlohu celočíselného lineárního programování (pozor na znaménko třetí nerovnosti!):

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 &\leq 170 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 &\geq 40 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \text{ celé} \\ z = 360x_1 - 360x_2 - 275x_3 &\dots \text{ max.} \end{aligned}$$

1. Vyřešte úlohu Gomoryho metodou.
2. Vyřešte úlohu metodou větvení a mezi.

*Pozn.:* Kontrolní výsledky k příkladu 5

Neceločíselné optimální řešení:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$b$
$x_5$	0	28/3	5/3	4/3	1	-1	560/3 = 186 2/3
$x_1$	1	4/3	-1/3	1/3	0	0	170/3 = 56 2/3
$z$	0	840	155	120	0	0	20 400
$z'$	0	0	0	0	0	-1	0

Gomoryho řez (optimální řešení hned po tomto řezu):

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$y_1$	$b$
$x_5$	0	28/3	5/3	4/3	1	0	-1	560/3 = 186 2/3
$x_1$	1	4/3	-1/3	1/3	0	0	0	170/3 = 56 2/3
$x_6$	0	-1/3	-2/3	-1/3	0	1	0	-2/3
$z$	0	840	155	120	0	0	0	20 400

Větvení a meze:

a) levá větev  $x_1 \leq 56$  (přípustné řešení  $\mathbf{x} = (56, 0, 0, 2, 184, 0)^T$ ,  $z = 20160$ )

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$y_1$	$b$
$x_5$	0	28/3	5/3	4/3	1	0	-1	560/3 = 186 2/3
$x_1$	1	4/3	-1/3	1/3	0	0	0	170/3 = 56 2/3
$x_6$	0	-4/3	1/3	-1/3	0	1	0	-2/3
$z$	0	840	155	120	0	0	0	20 400

b) pravá větev  $x_1 \geq 57$  (optimální řešení hned po přidání omezení):

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$y_1$	$b$
$x_5$	0	$28/3$	$5/3$	$4/3$	1	0	-1	$560/3 = 186 \frac{2}{3}$
$x_1$	1	$4/3$	$-1/3$	$1/3$	0	0	0	$170/3 = 56 \frac{2}{3}$
$x_6$	0	$4/3$	$-1/3$	$1/3$	0	1	0	$-1/3$
$z$	0	840	155	120	0	0	0	20 400

Optimální řešení:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$y_1$	$b$
$x_5$	0	$17/2$	0	$1/2$	1	$5/2$	-1	185
$x_1$	1	$3/2$	0	$1/2$	0	$-1/2$	0	57
$x_3$	0	$1/2$	1	$1/2$	0	$-3/2$	0	1
$z$	0	762,5	0	42,5	0	232,5	0	20 245