4EK311 – Operační výzkum

2. Lineární programování

2.2 Matematický model úlohy LP

- Nalézt **extrém účelové funkce**

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots + c_nx_n$$

na soustavě vlastních omezení

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ \dots + a_{1n}x_n \mathbf{R}\ b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ \dots + a_{2n}x_n \mathbf{R}\ b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ \dots + a_{3n}x_n \mathbf{R}\ b_3$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ \dots + a_{mn}x_n \mathbf{R}\ b_m$$

za podmínek nezápornosti

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

2.2 Matematický model úlohy LP

- kde je

x_j … **proměnná** modelu **(strukturní)**

a_{ij} … **strukturní koeficient**

b_i … **pravá strana** i-tého omezení

c_j … **cenový koeficient** j-té proměnné (cena)

$\mathbf{R}$ … jedno z relačních znamének ≤, ≥, =

n … počet strukturních proměnných modelu

m … počet vlastních omezení modelu

$$i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$$

2.3 Příklad - zadání

- Firma vyrábí šroubky a matice
- Šroubky i matice jsou lisovány – vylisování krabičky šroubků trvá 1 minutu, krabička matic je lisována 2 minuty
- Šroubky i matice firma balí do krabiček, ve kterých je pak prodává - krabička šroubků se balí 1 minutu, krabička matic 4 minuty
- Firma má k dispozici 2 hodiny času pro lisování a 3 hodiny času pro balení výrobků

2.3 Příklad - zadání

- Vzhledem k poptávce je třeba vyrobit alespoň o 90 krabiček šroubků více než krabiček matic
- Z technických důvodů nelze vyrobit více než 110 krabiček šroubků
- Zisk z jedné krabičky šroubků je 40 Kč,
  z jedné krabičky matic 60 Kč
- Firma nemá potíže s odbytem výrobků
- **Kolik krabiček šroubků a matic má firma vyrobit, chce-li dosáhnout maximálního zisku?**

2.3 Příklad – ekonomický model

Procesy	**Jednotky**
Výroba šroubků (Š)	1 krabička (kr.)
Výroba matic (M)	1 krabička
Činitelé na straně vstupu	
Čas na lisu	1 min.
Čas pro balení	1 min.
Činitelé na straně výstupu	
Vztah počtu KŠ a KM	1 krabička
Max. počet KŠ	1 krabička
Cíl	
Maximální zisk	Kč

2.3 Příklad – kvantitativní vztahy

	Šroubky	Matice	Kapacita	Jednotky
Jednotky	[krabička]	[krabička]		
Lis	1 [min./kr.]	2 [min./kr.]	2	[hod.]
Balení	1 [min./kr.]	4 [min./kr.]	3	[hod.]
Zisk	40 [Kč/kr.]	60 [Kč/kr.]		[Kč]

- Kapacitu lisu a balicí linky bude třeba převést na srovnatelné jednotky

2.3 Příklad – matematický model

	Šroubky - x_1 [krabička]		Matice - x_2 [krabička]		
LIS	$1\,x_1$	+	$2\,x_2$	$\leq$	120 min
BALENÍ	$1\,x_1$	+	$4\,x_2$	$\leq$	180 min
POPTÁVKA	$1\,x_1$	-	$1\,x_2$	$\geq$	90 krabiček
ŠROUBKY	$1\,x_1$	+	$0\,x_2$	$\leq$	110 krabiček
NEZÁPORNOST			x_1, x_2	$\geq$	0
ZISK	$40\,x_1$	+	$60\,x_2$	…	max Kč

2.3 Příklad – srovnání EM a MM

Ekonomický model:

- **Procesy**
  - Výroba Š [KŠ]
  - Výroba M [KM]
- **Činitelé**
  - Čas na lisu [min.]
  - Čas balení [min.]
  - Poptávka [krabičky]
  - Max. KŠ[krabičky]
- **Cíl**
  - Maximální zisk [Kč]

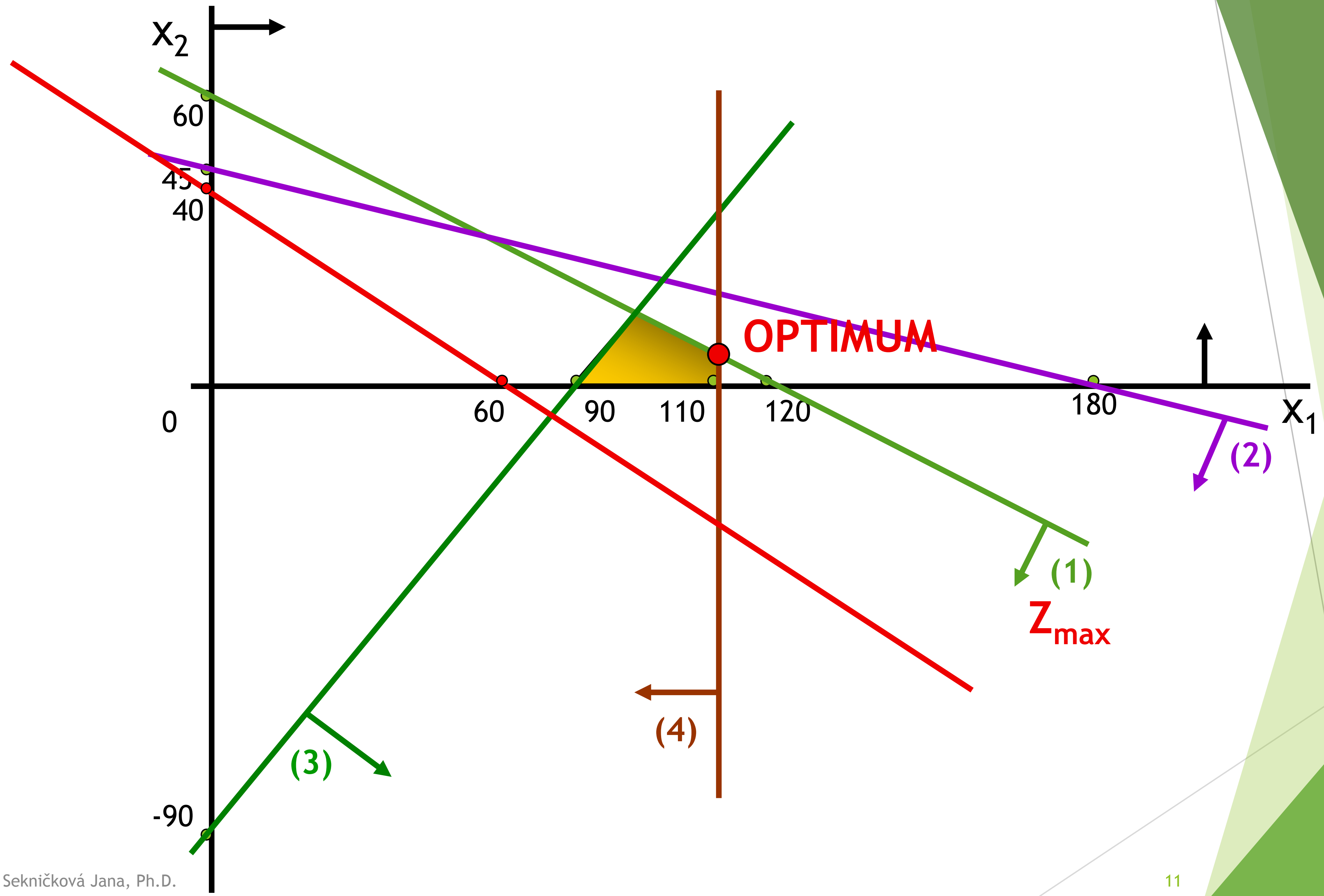
Matematický model:

- **Proměnné**
  - x_1 [KŠ]
  - x_2 [KM]
- **Omezení**
  - spotřeba ≤ 120 [min.]
  - spotřeba ≤ 180 [min.]
  - KŠ – KM ≥ 90 [krabičky]
  - KŠ ≤ 110 [krabičky]
- **Účelová funkce**
  - Maximální zisk [Kč]

2.4 Grafické řešení úlohy LP

Jednoduchou úlohu vyřešíme **graficky**:

- zvolíme **souřadnicový systém** os x_1 a x_2
- znázorníme všechna **omezení** modelu
- najdeme jejich **průnik** v prvním kvadrantu
- znázorníme **účelovou funkci**
- rovnoběžně ji posuneme tak, aby se dotkla průniku množin (shora nebo zdola)
- v bodě (popř. bodech) dotyku účelové funkce a množiny přípustných řešení je **optimální řešení**



x_2
60
45
40
0
-90
60
90
110
120
180
x_1
OPTIMUM
(1)
(2)
(3)
(4)
Z_{max}

2.4 Grafické řešení úlohy LP

- **Optimální řešení** zadané úlohy leží na průsečíku dvou hraničních přímek omezení (1) a (4):

$$x_1 + 2x_2 = 120$$
$$x_1 \qquad\quad = 110$$

- Odtud je $x_1 = 110, x_2 = 5$
- Bod optimálního řešení je tedy

$$\mathbf{x}^* = [110, 5]$$

- Hodnota účelové funkce je po dosazení

$$z = 40x_1 + 60x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 5 = 4700$$

2.5 Interpretace řešení úlohy LP

- **Ekonomická interpretace optimálního řešení**

  $x_1 = 110, x_2 = 5, z = 4700$

- Vyrobíme 110 krabiček šroubků
- Vyrobíme 5 krabiček matic
- Celkový zisk bude 4700 Kč
- Kolik spotřebujeme času na lisu?
  - Lis bude v provozu 120 minut.
- Kolik zbyde času na lisu?
  - Na lisu zbyde 0 minut.

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2$ ... max [Kč]

2.5 Interpretace řešení úlohy LP

- **Ekonomická interpretace optimálního řešení**

  $x_1 = 110, x_2 = 5, z = 4700$

- Kolik spotřebujeme času na balení?
- Kolik zbyde času na balení (jaká je rezerva)?

2.5 Interpretace řešení úlohy LP

- **Ekonomická interpretace optimálního řešení**

  $x_1 = 110, x_2 = 5, z = 4700$

- O kolik šroubků vyrobíme

  více než matic?

- Jaká je rezerva v poptávce?

2.5 Interpretace řešení úlohy LP

- **Ekonomická interpretace optimálního řešení**

  $x_1 = 110, x_2 = 5, z = 4700$

- Kolik šroubků vyrobíme?

- Jaká je technologická rezerva?

2.5 Interpretace řešení úlohy LP

- Vypočtené rezervy jsou ekonomickou interpretací tzv. přídatných proměnných.
- Metody pro řešení úloh lineárního programování pracují s řešením soustavy rovnic, nikoliv se soustavou nerovnic.

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + 2\,x_2 &+ x_3 &&= 120 \text{ [min]}\\
1\,x_1 + 4\,x_2 &\quad + x_4 &&= 180 \text{ [min]}\\
1\,x_1 - 1\,x_2 &\qquad - x_5 &&= 90 \text{ [krabiček]}\\
1\,x_1 + 0\,x_2 &\qquad\quad + x_6 &&= 110 \text{ [krabiček]}\\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$z - 40\,x_1 - 60\,x_2 = 0 \ldots \max \text{ [Kč]}$$

2.5 Interpretace řešení úlohy LP

- Strukturní proměnné:
  - $x_1 = 110$
  - $x_2 = 5$
- Přídatné proměnné:
  - $x_3 =$
  - $x_4 =$
  - $x_5 =$
  - $x_6 =$
- Optimální řešení: $\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^{\mathrm{T}}$

  $z = 4700$

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \quad\quad\quad\quad &= 120 \text{ [min]} \\
1\,x_1 + 4\,x_2 \quad + x_4 \quad\quad\quad &= 180 \text{ [min]} \\
1\,x_1 - 1\,x_2 \quad\quad\quad - x_5 \quad &= 90 \text{ [krabiček]} \\
1\,x_1 + 0\,x_2 \quad\quad\quad\quad + x_6 &= 110 \text{ [krabiček]}
\end{aligned}
$$

$$z - 40\,x_1 - 60\,x_2 = 0 \ldots \max \text{ [Kč]}$$

2.6 Přídatné proměnné

- Přídatné proměnné slouží k převodu soustavy vlastních omezení ve tvaru nerovnic na ekvivalentní soustavu rovnic

- Ekvivalentní soustava rovnic (s podmínkami nezápornosti) má stejné (ekvivalentní) řešení jako původní soustava vlastních omezení

- Omezení ve tvaru rovnice:
  - $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$
  - není třeba upravovat

2.6 Přídatné proměnné

- Omezení ve tvaru nerovnice typu $\leq$:
  - $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$
  - k levé straně nerovnice přičteme přídatnou proměnnou x_{n+i}
  - $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$
- Omezení ve tvaru nerovnice typu $\geq$:
  - $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$
  - od levé strany nerovnice odečteme přídatnou proměnnou x_{n+i}
  - $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i$

2.6 Přídatné proměnné

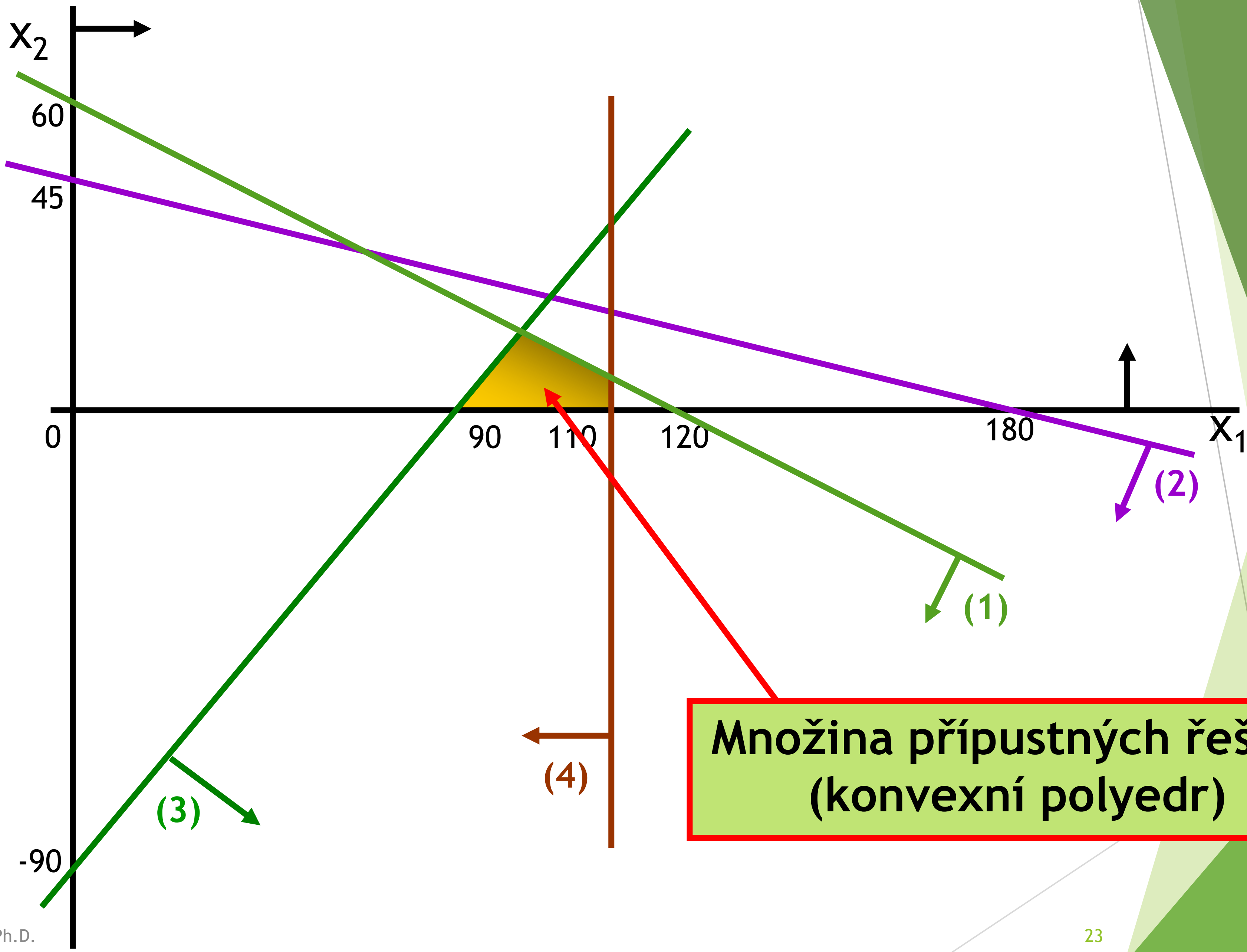
- Přídatné proměnné jsou nezáporné
- Mají svoji ekonomickou interpretaci, která je odvozena od ekonomické interpretace omezení
- Přídatná proměnná v omezení typu $\leq$ ukazuje objem nevyužité kapacity
- Přídatná proměnná v omezení typu $\geq$ ukazuje velikost překročení požadavku
- Cena přídatné proměnné je vzhledem k její ekonomické interpretaci rovna nule

2.7 Základní pojmy LP

Přípustné řešení úlohy LP je vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}$, jehož složky splňují vlastní omezení úlohy a podmínky nezápornosti

- **Počet přípustných řešení (PŘ):**
  - protože počet proměnných (*n*+*m*) je větší než počet rovnic (*m*), má úloha LP buď:

  1. nekonečně mnoho přípustných řešení nebo
  2. žádné přípustné řešení



Množina přípustných řešení (konvexní polyedr)

2.7 Základní pojmy LP

Základní řešení ekvivalentní soustavy rovnic je takový vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}$, který má maximálně *m* nenulových složek (zbývajících *n* složek je rovných 0)

- **Základní řešení (ZŘ) ekvivalentní soustavy rovnic (ESR):**
  - protože ekvivalentní soustava rovnic obsahuje *m* rovnic (lineárně nezávislých) a *m*+*n* proměnných
  - má v typickém případě nekonečně mnoho řešení
  - některá z nich lze najít tak, že hodnoty *n* proměnných zvolíme libovolně (základní proměnné s hodnotou 0) a zbývajících *m* proměnných dopočítáme řešením soustavy

2.7 Základní pojmy LP

$$\begin{array}{lllllll} 1\,x_1 & +\,2\,x_2 & +\,x_3 & & & & = 120 \\ 1\,x_1 & +\,4\,x_2 & & +\,x_4 & & & = 180 \\ 1\,x_1 & -\,1\,x_2 & & & -\,x_5 & & = \ \ 90 \\ 1\,x_1 & +\,0\,x_2 & & & & +\,x_6 & = 110 \end{array}$$

Příklad

- Počet strukturních proměnných: $n = 2$
- Počet rovnic ekvivalentní soustavy: $m = 4$
- Počet proměnných v ESR: $m + n = 4 + 2 = 6$

- **Základní řešení:** $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^{\mathrm{T}}$
- $\mathbf{x} = (0, 0, x_3, x_4, x_5, x_6)^{\mathrm{T}} \longrightarrow \mathbf{x} = (0, 0, 120, 180, -90, 110)^{\mathrm{T}}$
- $\mathbf{x} = (0, x_2, 0, x_4, x_5, x_6)^{\mathrm{T}} \longrightarrow \mathbf{x} = (0, 60, 0, -60, -150, 110)^{\mathrm{T}}$
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0, x_4, x_5, 0)^{\mathrm{T}} \longrightarrow \mathbf{x} = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^{\mathrm{T}}$

2.7 Základní pojmy LP

- **Počet základních řešení ESR:**
  - Kolika způsoby lze z *m*+*n* proměnných vybrat těch *n* proměnných, které budou základní (a budou tedy rovny 0)?

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{n!\,(m+n-n)!} = \frac{(m+n)!}{n!\,m!}$$

  - Kolika způsoby lze z *m*+*n* proměnných vybrat těch *m* proměnných, které nebudou základní (a budou tedy dopočítány)?

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!\,(m+n-m)!} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

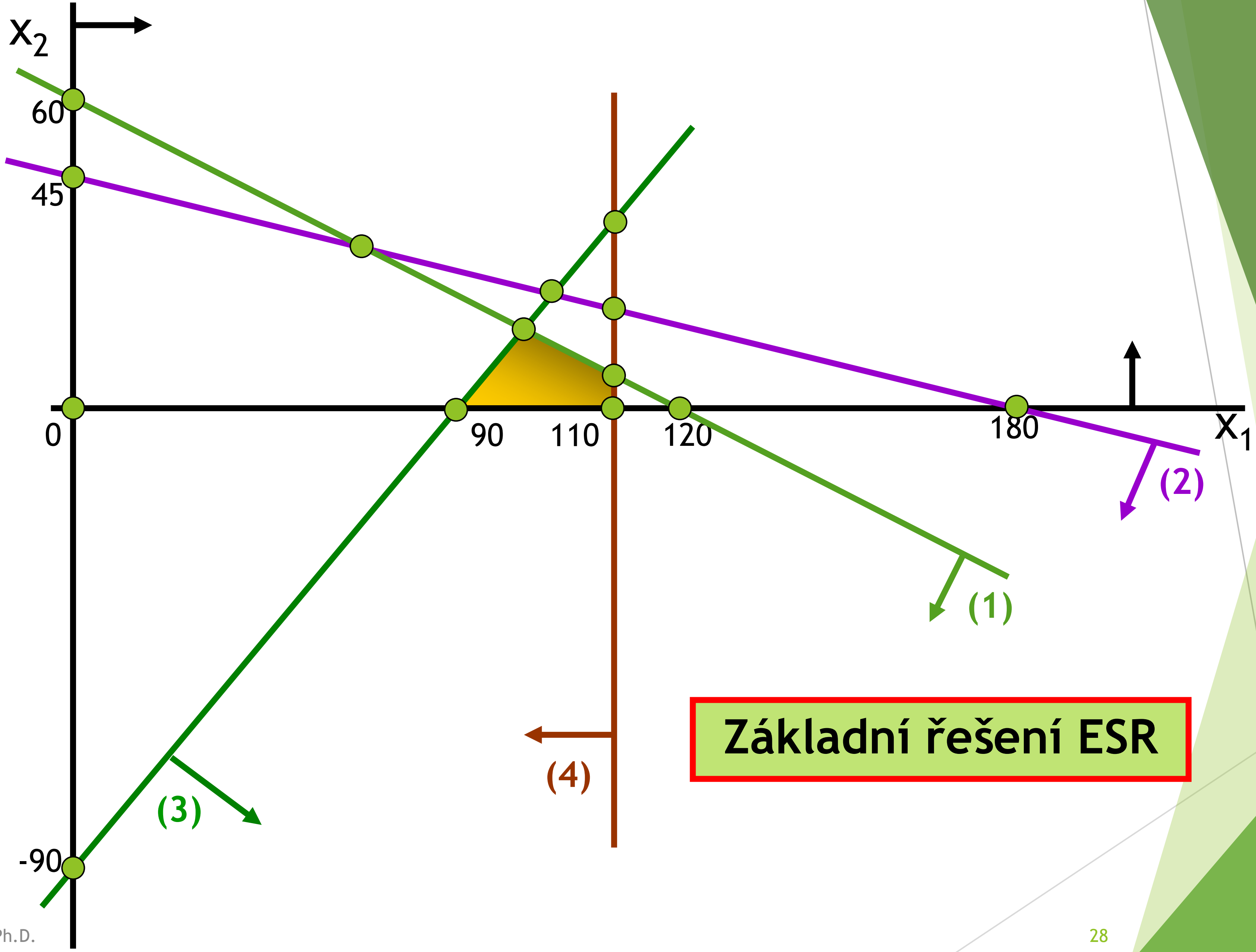
2.7 Základní pojmy LP

- **Počet základních řešení ESR:**

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

- Pokud jsou *m* a *n* konečná čísla, je počet základních řešení ESR také konečný.
- Kolik ZŘ má ESR pro náš příklad?

$$\boxed{\begin{array}{lllll} 1\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 & & & & = 120 \\ 1\,x_1 + 4\,x_2 & + x_4 & & & = 180 \\ 1\,x_1 - 1\,x_2 & & - x_5 & & = 90 \\ 1\,x_1 + 0\,x_2 & & & + x_6 & = 110 \end{array}}$$



Základní řešení ESR

2.7 Základní pojmy LP

- Jsou všechna základní řešení ESR přípustnými řešeními původní úlohy LP?

- **Základní řešení:** $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^{\mathrm{T}}$
- $\mathbf{x} = (0, 0, 120, 180, -90, 110)^{\mathrm{T}}$
- $\mathbf{x} = (0, 60, 0, -60, -150, 110)^{\mathrm{T}}$
- $\mathbf{x} = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^{\mathrm{T}}$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

2.7 Základní pojmy LP

Základní řešení úlohy LP neboli základní přípustné řešení úlohy LP je takové základní řešení ekvivalentní soustavy rovnic, které splňuje všechna vlastní omezení úlohy LP i podmínky nezápornosti.

- **Základní přípustné řešení (ZPŘ) úlohy LP:**
  - Má všechny složky nezáporné
    - Strukturní proměnné jsou nezáporné vzhledem k podmínkám nezápornosti v úloze LP
    - Přídatné proměnné jsou nezáporné z definice (záporná hodnota přídatné proměnné znamená, že vlastní omezení není splněno)

2.7 Základní pojmy LP

Základní přípustné řešení úlohy LP je takové přípustné řešení, které má maximálně tolik kladných složek, kolik je lineárně nezávislých vlastních omezení, tj. *m*, zbývající složky (alespoň *n*) jsou rovny nule. Vektory strukturních koeficientů u proměnných s kladnou hodnotou jsou lineárně nezávislé.

- **Degenerované základní přípustné řešení (ZPŘ):**
  - Má-li řešení méně než m kladných složek
  - Má-li řešení více než n nulových složek

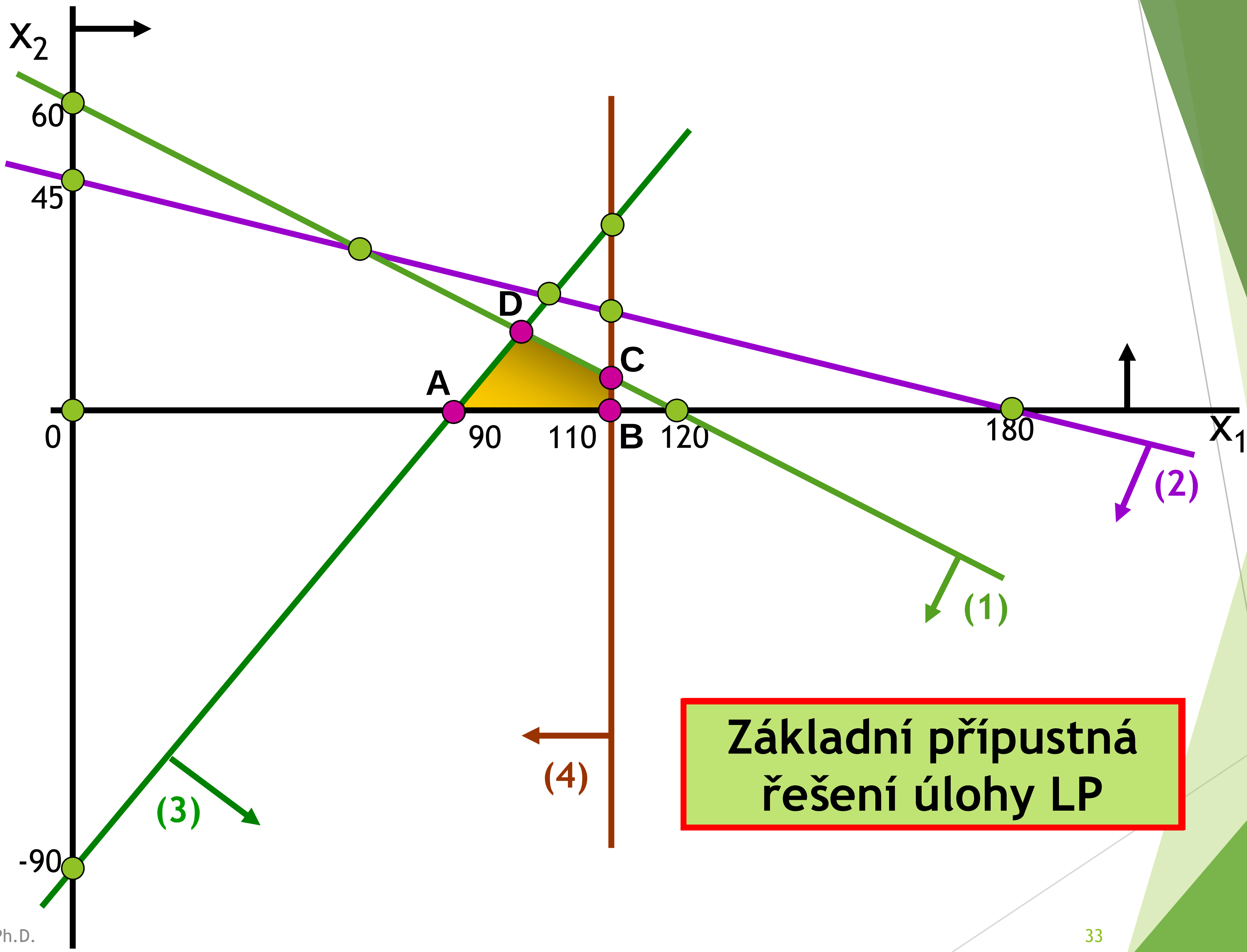
2.7 Základní pojmy LP

- **Počet základních přípustných řešení (ZPŘ) úlohy LP:**
  - Kolik PŘ má úloha LP?
    - Buď **žádné**
    - nebo **nekonečně mnoho**
  - Kolik ZŘ má ESR?
    - Maximálně

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

  - Kolik základních přípustných řešení má úloha LP?
    - Buď žádné
    - nebo maximálně

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$



Základní přípustná řešení úlohy LP

2.7 Základní pojmy LP

- **Výpočet základních přípustných řešení:**
- Bod A: (3) + ($x_2 \geq 0$) $\quad$ $A = [\ 90, 0]$, $\quad$ $\mathbf{x} = (90, \mathbf{0}, 30, 90, \mathbf{0}, 20)^{\mathrm{T}}$
- Bod B: (4) + ($x_2 \geq 0$) $\quad$ $B = [110, 0]$, $\quad$ $\mathbf{x} = (110, \mathbf{0}, 10, 70, 20, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$
- Bod C: (1) + (4) $\quad$ $C = [110, 5]$, $\quad$ $\mathbf{x} = (110, 5, \mathbf{0}, 50, 15, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$
- Bod D: (1) + (3) $\quad$ $D = [100, 10]$, $\quad$ $\mathbf{x} = (100, 10, \mathbf{0}, 40, \mathbf{0}, 10)^{\mathrm{T}}$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]

$$
\begin{aligned}
1\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 120 \text{ [min]} \\
1\,x_1 + 4\,x_2 \qquad + x_4 \qquad\quad &= 180 \text{ [min]} \\
1\,x_1 - 1\,x_2 \qquad\qquad - x_5 \quad &= \ \ 90 \text{ [krabiček]} \\
1\,x_1 + 0\,x_2 \qquad\qquad\qquad + x_6 &= 110 \text{ [krabiček]} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

2.7 Základní pojmy LP

Optimální řešení úlohy LP je takové přípustné řešení $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}$, které má nejvyšší (nejnižší) hodnotu účelové funkce.

- **Optimální řešení (OŘ):**
  - Přípustné řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce
  - Nejlepší přípustné řešení
  - Z grafického zobrazení je zřejmé, že existuje-li, musí ležet na hranici množiny přípustných řešení

2.7 Základní pojmy LP

- **Počet optimálních řešení:**

Optimální řešení úlohy LP je přípustné řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce.

- Pokud úloha LP nemá žádné přípustné řešení
  - Nemá žádné optimální řešení
- Pokud má úloha LP nekonečně mnoho přípustných řešení
  - Pak je optimální to s nejlepší hodnotou účelové funkce

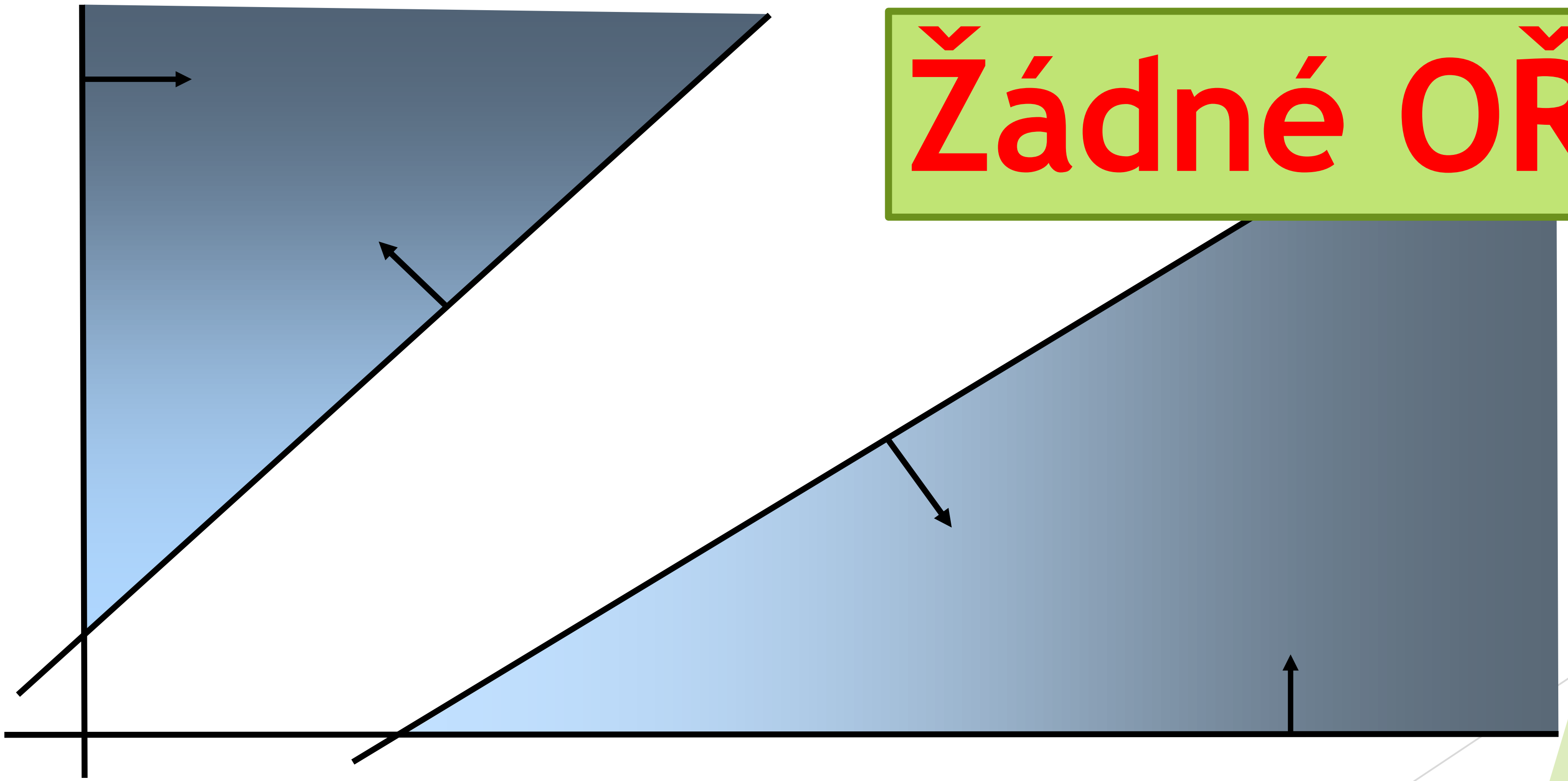
2.7 Základní pojmy LP

Musí OŘ existovat?
Musí být jediné?
Může jich být více?
Dokážeme ho vždy najít?

2.7 Základní pojmy LP

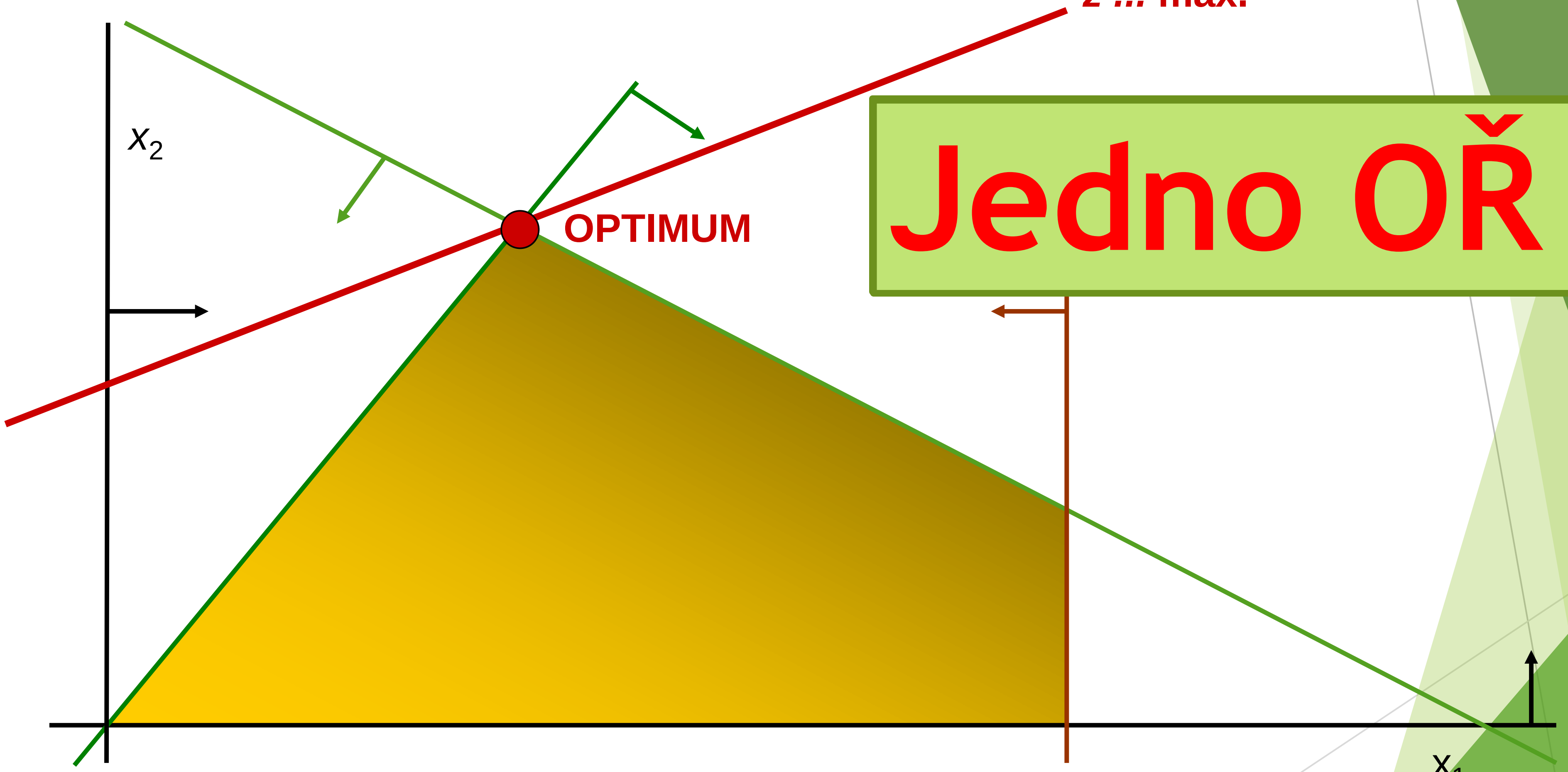
- **O počtu optimálních řešení rozhoduje:**
  - **Množina přípustných řešení**
    - Počet přípustných řešení (žádné, nekonečně mnoho)
    - Tvar množiny přípustných řešení (prázdná, omezená, neomezená)
  - **Účelová funkce**
    - Sklon účelové funkce
    - Extrém účelové funkce

a) MPŘ - prázdná

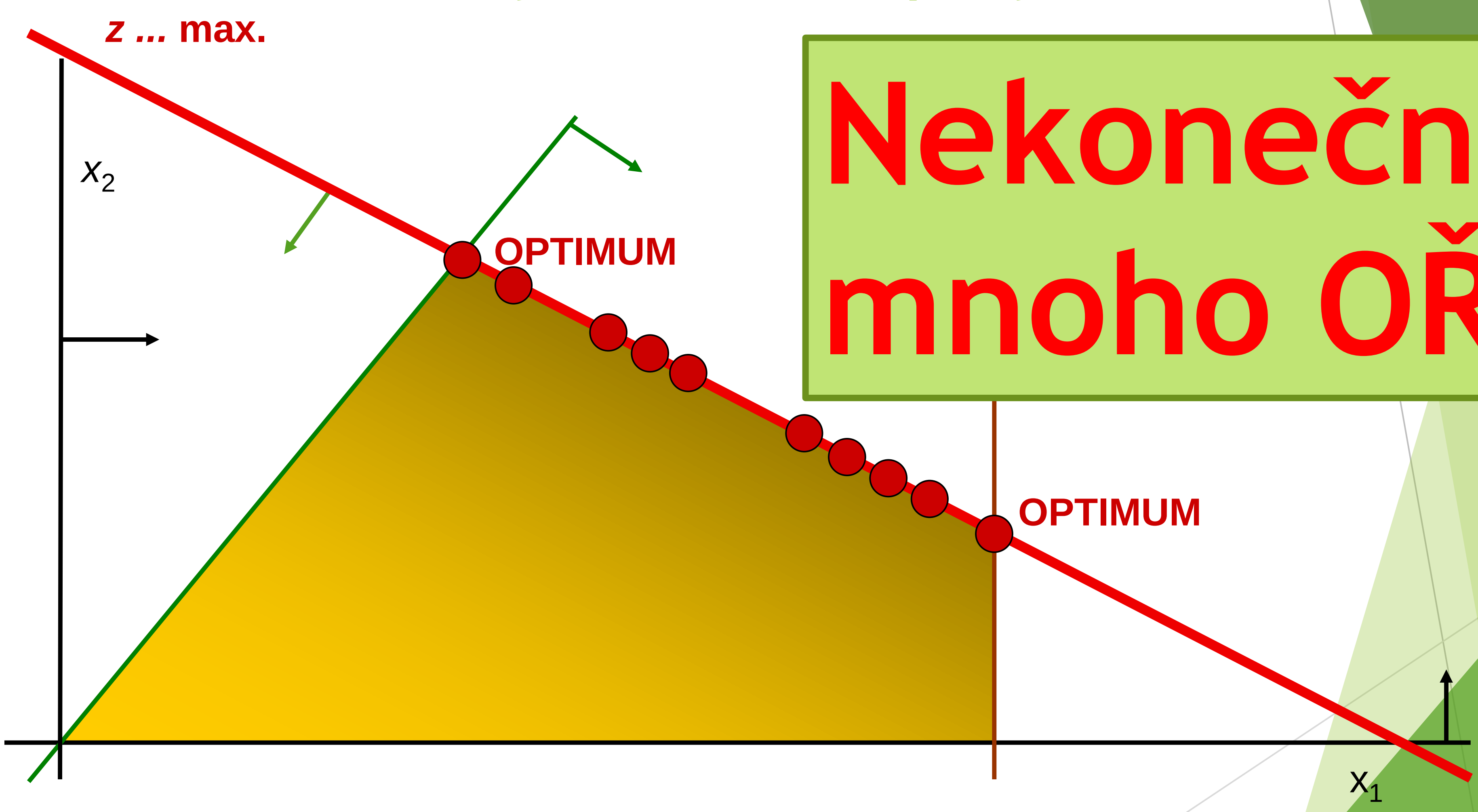


Žádné OŘ

b) MPŘ - omezený konvexní polyedr

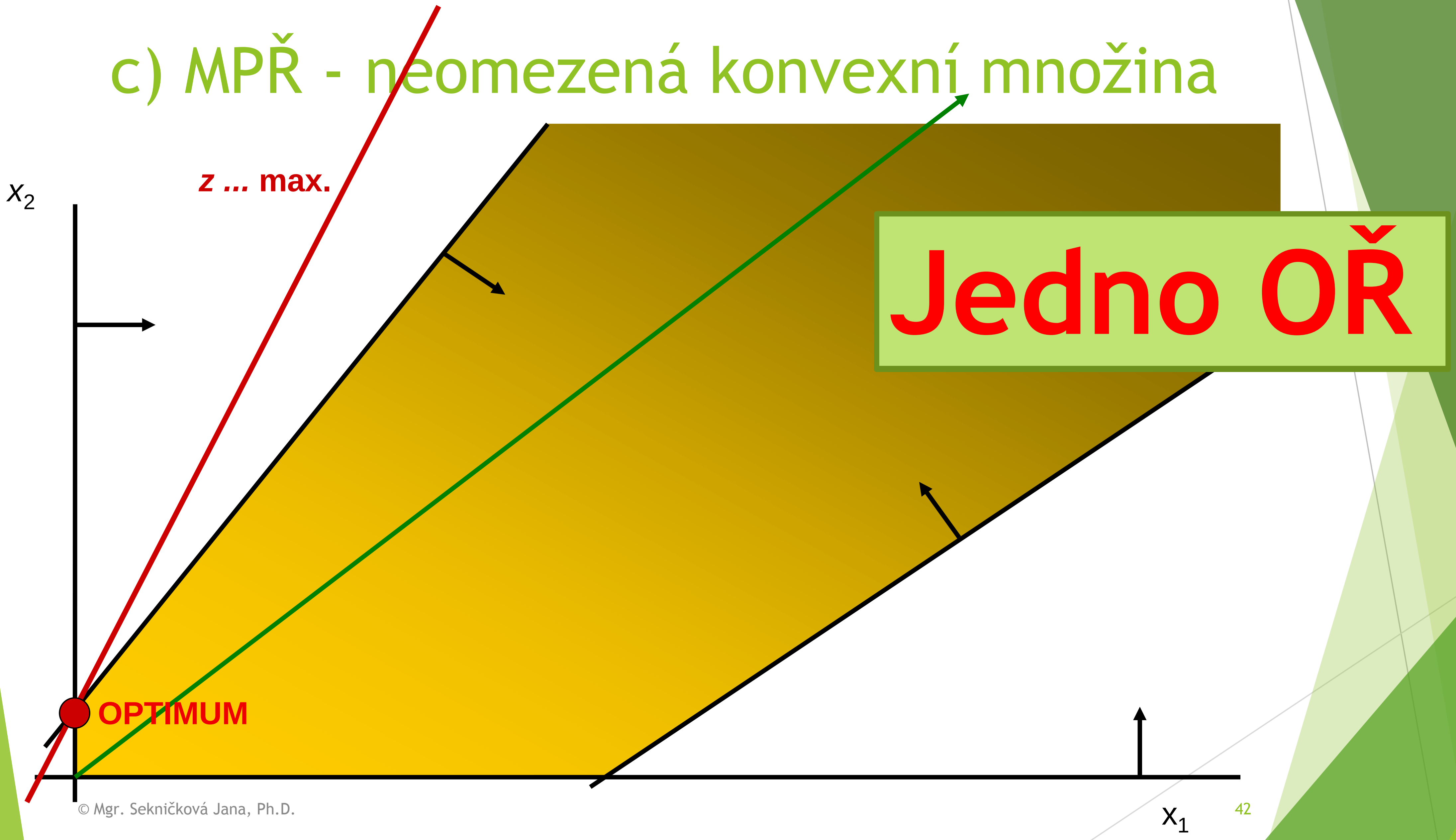


b) MPŘ - omezený konvexní polyedr

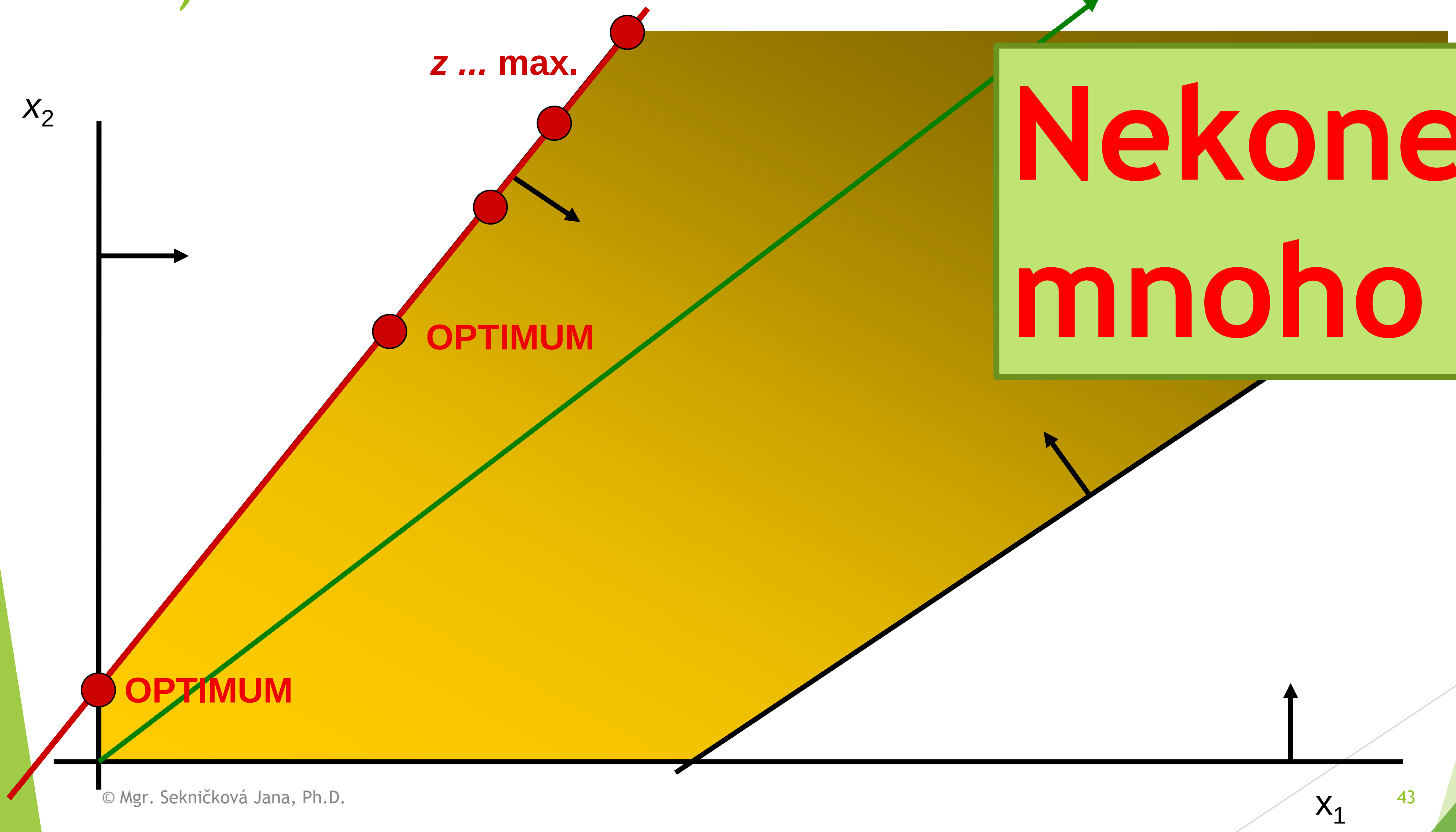


Nekonečně mnoho OŘ

c) MPŘ - neomezená konvexní množina

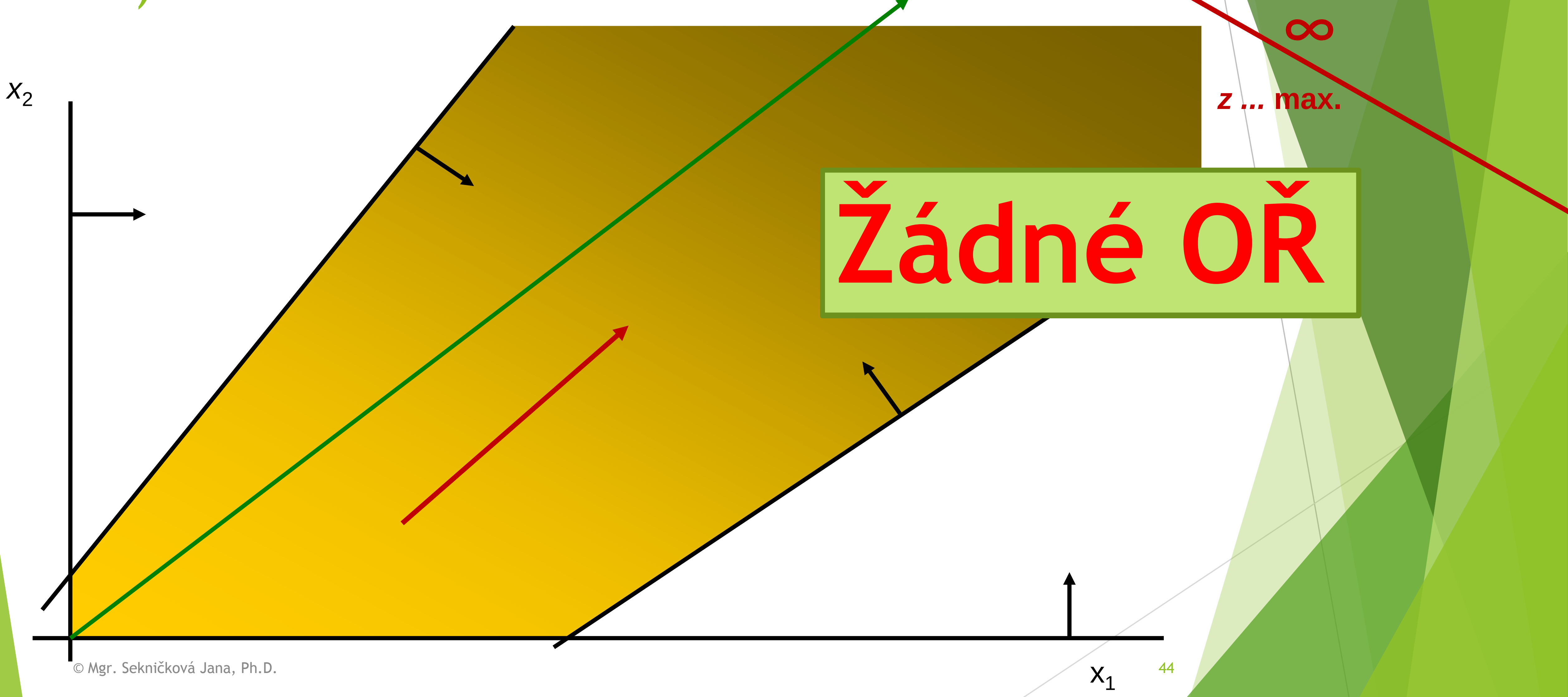


c) MPŘ - neomezená konvexní množina



Nekonečně mnoho OŘ

c) MPŘ - neomezená konvexní množina



2.7 Základní pojmy LP

- **Počet optimálních řešení:**
  - **Žádné** optimální řešení
    - Prázdná množina přípustných řešení nebo
    - Neomezená hodnota účelové funkce
  - Má **jediné** optimální řešení
    - MPŘ je omezená ve směru hledaného optima a
    - Účelová funkce se MPŘ dotkne v jediném bodě
  - Má **nekonečně mnoho** optimálních řešení
    - MPŘ je omezená ve směru hledaného optima a
    - Účelová funkce je rovnoběžná s hranou (stěnou) MPŘ

2.7 Základní pojmy LP

- **Má-li úloha LP optimální řešení:**
  - Buď je toto optimální řešení jediné
    - MPŘ je omezená ve směru hledaného optima a
    - Účelová funkce se MPŘ dotkne v jediném bodě
    - **OŘ je ve vrcholu konvexního polyedru - je ZPŘ**
  - Nebo je optimálních řešení **nekonečně mnoho**
    - MPŘ je omezená ve směru hledaného optima a
    - Účelová funkce je rovnoběžná s hranou (stěnou) MPŘ
    - **Alespoň jedno OŘ je ve vrcholu konvexního polyedru - ZPŘ**

2.7 Základní pojmy LP

Má-li úloha LP optimální řešení,
pak má také základní optimální řešení

- Základní věta lineárního programování (ZVLP)
- Věta nic neříká o případu, kdy úloha LP nemá optimální řešení!
- Pokud existuje OŘ, pak existuje také základní OŘ.

Co je to základní OŘ?

2.7 Základní pojmy LP

- **Základní optimální řešení:**
  - Základní řešení
  - Optimální řešení
    - Přípustné řešení
    - Řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce

- **Základní optimální řešení = základní přípustné řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce**

2.7 Základní pojmy LP

- **Důsledek základní věty lineárního programování:**
  - Má-li úloha LP optimální řešení, pak alespoň jedno z nich je základní přípustné řešení.
- **Význam základní věty lineárního programování:**
  - Optimální řešení stačí hledat mezi základními přípustnými řešeními.

ZPŘ je konečný počet

2.7 Základní pojmy LP

- **Výpočet základních přípustných řešení:**
- $A = [\ 90, 0]$, $\mathbf{x} = (90, \mathbf{0}, 30, 90, \mathbf{0}, 20)^{\mathrm{T}}$
- $B = [110, 0]$, $\mathbf{x} = (110, \mathbf{0}, 10, 70, 20, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$
- $C = [110, 5]$, $\mathbf{x} = (110, 5, \mathbf{0}, 50, 15, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$
- $D = [100, 10]$, $\mathbf{x} = (100, 10, \mathbf{0}, 40, \mathbf{0}, 10)^{\mathrm{T}}$

- $z_A = 3600$
- $z_B = 4400$
- $z_C = 4700$
- $z_D = 4600$

Lis: $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení: $1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka: $1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky: $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost: $x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]

Zisk: $z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

Optimální řešení:
$\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^{\mathrm{T}}$
$z = 4700$

2.8 Typické úlohy LP

- Úlohy výrobního plánování (alokace zdrojů)
- Úlohy finančního plánování (optimalizace portfolia)
- Úlohy reklamního plánování (plánování reklamy)
- Směšovací problémy
- Nutriční problém (spec. případ směšovacího problému)
- Úlohy o dělení materiálu (řezné problémy)
- Rozvrhování pracovníků
- Distribuční úlohy (dopravní problém a další)

2.8 Typické úlohy LP

1. Úlohy výrobního plánování (alokace zdrojů)

- Jsou dány výrobky, které lze vyrábět, a struktura výroby. Úkolem je určit druh a množství výrobků, které se budou vyrábět.
- **Proměnné:** vyráběné druhy výrobků (hodnoty určují množství vyráběného výrobku)
- **Omezení:** omezené kapacity surovin na straně vstupů, nutnost dodržet požadavky na straně výstupů
- **Cíl:** obvykle maximalizace zisku, tržeb nebo množství výrobků, popř. minimalizace nákladů apod.

2.8 Typické úlohy LP

2. Úlohy finančního plánování (optimalizace portfolia)

- Jsou dány různé investiční varianty s příslušnými parametry. Úkolem je určit objem investic do jednotlivých investičních variant.
- **Proměnné:** investiční varianty (hodnoty určují objemy investic do daných variant)
- **Omezení:** limity pro jednotlivé typy investic, celková investovaná částka, zajištěný výnos či maximální výše rizika, apod.
- **Cíl:** obvykle maximalizace výnosu nebo minimalizace rizika

2.8 Typické úlohy LP

3. Úlohy plánování reklamy (media selection problem)

- Jsou dána různá reklamní média s příslušnými parametry. Úkolem je určit objem investic do jednotlivých médií, případně určit časové okno, do kterého má být reklama umístěna.
- **Proměnné:** umístění reklamy do daného média (hodnoty určují objemy investic nebo počty opakování)
- **Omezení:** celková investovaná částka, oslovení cílové skupiny, reklamní strategie, apod.
- **Cíl:** obvykle maximalizace reklamních ukazatelů (kolik oslovíme diváků, kolikrát je divák osloven, apod.)

2.8 Typické úlohy LP

4. Směšovací úlohy

- Je dána nabídka složek (komponent) s příslušnými parametry uvádějícími většinou složení. Úkolem je vytvořit směs požadovaných vlastností.
- **Proměnné:** jednotlivé složky (hodnoty určují množství použitých složek)
- **Omezení:** vlastnosti celkové směsi (zejména složení – často v %, celková váha, apod.)
- **Cíl:** obvykle minimalizace nákladů

2.8 Typické úlohy LP

5. Nutriční problémy (speciální případ směšovacích)

- Je dána nabídka složek (jídel) s příslušnými parametry uvádějícími většinou složení. Úkolem je vytvořit jídelníček požadovaných vlastností.
- **Proměnné:** jednotlivá jídla (hodnoty určují množství zahrnutého jídla)
- **Omezení:** vlastnosti jídelníčku (zejména množství bílkovin, vitamínů, apod.)
- **Cíl:** obvykle minimalizace ceny

2.8 Typické úlohy LP

6. Úlohy o dělení materiálu (řezné problémy)

- Úkolem je rozdělit větší celky (v úlohách LP jednorozměrné, např. prkna, trubky, role, pásy, apod.) na menší.
- **Proměnné:** jednotlivé způsoby dělení větších celků na menší (hodnoty určují počet opakování jednotlivých způsobů či počet větších celků, které budou děleny příslušnými způsoby)
- **Omezení:** většinou množství menších celků (i poměrově)
- **Cíl:** obvykle minimalizace odpadu nebo spotřebovaného materiálu

2.8 Typické úlohy LP

6. Úlohy o dělení materiálu - příklad

- Na vnitřní dřevěné obložení chaty je třeba:
  - maximálně 120 ks prken délky 35 cm
  - 180 až 330 ks prken délky 120 cm
  - alespoň 30 ks prken délky 95 cm
- Koupit lze jen prkna délky 4 metry
- Celkový odpad nesmí být větší než 360 cm
- Náklady na koupi prken musí být minimální

Řezné schéma

Způsob	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
120 cm	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0
95 cm	0	1	0	2	1	0	4	3	2	1	0
35 cm	1	1	4	2	5	8	0	3	6	8	11
Odpad	5	30	20	20	10	0	20	10	0	25	15

Pozn.: Řezné schéma je vhodné uspořádat tak, aby způsoby řezání i nařezané kusy byly seřazeny podle velikosti

2.8 Typické úlohy LP

7. Rozvrhování pracovníků

- Úkolem je rozdělit pracovníky do jednotlivých časových oken (směn) s ohledem na související požadavky.
- **Proměnné:** přiřazení konkrétních pracovníků na konkrétní směny (hodnoty určují, zda je pracovník na konkrétní směnu přiřazen – 1, nebo není přiřazen - 0)
- **Omezení:** kvalifikace pracovníků, počet pracovníků, apod.
- **Cíl:** obvykle minimalizace nákladů, časových prodlev nebo celkového počtu pracovníků

2.8 Typické úlohy LP

8. Distribuční úlohy

- Úkolem celé velké skupiny distribučních úloh je zajistit distribuci čehokoliv (např. zboží) z jedné oblasti (např. dodavatelé) do druhé oblasti (např. odběratelé).
- **Proměnné:** přiřazení jednotky z první skupiny k jednotce z druhé skupiny (např. doprava od daného dodavatele k danému odběrateli), hodnoty určují, zda k přiřazení dojde či ne (0/1) nebo jak intenzivní přiřazení je (množství převáženého zboží)
- **Omezení:** kapacity a požadavky
- **Cíl:** obvykle minimalizace nákladů

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 2

KONEC