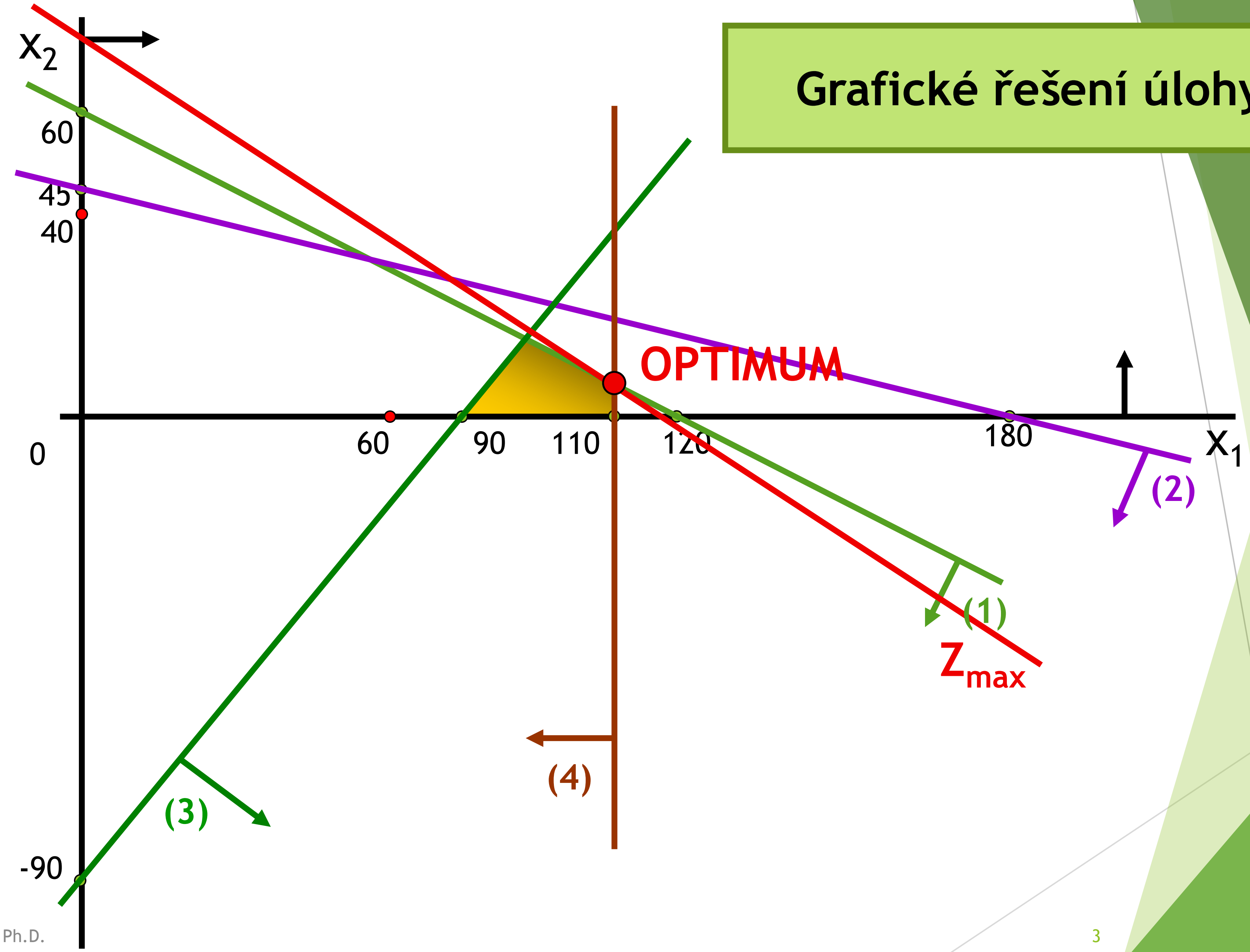
4EK311 – Operační výzkum

3. Optimalizační software a stabilita řešení úloh LP

3.1 Příklad – matematický model

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

Grafické řešení úlohy LP



3.2 Grafické řešení úlohy LP

- **Optimální řešení** zadané úlohy leží na průsečíku dvou hraničních přímek omezení (1) a (4):

$$x_1 + 2x_2 = 120$$
$$x_1 \qquad = 110$$

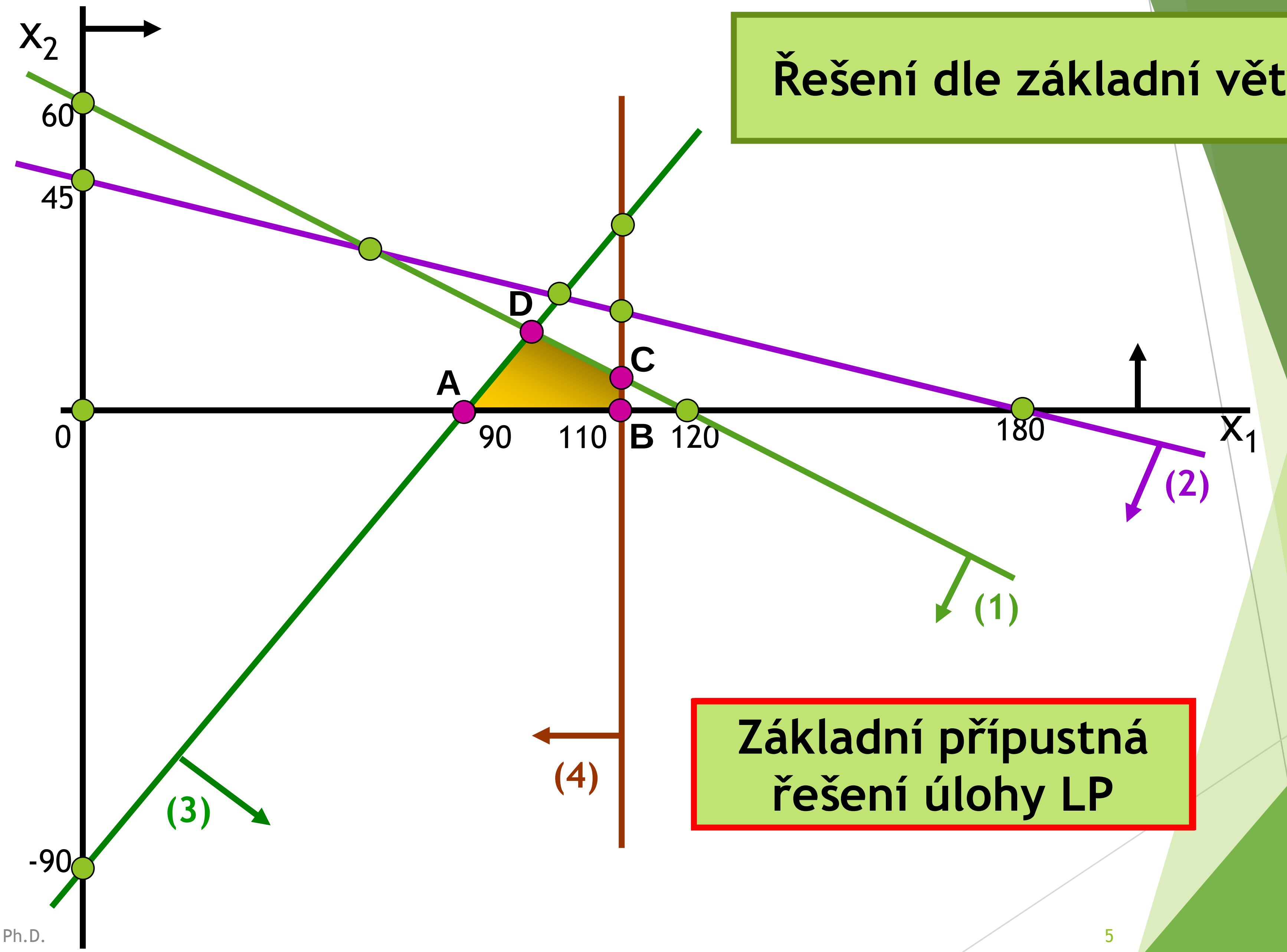
- Odtud je $x_1 = 110, x_2 = 5$
- Bod optimálního řešení je tedy

$$\mathbf{x}^* = [110, 5]$$

- Hodnota účelové funkce je po dosazení

$$z = 40x_1 + 60x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 5 = 4700$$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \le 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \le 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \ge 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \le 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \ge 0$ [krabiček]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]



Řešení dle základní věty LP

Základní přípustná řešení úlohy LP

3.3 Řešení dle základní věty LP

- **Výpočet základních přípustných řešení:**
- $\mathrm{A} = [\ 90, 0]$, $\mathbf{x} = (90, \mathbf{0}, 30, 90, \mathbf{0}, 20)^{\mathrm{T}}$
- $\mathrm{B} = [110, 0]$, $\mathbf{x} = (110, \mathbf{0}, 10, 70, 20, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$
- $\mathrm{C} = [110, 5]$, $\boxed{\mathbf{x} = (110, 5, \mathbf{0}, 50, 15, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}}$
- $\mathrm{D} = [100, 10]$, $\mathbf{x} = (100, 10, \mathbf{0}, 40, \mathbf{0}, 10)^{\mathrm{T}}$

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krabiček]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krabiček]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krabiček]
Zisk:	$z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

- $z_A = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 90 + 60 \cdot 0 = 3600$
- $z_B = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 0 = 4400$
- $z_C = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 110 + 60 \cdot 5 = \boxed{4700}$
- $z_D = 40\,x_1 + 60\,x_2 = 40 \cdot 100 + 60 \cdot 10 = 4600$

Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^{\mathrm{T}}$$
$$z = 4700$$

3.4 Řešení pomocí softwaru

- **Graficky** lze řešit úlohy LP, které obsahují dvě (max. tři) proměnné
- **Dle základní věty LP** lze řešit i mnohem větší úlohy
  - Tzv. metoda hrubé síly
    - Vyčíslení všech ZŘ ESR (kolik jich je?)
    - Redukce na ZPŘ úlohy LP
    - Výpočet hodnoty účelové funkce pro všechna ZPŘ
    - Výběr optimálního řešení
  - I ZPŘ však může být opravdu mnoho
    - $m = 4$, $n = 2$, ZŘ 14 $\rightarrow$ ZPŘ 4
    - $m = 100$, $n = 10$, ZŘ téměř 47 bilionů $\rightarrow$ ZPŘ cca 14 bilionů

3.4 Řešení pomocí softwaru

- V praxi se však používá efektivní prohledávání množiny základních přípustných řešení pomocí simplexové metody (či metody vnitřního bodu, apod.)
- Historické optimalizační softwary
  - STORM
  - DS Win
- Současné nástroje
  - LINGO, MPL
  - Řešitel pro MS Excel
  - a další

3.4 LINGO

- Firma LINDO Systems, Inc.
- LINDO (Linear INteractive and Discrete Optimizer)
- www.lindo.com
- LINGO (verze 16.0, 17.0) – Windows, Mac, Linux

LINGO 11.0 - LINGO Model - priklad

File Edit LINGO Window Help

LINGO Model - priklad

```
model:
[lis]            1*x1 + 2*x2 <= 120;
[baleni]         1*x1 + 4*x2 <= 180;
[poptavka]       1*x1 - 1*x2 >=  90;
[sroubky]          x1        <= 110;

[zisk]      max = 40*x1 + 60*x2;
end
```

Solution Report - priklad

```
  Global optimal solution found.
  Objective value:                              4700.000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             2


                      Variable           Value        Reduced Cost
                            X1        110.0000            0.000000
                            X2        5.000000            0.000000

                           Row    Slack or Surplus      Dual Price
                           LIS        0.000000            30.00000
                        BALENI        50.00000            0.000000
                      POPTAVKA        15.00000            0.000000
                       SROUBKY        0.000000            10.00000
                          ZISK        4700.000            1.000000
```

Range Report - priklad

```
 Ranges in which the basis is unchanged:

                                     Objective Coefficient Ranges
                                   Current        Allowable        Allowable
                 Variable      Coefficient         Increase         Decrease
                       X1         40.00000         INFINITY         10.00000
                       X2         60.00000         20.00000         60.00000

                                          Righthand Side Ranges
                      Row          Current        Allowable        Allowable
                                       RHS         Increase         Decrease
                   BALENI         180.0000         INFINITY         50.00000
                 POPTAVKA         90.00000         15.00000         INFINITY
                  SROUBKY         110.0000         10.00000         10.00000
                      LIS         120.0000         25.00000         10.00000
```

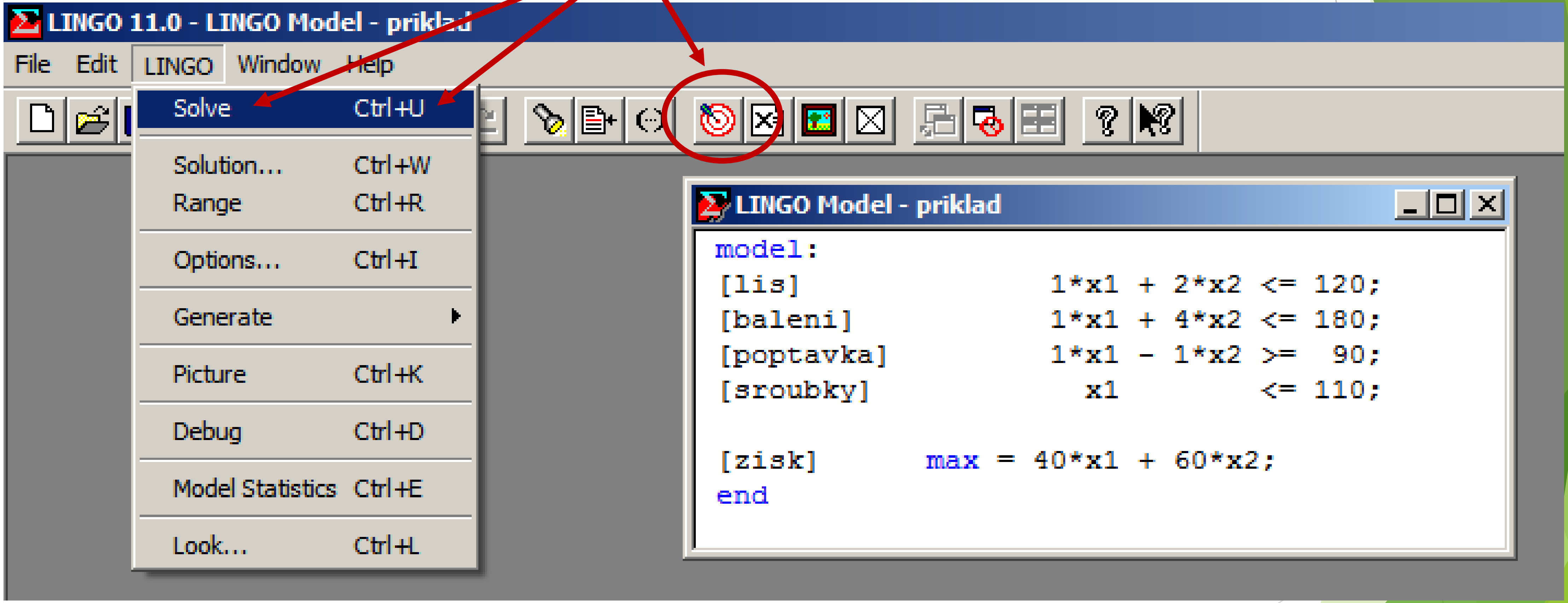
3.4 LINGO - model

LINGO Model - priklad

```
model:
[lis]              1*x1 + 2*x2 <= 120;
[baleni]           1*x1 + 4*x2 <= 180;
[poptavka]         1*x1 - 1*x2 >=  90;
[sroubky]            x1        <= 110;

[zisk]       max = 40*x1 + 60*x2;
end
```

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krab.]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krab.]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krab.]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

3.4 LINGO - řešení



3.4 LINGO – výstup řešení

Solution Report - priklad

```
Global optimal solut
Objective value:                              4700.000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             2


      Variable           Value        Reduced Cost
            X1        110.0000            0.000000
            X2        5.000000            0.000000

           Row    Slack or Surplus      Dual Price
           LIS        0.000000            30.00000
        BALENI        50.00000            0.000000
      POPTAVKA        15.00000            0.000000
       SROUBKY        0.000000            10.00000
          ZISK        4700.000            1.000000
```

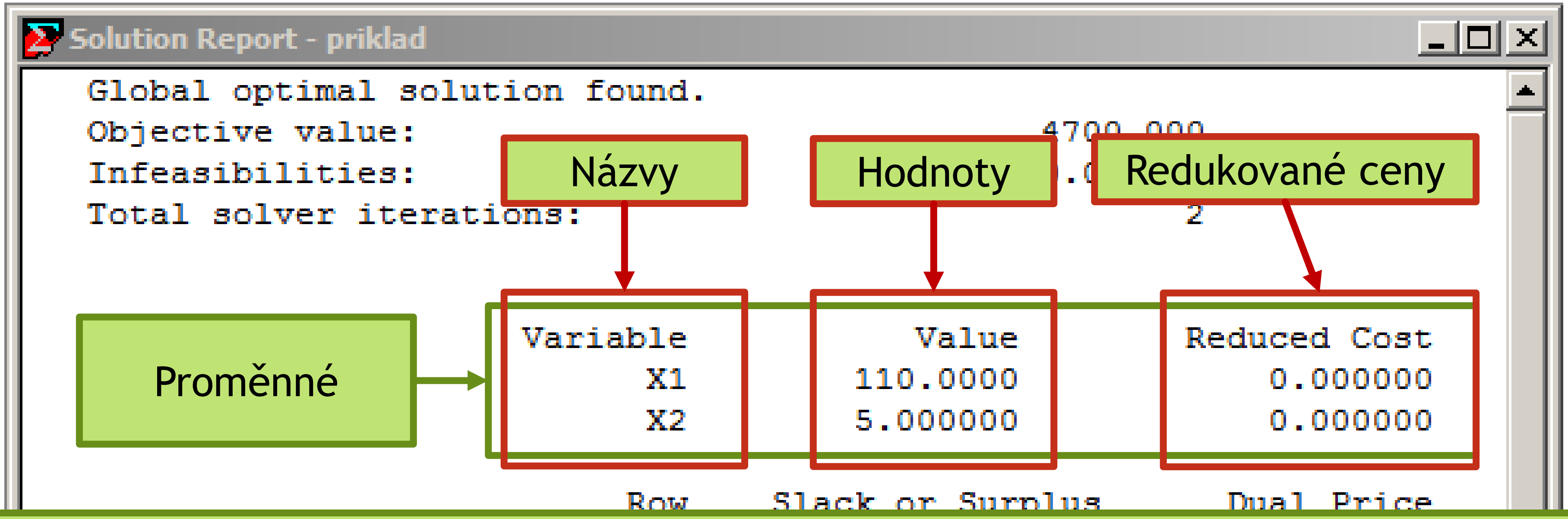
Hodnota účelové funkce

Proměnné

Omezení

Účelová funkce

3.4 LINGO - proměnné



Redukovaná cena

⟶ Pokud se proces **nerealizuje** (hodnota strukturní proměnné = 0), udává, o kolik se musí <u>zlepšit</u> cena, aby bylo výhodné proces realizovat.

⟶ Pokud se proces **realizuje** (hodnota strukturní proměnné > 0), je redukovaná cena nulová (není třeba cenu zlepšovat).

3.4 Redukovaná cena

- Předpokládejme nyní v příkladu zavedení výroby třetího výrobku (klíč na utahování šroubů)
  - Lisování 5 minut
  - Balení 5 minut
  - Zisk 10 Kč

Lis:	$1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení:	$1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka:	$1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krab.]
Šroubky:	$1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krab.]
Nezápornost:	$x_1, x_2 \geq 0$ [krab.]
Zisk:	$40\,x_1 + 60\,x_2 \dots \max$ [Kč]

Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$z = 4700$$

3.4 Redukovaná cena

LINGO Model - priklad - 2 prom

```
model:
[lis]                 1*x1 + 2*x2 <= 120;
[baleni]              1*x1 + 4*x2 <= 180;
[poptavka]            1*x1 - 1*x2 >=  90;
[sroubky]               x1        <= 110;

[zisk]       max = 40*x1 + 60*x2;
end
```

LINGO Model - priklad - 3 prom

```
model:
[lis]                 1*x1 + 2*x2 + 5*x3 <= 120;
[baleni]              1*x1 + 4*x2 + 5*x3 <= 180;
[poptavka]            1*x1 - 1*x2        >=  90;
[sroubky]               x1               <= 110;

[zisk]       max = 40*x1 + 60*x2 + 10*x3;
end
```

Solution Report - priklad - 3 prom

Global optimal solution found.
Objective value: 4700.000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 2

Variable	Value	Reduced Cost
X1	110.0000	0.000000
X2	5.000000	0.000000
X3	0.000000	140.0000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LIS	0.000000	30.00000
BALENI	50.00000	0.000000
POPTAVKA	15.00000	0.000000
SROUBKY	0.000000	10.00000
ZISK	4700.000	1.000000

Solution Report - priklad - 2 prom

Global optimal solution found.
Objective value: 4700.000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 2

Variable	Value	Reduced Cost
X1	110.0000	0.000000
X2	5.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LIS	0.000000	30.00000
BALENI	50.00000	0.000000
POPTAVKA	15.00000	0.000000
SROUBKY	0.000000	10.00000
ZISK	4700.000	1.000000

Redukovaná cena

⟶ Pokud se proces **realizuje** (hodnota strukturní proměnné > 0), je redukovaná cena nulová (není třeba cenu zlepšovat).

⟶ Pokud se proces **nerealizuje** (hodnota strukturní proměnné = 0), udává, o kolik se musí zlepšit cena, aby bylo výhodné proces realizovat.

Variable	Value	Reduced Cost
X1	110.0000	0.000000
X2	5.000000	0.000000
X3	0.000000	140.0000

- O kolik je třeba zlepšit současný cenový koeficient (10 Kč), aby byl příslušný proces realizován.
- O kolik se zhorší hodnota účelové funkce, když budeme nuceni realizovat příslušný proces s jednotkovou intenzitou.

LINGO Model - priklad - 3 prom

```
model:
[lis]             1*x1 + 2*x2 + 5*x3 <= 120;
[baleni]          1*x1 + 4*x2 + 5*x3 <= 180;
[poptavka]        1*x1 - 1*x2        >=  90;
[sroubky]           x1               <= 110;

[zisk]      max = 40*x1 + 60*x2 + 160*x3;
end
```

```
found.
                4720.000
                0.000000
                       2

Variable           Value        Reduced Cost
      X1        110.0000            0.000000
      X2        0.000000            4.000000
      X3        2.000000            0.000000

     Row    Slack or Surplus      Dual Price
     LIS        0.000000            32.00000
  BALENI        60.00000            0.000000
POPTAVKA        20.00000            0.000000
SROUBKY         0.000000            8.000000
    ZISK        4720.000            1.000000
```

LINGO Model - priklad - 3 prom

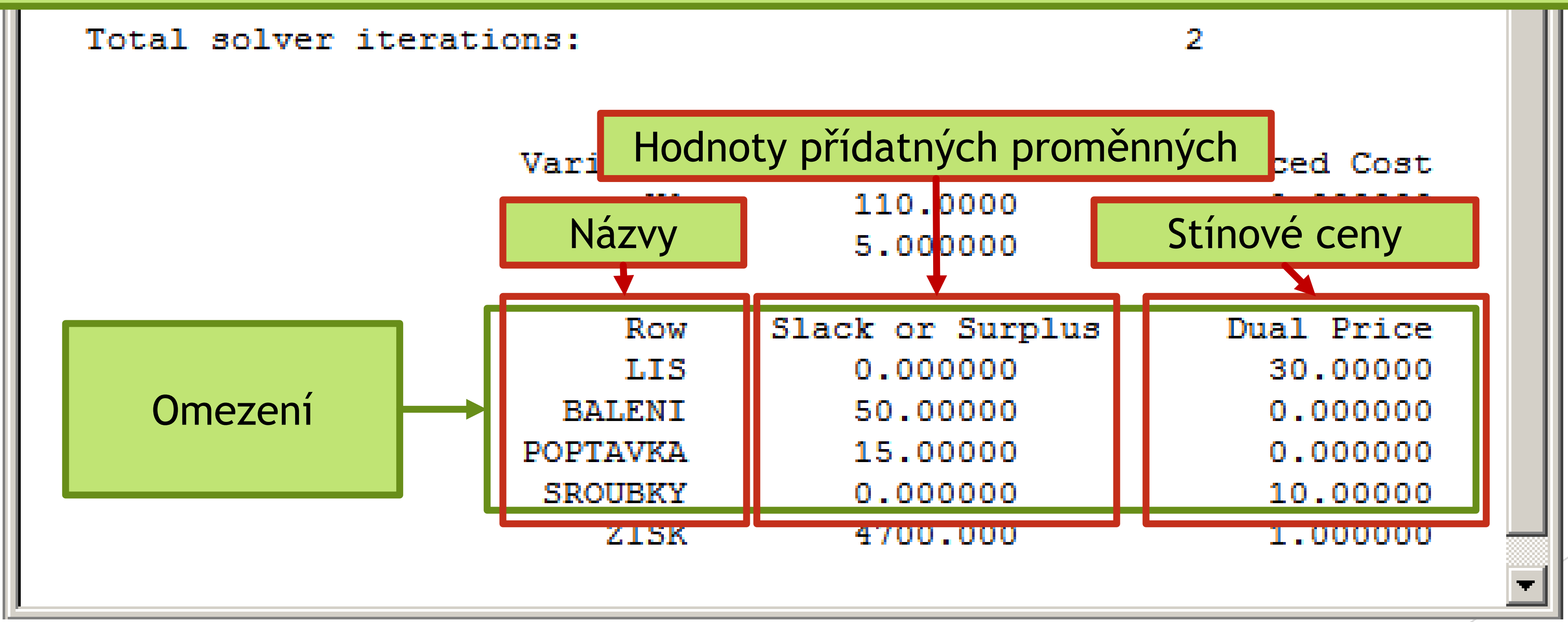
```
model:
[lis]            1*x1 + 2*x2 + 5*x3 <= 120;
[baleni]         1*x1 + 4*x2 + 5*x3 <= 180;
[poptavka]       1*x1 - 1*x2        >=  90;
[sroubky]          x1               <= 110;
[klic]             x3               >=   1;

[zisk]      max = 40*x1 + 60*x2 + 10*x3;
end
```

```
found.
                          4560.000
                          0.000000
:                                2

        Variable           Value        Reduced Cost
              X1        110.0000            0.000000
              X2        2.500000            0.000000
              X3        1.000000            0.000000

             Row    Slack or Surplus      Dual Price
             LIS        0.000000            30.00000
          BALENI        55.00000            0.000000
        POPTAVKA        17.50000            0.000000
        SROUBKY         0.000000            10.00000
            KLIC        0.000000           -140.0000
            ZISK        4560.000            1.000000
```

Stínová cena (duální cena, duální proměnná)

⟶ Pokud je omezení splněno na hraně, tj. jako rovnost (hodnota přídatné proměnné = 0), udává, o kolik se <u>zlepší</u> z, pokud se kapacita uvolní o jednotku.

⟶ Pokud je omezení splněno s rezervou (hodnota přídatné proměnné > 0), je stínová cena nulová (malá změna kapacity nezpůsobí změnu z).



Stínová cena ⟶ Pokud je omezení splněno s rezervou (hodnota přídatné proměnné > 0), je stínová cena nulová (malá změna kapacity nezpůsobí změnu z).

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LIS	0.000000	30.00000
BALENI	50.00000	0.000000
POPTAVKA	15.00000	0.000000
SROUBKY	0.000000	10.00000
ZISK	4700.000	1.000000

Lis: $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]
Balení: $1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]
Poptávka: $1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krab.]
Šroubky: $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krab.]
Nezápornost: $x_1, x_2 \geq 0$ [krab.]

Zisk: $40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$z = 4700$$

Stínová cena ⟶ Pokud je omezení splněno na hraně, tj. jako rovnost (hodnota přídatné proměnné = 0), udává, o kolik se zlepší z, pokud se kapacita uvolní o jednotku.

Row	Slack or Surplus	Dual Price
LIS	0.000000	30.00000
BALENI	50.00000	0.000000
POPTAVKA	15.00000	0.000000
SROUBKY	0.000000	10.00000
ZISK	4700.000	1.000000

Optimální řešení:

$$\mathbf{x}^* = (110, 5, 0, 50, 15, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$z = 4700$$

Lis: $1\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$ [min]

Balení: $1\,x_1 + 4\,x_2 \leq 180$ [min]

Poptávka: $1\,x_1 - 1\,x_2 \geq 90$ [krab.]

Šroubky: $1\,x_1 + 0\,x_2 \leq 110$ [krab.]

Nezápornost: $x_1, x_2 \geq 0$ [krab.]

Zisk: $40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max$ [Kč]

LINGO Model - priklad - 3 prom

```
model:
[lis]              1*x1 + 2*x2 <= 122;
[baleni]           1*x1 + 4*x2 <= 180;
[poptavka]         1*x1 - 1*x2 >=  90;
[sroubky]            x1        <= 110;

[zisk]       max = 40*x1 + 60*x2;
end
```

```
nd.
                                    4760.000
                                    0.000000
                                           2


      Variable           Value        Reduced Cost
            X1        110.0000            0.000000
            X2        6.000000            0.000000

           Row    Slack or Surplus      Dual Price
           LIS        0.000000            30.00000
        BALENI        46.00000            0.000000
      POPTAVKA        14.00000            0.000000
       SROUBKY        0.000000            10.00000
          ZISK        4760.000            1.000000
```

Stínová cena
$\longrightarrow$ O kolik se zlepší z, pokud se kapacita uvolní o jednotku.

- Omezení ve tvaru nerovnice typu $\leq$:
  - $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$
  - Zvětšení pravé strany rozšiřuje množinu přípustných řešení
  - Zlepšení řešení
    - maximalizace – zvýšení hodnoty účelové funkce
    - minimalizace – snížení hodnoty účelové funkce
- Omezení ve tvaru nerovnice typu $\geq$:
  - $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$
  - Zvětšení pravé strany zmenšuje množinu přípustných řešení
  - Zhoršení řešení
    - maximalizace – snížení hodnoty účelové funkce
    - minimalizace – zvýšení hodnoty účelové funkce

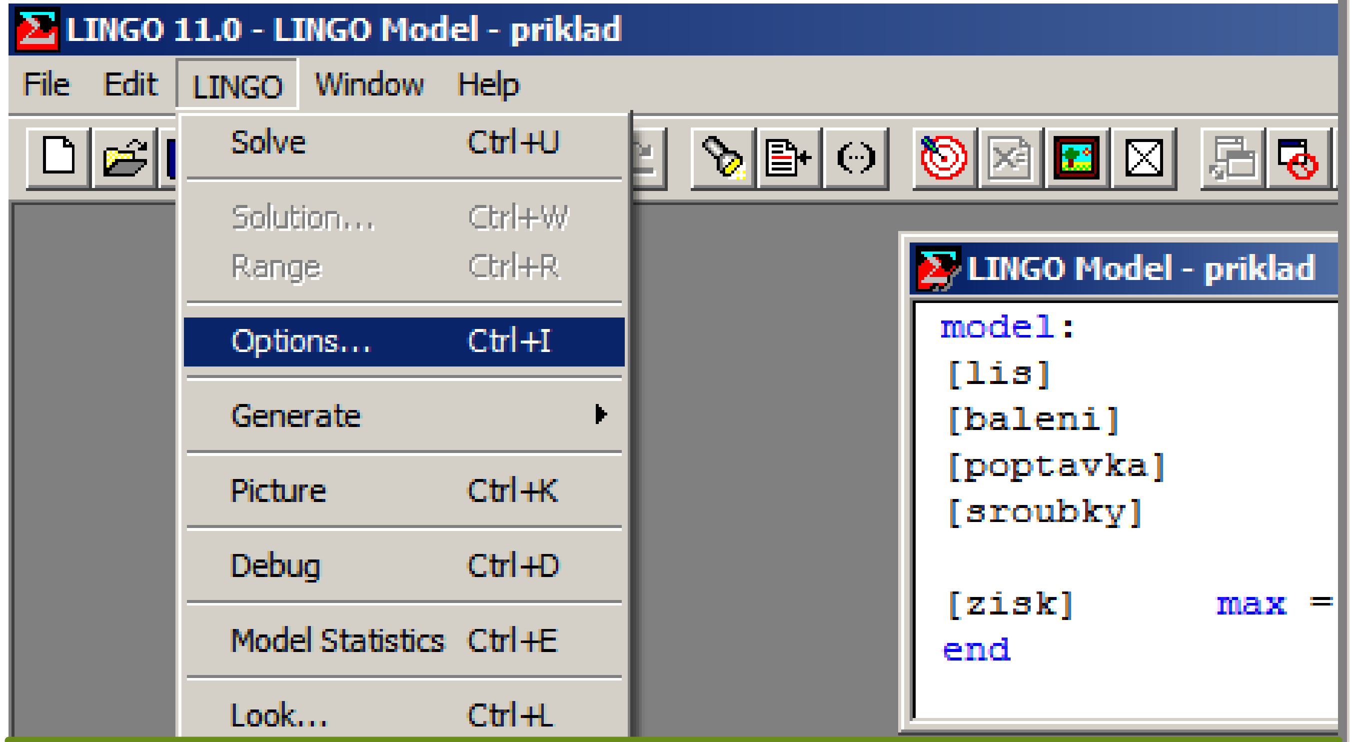
3.4 Redukované a stínové ceny

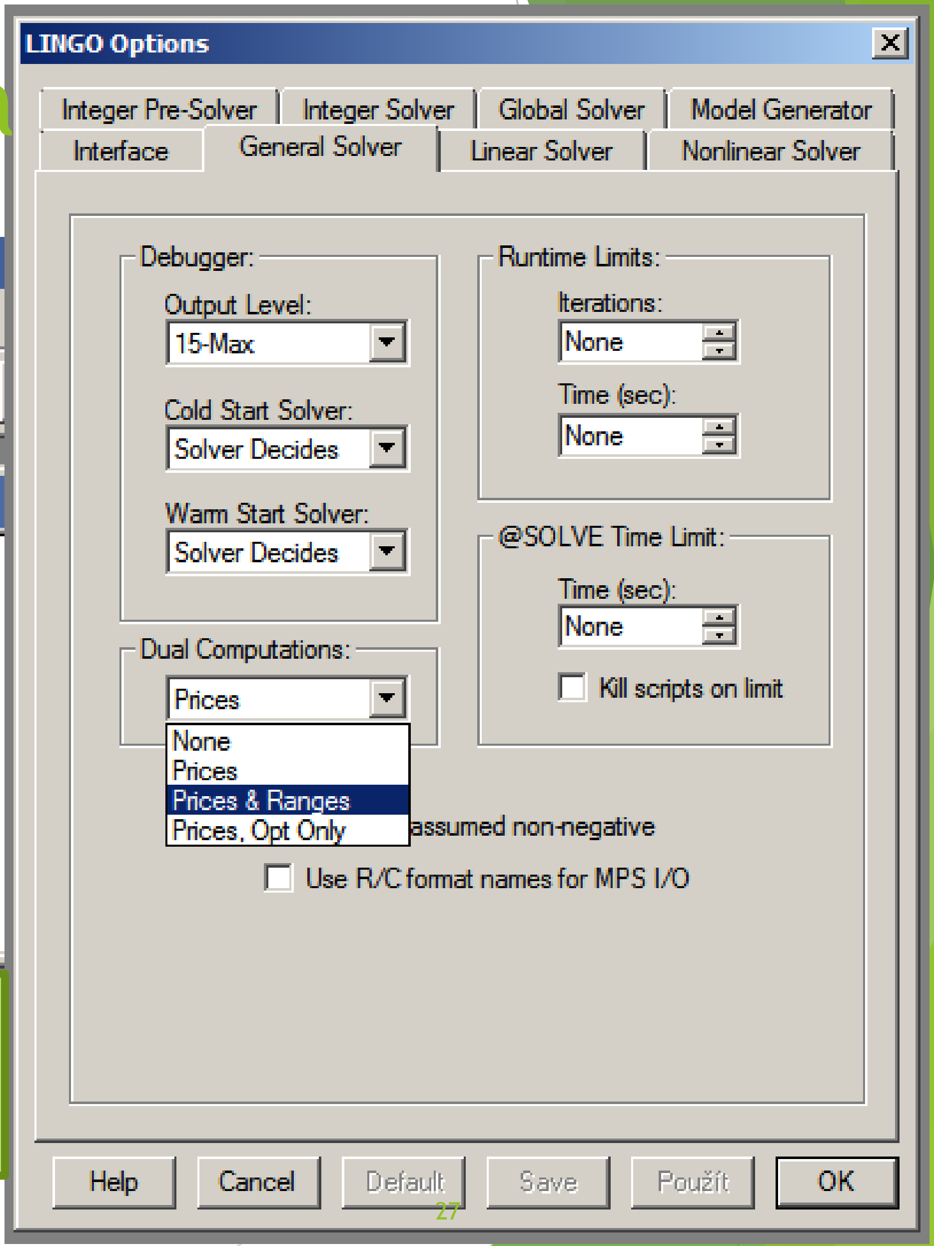
Interpretace pro redukované i stínové ceny platí jen při malých změnách

CO JE MALÁ ZMĚNA ?

Interpretace pro redukované i stínové ceny platí jen při změnách v rámci **intervalu stability**

3.5 LINGO - stabilita

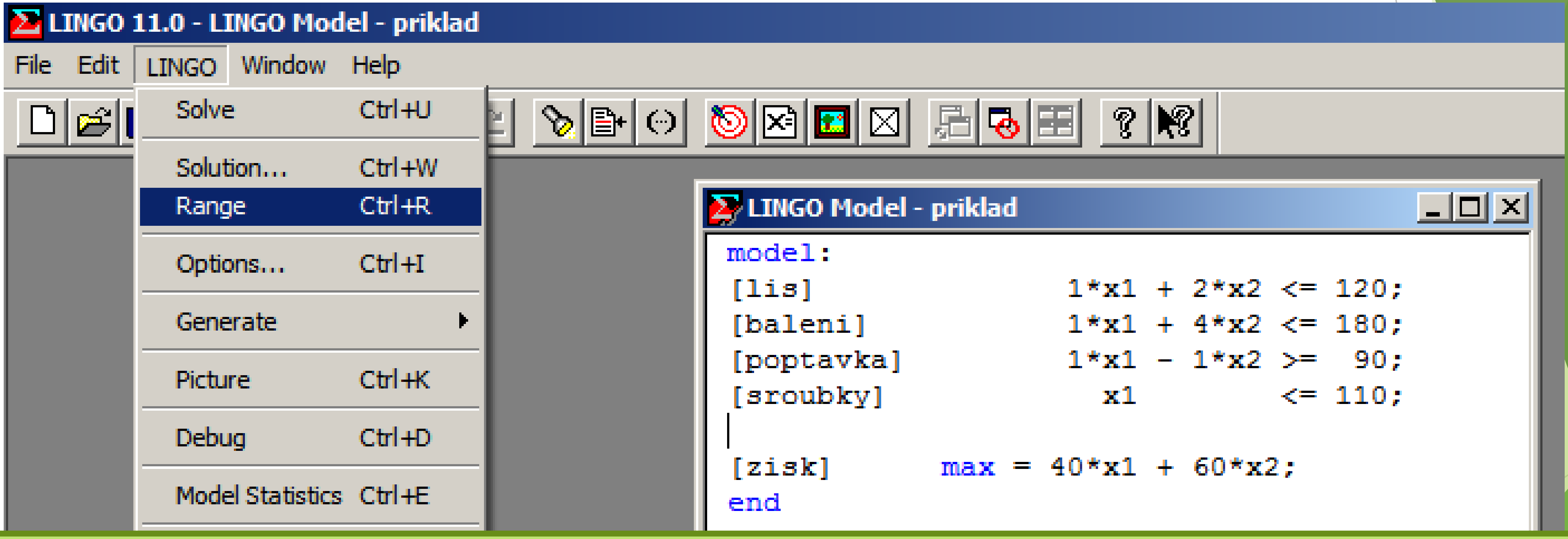




LINGO ⟶ Options… ⟶ General Solver

⟶ Dual Computations ⟶ Prices & Ranges

3.5 LINGO - stabilita



- Vyřešit úlohu (CTRL + U)
- Z okna s modelem (ne s řešením) zobrazit Range report (CTRL + R)

3.5 LINGO - stabilita

Range Report - priklad

Ranges in which t ged

Současná hodnota | Povolený nárůst | Povolený pokles

Proměnné

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	40.00000	INFINITY	10.00000
X2	60.00000	20.00000	60.00000

Omezení

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
BALENI	180.0000	INFINITY	50.00000
POPTAVKA	90.00000	15.00000	INFINITY
SROUBKY	110.0000	10.00000	10.00000
LIS	120.0000	25.00000	10.00000

3.5 Intervaly stability cenových koeficientů

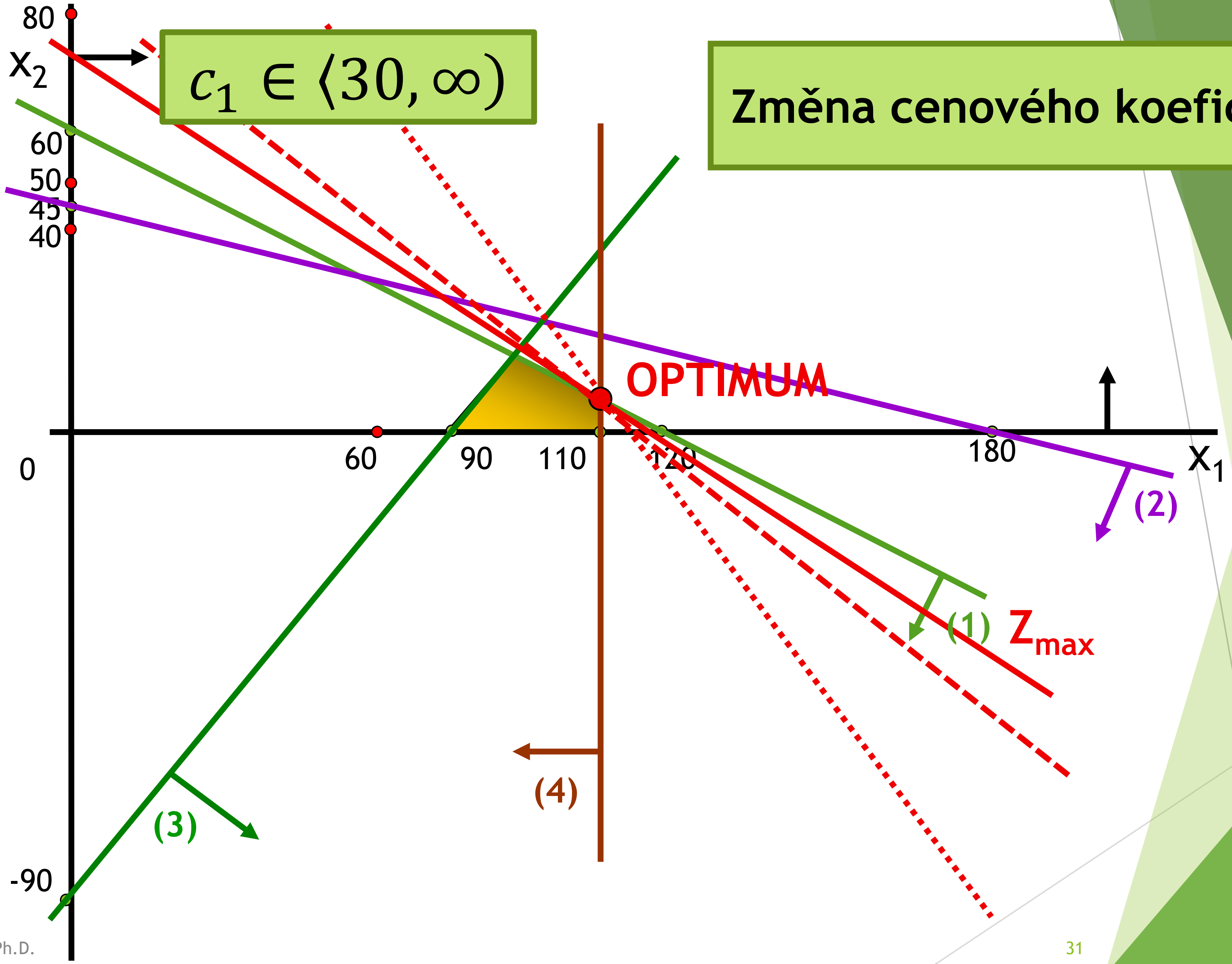
- Účelová funkce: $z = 40\,x_1 + 60\,x_2 \ldots \max\ [\text{Kč}]$

	Objective Coefficient Ranges		
	Current	Allowable	Allowable
Variable	Coefficient	Increase	Decrease
X1	40.00000	INFINITY	10.00000
X2	60.00000	20.00000	60.00000

- $c_1 \in \langle 40 - 10, 40 + \infty) \rightarrow c_1 \in \langle 30, \infty)$
- $c_2 \in \langle 60 - 60, 60 + 20\rangle \rightarrow c_2 \in \langle 0, 80\rangle$

Změna cenového koeficientu

$c_1 \in \langle 30, \infty)$



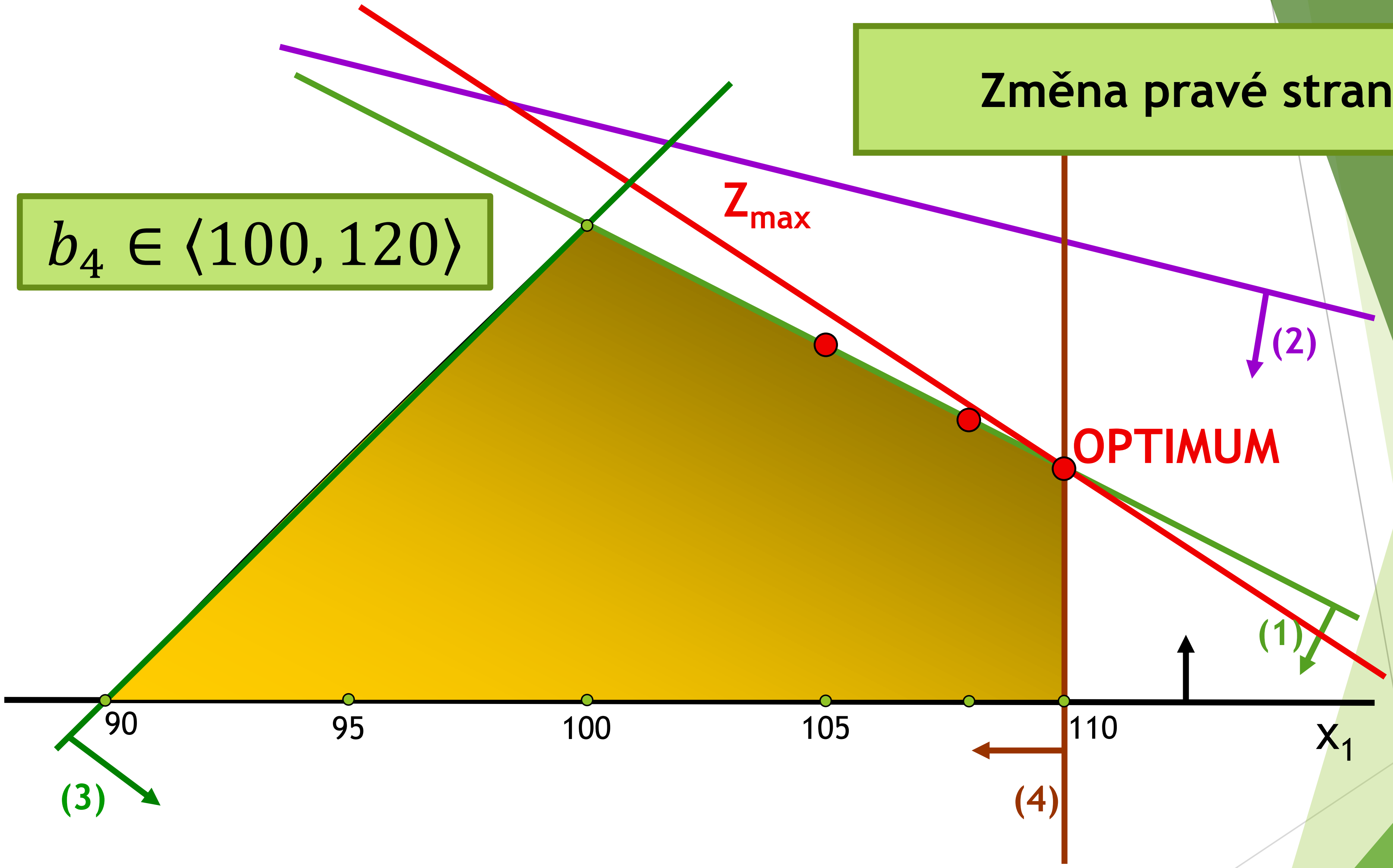
3.5 Intervaly stability pravých stran

	Righthand Side Ranges		
Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
BALENI	180.0000	INFINITY	50.00000
POPTAVKA	90.00000	15.00000	INFINITY
SROUBKY	110.0000	10.00000	10.00000
LIS	120.0000	25.00000	10.00000

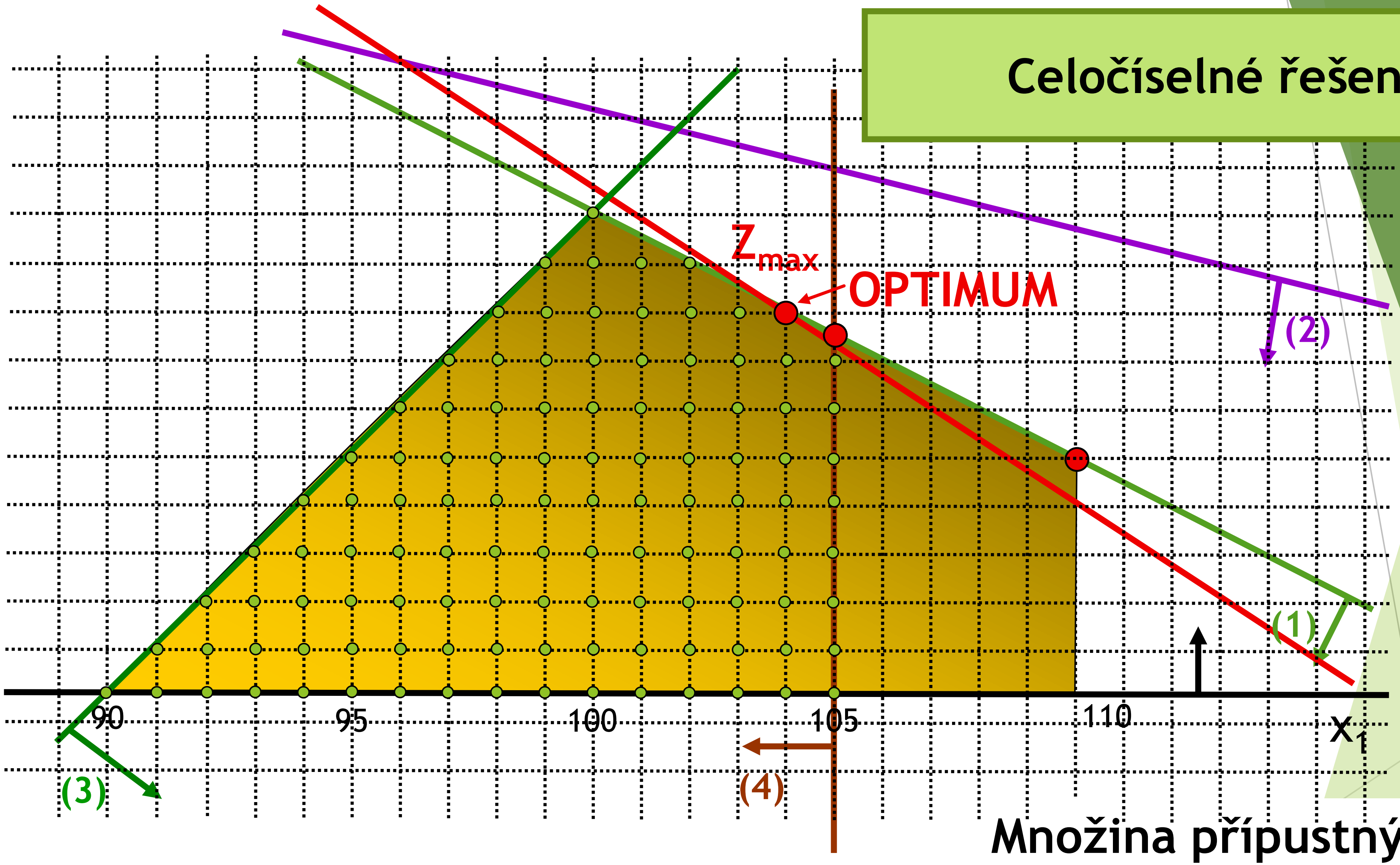
- $b_1 \in \langle 120 - 10, 120 + 25 \rangle \rightarrow b_1 \in \langle 110, 145 \rangle$
- $b_2 \in \langle 180 - 50, 180 + \infty) \rightarrow b_2 \in \langle 130, \infty)$
- $b_3 \in \langle 90 - \infty, 90 + 15 \rangle \rightarrow b_3 \in (-\infty, 105 \rangle$
- $b_4 \in \langle 110 - 10, 110 + 10 \rangle \rightarrow b_4 \in \langle 100, 120 \rangle$

Změna pravé strany

$b_4 \in \langle 100, 120 \rangle$



Celočíselné řešení



Množina přípustných řešení

3.6 Celočíselnost v úlohách LP

- Množina přípustných řešení obsahuje jen celočíselné body (mřížka)
- Úlohu řešíme nejprve bez podmínek celočíselnosti
  - Pokud vyjde řešení celočíselně, máme OŘ
  - Pokud nevyjde celočíselně, použijeme některou z metod pro hledání celočíselného řešení (větve a meze, Gomoryho apod.) – oříznutí množiny PŘ
- **LINGO:** funkce `@gin(x1);`
- Pozor: při použití podmínek celočíselnosti ztratíme informaci o redukovaných a stínových cenách

3.6 LINGO - celočíselnost

Solution Report - model-2prom

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              4700.000
Objective bound:                              4700.000
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             0


                    Variable           Value        Reduced Cost
                          X1        110.0000           -40.00000
                          X2        5.000000           -60.00000

                         Row    Slack or Surplus      Dual Price
                         LIS        0.000000            0.000000
                      BALENI        50.00000            0.000000
                    POPTAVKA        15.00000            0.000000
                     SROUBKY        0.000000            0.000000
                        ZISK        4700.000            1.000000
```

LINGO Model - model-2prom

```
model:
 [lis]                1*x1 + 2*x2 <= 120;
 [baleni]             1*x1 + 4*x2 <= 180;
 [poptavka]           1*x1 - 1*x2 >=  90;
 [sroubky]              x1        <= 110;
 [celociselnost1]     @gin(x1);
 [celociselnost2]     @gin(x2);

 [zisk]      max = 40*x1 + 60*x2;
end
```

3.6 LINGO - celočíselnost

LINGO Model - model-2prom

```
model:
[lis]              1*x1 + 2*x2 <= 120;
[baleni]           1*x1 + 4*x2 <= 180;
[poptavka]         1*x1 - 1*x2 >=  90;
[sroubky]            x1        <= 105;
[celociselnost1]   @gin(x1);
[celociselnost2]   @gin(x2);

[zisk]       max = 40*x1 + 60*x2;
end
```

Solution Report - model-2prom

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          4640.000
Objective bound:                          4640.000
Infeasibilities:                          0.000000
Extended solver steps:                           0
Total solver iterations:                         0


                    Variable           Value        Reduced Cost
                          X1        104.0000           -40.00000
                          X2        8.000000           -60.00000

                         Row    Slack or Surplus      Dual Price
                         LIS        0.000000            0.000000
                      BALENI        44.00000            0.000000
                    POPTAVKA        6.000000            0.000000
                     SROUBKY        1.000000            0.000000
                        ZISK        4640.000            1.000000
```

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 4 a kapitoly 2.7 a 2.8

KONEC