4EK311 – Operační výzkum

4. Distribuční úlohy LP – část 1

4. Distribuční úlohy LP

- Úlohy výrobního plánování (alokace zdrojů)
- Úlohy finančního plánování (optimalizace portfolia)
- Úlohy reklamního plánování (plánování reklamy)
- Směšovací problémy
- Nutriční problém (spec. případ směšovacího problému)
- Úlohy o dělení materiálu (řezné problémy)
- Rozvrhování pracovníků
- Distribuční úlohy (dopravní problém a další)

4. Distribuční úlohy LP

- Úkolem celé velké skupiny distribučních úloh je zajistit distribuci (tj. rozdělení) určité homogenní komodity (např. zboží) z jedné oblasti (např. dodavatelé) do druhé oblasti (např. odběratelé).
- **Proměnné:** přiřazení jednotky z první skupiny k jednotce z druhé skupiny (např. doprava od daného dodavatele k danému odběrateli), hodnoty určují, zda k přiřazení dojde či ne (0/1) nebo jak intenzivní přiřazení je (množství převáženého zboží)
- **Omezení:** kapacity a požadavky
- **Cíl:** obvykle minimalizace nákladů

4. Distribuční úlohy LP

- dopravní problém
- kontejnerový dopravní problém
- obecný distribuční problém
- přiřazovací problém
- úloha o pokrytí
- okružní dopravní problém
- výrobně-přepravní problém atd.

4. Distribuční úlohy LP

- Liší se od běžných úloh LP svým specifickým matematickým modelem
- Řada z nich je charakteristická požadavkem celočíselnosti proměnných
- Řeší se proto specifickými metodami
- Nejjednodušším reprezentantem je dopravní problém (DP)

4.1 Dopravní problém (DP)

- DP řeší distribuci homogenní látky od dodavatelů k odběratelům
- Je dán:
  - počet dodavatelů m (index $i = 1, 2, \dots, m$)
  - počet odběratelů n (index $j = 1, 2, \dots, n$)
  - kapacity dodavatelů a_i
  - požadavky odběratelů b_j
  - „cena“ (náklady, vzdálenost atd.) za dodání jedné jednotky od i-tého dodavatele k j-tému odběrateli c_{ij}
- Kapacity dodavatelů jsou zadány ve stejných jednotkách jako požadavky odběratelů

4.1 Dopravní problém (DP)

Úkol:

- určit, kolik jednotek dodá každý dodavatel každému odběrateli

Cíl:

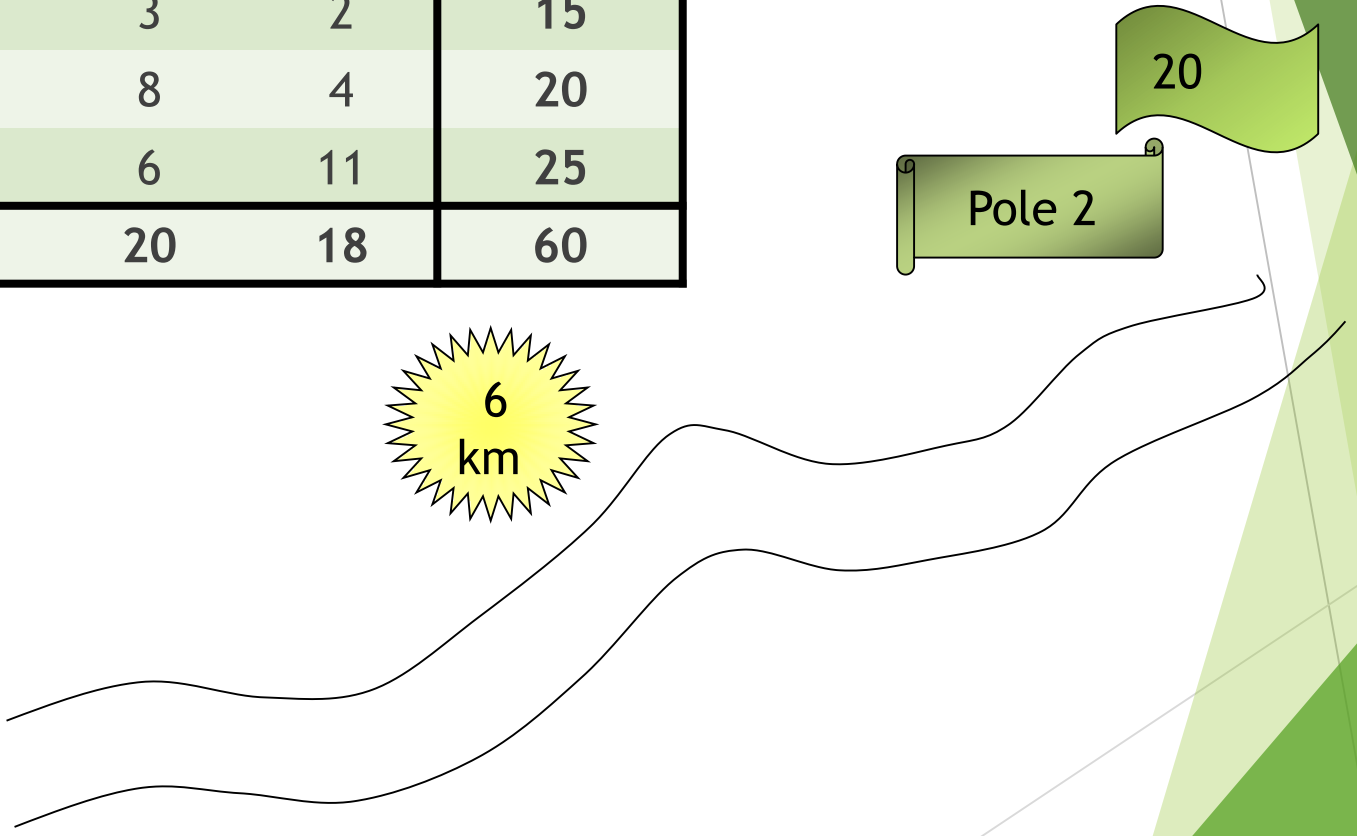
- uspokojit požadavky odběratelů tak, aby hodnota stanoveného cíle byla minimální

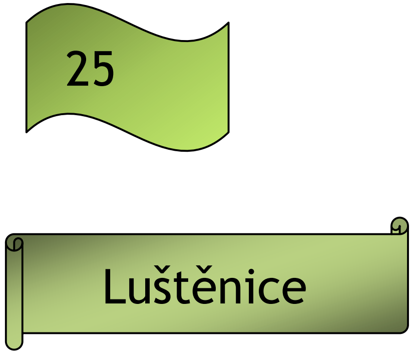
4.1 Příklad - zadání

- V okolí Mladé Boleslavi působí mimo jiné tři zemědělská družstva: Sever Loukovec, Čistá u Mladé Boleslavi a Luštěnice.
- Družstva disponují 15, 20 a 25 kombajny.
- Je potřeba posekat tři pole s obilím, přičemž na první je potřeba poslat 22 kombajnů, na druhé 20 a na třetí 18.
- Vzdálenosti mezi jednotlivými družstvy a poli jsou uvedeny v tabulce.
- Určete přepravované počty kombajnů z jednotlivých družstev na pole tak, aby počet ujetých kilometrů byl minimální.

4.1 Příklad - zadání

[km]	*Pole 1*	*Pole 2*	*Pole 3*	Kapacity
Sever Loukovec	9	3	2	15
Čistá u Mladé Boleslavi	7	8	4	20
Luštěnice	5	6	11	25
Požadavky	**22**	**20**	**18**	**60**





4.1 Příklad - proměnné

- Proměnné označíme x_{ij}
- Hodnota proměnné x_{ij} určuje množství kombajnů v kusech dodaných i−tým dodavatelem (družstvem) j−tému odběrateli (poli)
- Proměnných je $m \cdot n = 3 \cdot 3 = 9$
- Vektor proměnných má složky

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33})^{\mathrm{T}}$$

- Na obrázku byla znázorněna volba náhodně zvolené proměnné x_{32}

4.1 Dopravní problém – formulace MM

- Proměnné v DP označíme x_{ij} (dvojitý index)
- Hodnota proměnné x_{ij} určuje množství homogenní látky dodané i–tým dodavatelem j–tému odběrateli
- Počet proměnných: $m \cdot n$
- Vektor proměnných má složky

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})^{\mathrm{T}}$$

- Předpokládá se rovnost součtu kapacit a součtu požadavků (vyrovnaný DP)*
- Omezení jsou proto formulována v rovnicích

4.1 Příklad – matematický model

minimalizovat

$$z = 9x_{11} + 3x_{12} + \cdots + 11x_{33}$$

za podmínek:

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 15$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 25$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 22$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 18$$

x_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	15
D2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	20
D3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	25
b_j	22	20	18	60

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3, j = 1,2,3$$

4.1 Příklad – matematický model

minimalizovat

$$z = 9x_{11} + 3x_{12} + \cdots + 11x_{33}$$

za podmínek:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & & & & = & 15 \\
 & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & & & & = & 20 \\
 & & & & & & x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & = & 25 \\
 & & & & & & & & & & \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & +x_{31} & & & = & 22 \\
 & x_{12} & & & +x_{22} & & & +x_{32} & & = & 20 \\
 & & x_{13} & & & +x_{23} & & & +x_{33} & = & 18
\end{array}$$

4.1 Dopravní problém – formulace MM

- Počet omezení DP je $m + n$
  - m pro dodavatele (řádková omezení, zajišťují kapacitu)

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = a_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

  - n pro odběratele (sloupcová omezení, zajišťují požadavky)

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} = b_j, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \ldots, n$$

4.1 Dopravní problém – formulace MM

- Podmínky nezápornosti:

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

- Účelová funkce:

minimalizovat $\quad z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{mn}x_{mn}$

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

4.1 Dopravní problém – obecný model

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

4.1 Dopravní problém – formulace MM

- Každý **vyrovnaný dopravní problém**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

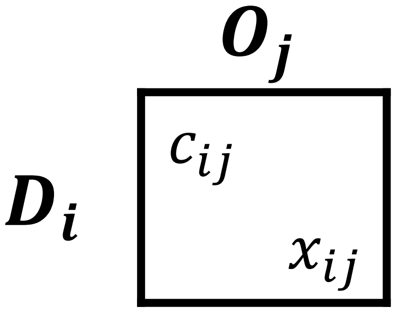
- má vždy přípustné řešení i optimální řešení
- Každý **nevyrovnaný dopravní problém**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- lze převést na vyrovnaný dopravní problém

4.1 Dopravní problém – dopravní tabulka

- Zejména z důvodu přehlednosti
- Řádek tabulky odpovídá řádkovému omezení
- Sloupec tabulky odpovídá sloupcovému omezení
- Řádky a sloupce vymezují políčka
- Políčko tabulky odpovídá jedné dopravní cestě mezi dodavatelem a odběratelem, tj. jedné proměnné x_{ij}



4.1 Příklad – dopravní tabulka

z = 411

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 15	3 –	2 –	15
D_2	7 7	8 –	4 13	20
D_3	5 –	6 20	11 5	25
b_j	22	20	18	60

4.1 Příklad – optimální řešení

z = 261

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	9	3	2	15
D2	7	8	4	20
D3	5	6	11	25
b_j	22	20	18	60

	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	9 –	3 15	2 –	15
D_2	7 2	8 –	4 18	20
D_3	5 20	6 5	11 –	25
b_j	22	20	18	60

4.1 Dopravní problém – nevyrovnaný DP

- Každý **nevyrovnaný dopravní problém**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- lze převést na vyrovnaný dopravní problém
  - Buď přidáním fiktivního dodavatele
  - Nebo přidáním fiktivního odběratele

4.1 Příklad - zadání

- Předpokládejme nyní, že Pole 3 je již posekané.
- Všechny ostatní informace zůstávají beze změny.
- Určete přepravované počty kombajnů z jednotlivých družstev na pole tak, aby počet ujetých kilometrů byl minimální.

[km]	*Pole 1*	*Pole 2*	Kapacity
Sever Loukovec	9	3	15
Čistá u Mladé Boleslavi	7	8	20
Luštěnice	5	6	25
Požadavky	22	20	42 / 60

4.1 Příklad – fiktivní odběratel

c_{ij}	O1	O2	a_i
D1	9	3	15
D2	7	8	20
D3	5	6	25
b_j	22	20	

Cenové koeficienty fiktivního odběratele jsou nulové

	O_1	O_2	F_3	a_i
D_1	9	3	0	**15**
D_2	7	8	0	**20**
D_3	5	6	0	**25**
b_j	**22**	**20**	**18**	**60**

4.1 Dopravní problém – nevyrovnaný DP

- Přebytek kapacit nad požadavky

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Přidání fiktivního odběratele (sloupec) s požadavkem

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Představuje neodeslané zboží (nevyčerpaná kapacita)

4.1 Příklad - zadání

- Předpokládejme nyní, že oproti původnímu zadání má zemědělské družstvo Sever Loukovec celodružstevní dovolenou a jejich kombajny nemohou sekat.
- Všechny ostatní informace zůstávají beze změny.
- Určete přepravované počty kombajnů z jednotlivých družstev na pole tak, aby počet ujetých kilometrů byl minimální.

[km]	*Pole 1*	*Pole 2*	*Pole 3*	Kapacity
Čistá u Mladé Boleslavi	7	8	4	20
Luštěnice	5	6	11	25
Požadavky	22	20	18	60 / 45

4.1 Příklad – fiktivní dodavatel

c_{ij}	O1	O2	O3	a_i
D1	7	8	4	20
D2	5	6	11	25
b_j	22	20	18	

Cenové koeficienty fiktivního dodavatele jsou nulové

	O_1	O_2	O_3	a_i
D_1	7	8	4	**20**
D_2	5	6	11	**25**
F_3	0	0	0	**15**
b_j	**22**	**20**	**18**	**60**

4.1 Dopravní problém – nevyrovnaný DP

- Přebytek požadavků nad kapacitami

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Přidání fiktivního dodavatele (řádek) s kapacitou

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

- Představuje nedodané zboží (nesplněný požadavek)

4.2 Kontejnerový dopravní problém (KDP)

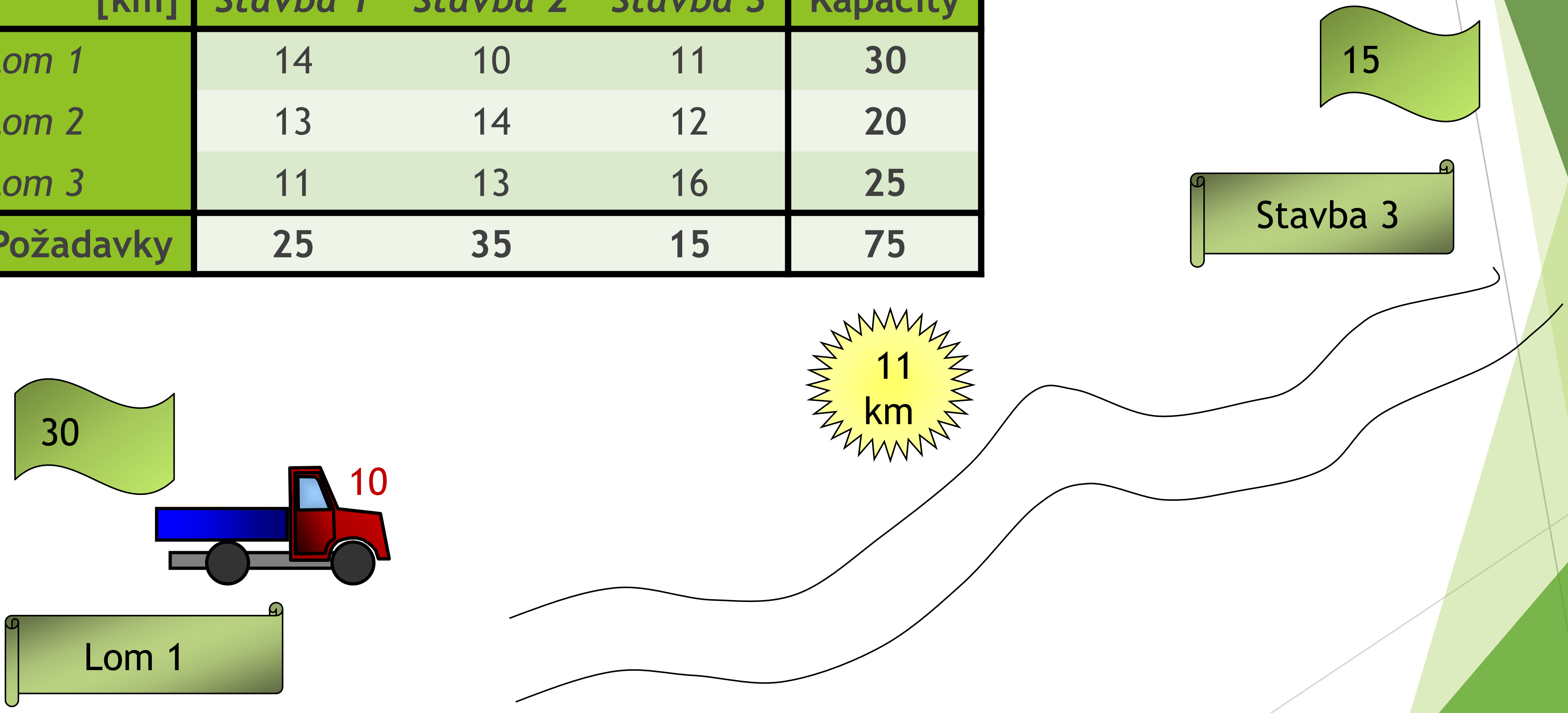
- KDP je modifikací dopravního problému s tím rozdílem, že přeprava zboží se provádí pouze v kontejnerech
- Každý kontejner má kapacitu *K* jednotek
- Náklady na přepravu jsou uvedeny na jeden kontejner
- Náklady jsou stejné bez ohledu na to, je-li kontejner plný nebo poloprázdný
- Celkové náklady na přepravu se minimalizují

4.2 Příklad - zadání

- Firma Kámen těží ve třech lomech štěrko-písek.
- Štěrkopísek dodává na tři velké stavby.
- Kapacita lomů je 30, 20 a 25 tun (denně).
- Požadavky staveb jsou 25, 35 a 15 tun (denně).
- Vzdálenosti jednotlivých lomů od staveb v km jsou uvedeny v tabulce.
- Doprava je realizována pomocí nákladních vozů Liaz 150 s maximální nosností 10 tun.
- Určete objem dodávek z jednotlivých lomů na stavby tak, aby počet ujetých kilometrů byl minimální.

4.2 Příklad - zadání

[km]	*Stavba 1*	*Stavba 2*	*Stavba 3*	**Kapacity**
Lom 1	14	10	11	**30**
Lom 2	13	14	12	**20**
Lom 3	11	13	16	**25**
Požadavky	**25**	**35**	**15**	**75**



4.2 Kontejnerový dopravní problém (KDP)

- Je dán:
  - počet dodavatelů m (index $i = 1, 2, \dots, m$)
  - počet odběratelů n (index $j = 1, 2, \dots, n$)
  - kapacity dodavatelů a_i
  - požadavky odběratelů b_j
  - objem kontejneru K (maximální množství zboží)
  - „cena" (náklady, vzdálenost atd.) za dodání jednoho kontejneru od i-tého dodavatele k j-tému odběrateli c_{ij}

4.2 Kontejnerový dopravní problém (KDP)

- Kapacity dodavatelů jsou zadány ve stejných jednotkách jako požadavky odběratelů
- Kapacity dodavatelů stačí na pokrytí požadavků (součet kapacit je větší nebo roven součtu požadavků)
- Minimalizujeme náklady na přepravu kontejnerů

4.2 KDP – formulace MM

- KDP obsahuje dva typy proměnných:
- První proměnné v KDP označíme x_{ij} (dvojitý index)
- Hodnota proměnné x_{ij} určuje přepravované množství od i–tého dodavatele k j–tému odběrateli
- Počet proměnných x_{ij}: $m \cdot n$
- Vektor proměnných má složky

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})^{\mathrm{T}}$$

4.2 KDP – formulace MM

- Hodnoty proměnných x_{ij} jsou omezeny kapacitami dodavatelů a požadavky odběratelů
- Počet těchto omezení je $m + n$
  - m pro dodavatele (řádková omezení, zajišťují kapacitu)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

  - n pro odběratele (sloupcová omezení, zajišťují požadavky)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

4.2 KDP – formulace MM

- Druhé proměnné v KDP označíme y_{ij} (dvojitý index)
- Hodnota proměnné y_{ij} určuje počet přepravovaných kontejnerů od i–tého dodavatele k j–tému odběrateli
- Počet proměnných y_{ij}: $m \cdot n$
- Vektor proměnných má složky

$$\mathbf{y} = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}, \dots, y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mn})^{\mathrm{T}}$$

4.2 KDP – formulace MM

- Hodnoty proměnných y_{ij} jsou omezeny přepravovaným množstvím (přepravované množství x_{ij} se musí vejít do kontejnerů jedoucích mezi i-tým dodavatelem a j-tým odběratelem)
- Počet těchto omezení je $m \cdot n$
  - Pro každou dvojici i-tého dodavatele a j-tého odběratele

$$x_{ij} \leq K y_{ij}, \qquad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

4.2 KDP – formulace MM

- Podmínky nezápornosti a celočíselnosti:

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$
$$y_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$
$$y_{ij} \ - \text{celé}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

- Účelová funkce:

minimalizovat $\quad z = c_{11}y_{11} + c_{12}y_{12} + \ \dots + c_{mn}y_{mn}$

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_{ij}$$

4.2 KDP – obecný model

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \leq K y_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_{ij} \geq 0, \text{celé}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

4.2 KDP – obecný model

- Proměnné: x_{ij}, y_{ij}
- Počet proměnných: $m \cdot n + m \cdot n = 2 \cdot m \cdot n$
- Omezení:
  - m pro kapacity dodavatelů
  - n pro požadavky odběratelů
  - $m \cdot n$ pro přepravované množství v kontejnerech
- Počet omezení: $m + n + m \cdot n$

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 3 (kap. 3, 3.1 a 3.2)

KONEC