4EK311 – Operační výzkum

4. Distribuční úlohy LP – část 2

4.1 Dopravní problém – obecný model

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

4.2 KDP – obecný model

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \le K y_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_{ij} \ge 0, \text{celé}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

4.3 Obecný distribuční problém (ObDP)

- Je velmi podobný DP především svým MM
- Ekonomické modely se liší:
  - v DP jde o rozdělení (distribuci) zdrojů, které se nijak nemění, pouze se převážejí
  - v ObDP jde o rozdělení (distribuci) činností, jejichž realizací vznikají nové výrobky
- Cílem je takové rozdělení činností, které minimalizuje náklady

4.3 Příklad - zadání

- Firma Kniha se zabývá tiskem knih.
- Ke své činnosti používá dva tiskařské stroje.
- Každý stroj může pracovat 100 hodin.
- Tiskne dva typy knih (knihy pro děti a romány pro dospělé).
- Dle smlouvy musí tiskárna vytisknout 1500 kusů knih pro děti a 1500 kusů románů pro dospělé.
- Cílem je zajistit tisk požadovaného množství knih s minimálními náklady.

4.3 Obecný distribuční problém (ObDP)

- Je dán:
  - počet výrobních zařízení m (index $i = 1, 2, \dots, m$)
  - počet různých druhů výrobků n (index $j = 1, 2, \dots, n$)
  - kapacity výrobních zařízení a_i
  - požadovaná množství jednotlivých výrobků b_j
  - výkonnostní koeficienty udávající výkonnost i-tého zařízení při výrobě j-tého druhu výrobku k_{ij}
  - „cena“ (jednotkové náklady) za výrobu j-tého druhu výrobku na i-tém zařízení c_{ij}
- Na rozdíl od dopravního problému jsou kapacity a požadavky zadány v různých jednotkách

4.3 ObDP – koeficienty modelu

- Výkonnostní (k_{ij}) a cenové (c_{ij}) koeficienty mohou být dány dvěma způsoby (podle toho se pak také volí proměnná):
- <u>**Způsob 1**</u>
  - k_{ij} - produktivita práce i–tého zařízení při výrobě j–tého druhu výrobku
    - Např. kolik výrobků vyrobí stroj za časovou jednotku [ks/hod]
  - c_{ij} - „cena“ za časovou jednotku práce i–tého zařízení při výrobě výrobku j–tého druhu
    - Např. kolik stojí hodina práce daného stroje [Kč/hod]
  - x_{ij} - proměnné udávají počet časových jednotek, po které i–tý stroj vyrábí j–tý výrobek
    - Např. jak dlouho bude daný stroj vyrábět daný výrobek [hod]

4.3 Příklad - koeficienty modelu

- Výkonnostní koeficienty (k_{ij})

[ks/hod]	*Dětská*	*Román*
Stroj 1	20	5
Stroj 2	10	20

- Cenové koeficienty (c_{ij})

[Kč/hod]	*Dětská*	*Román*
Stroj 1	10	40
Stroj 2	20	50

- Proměnné (x_{ij}) – počet hodin, po které i–tý stroj vyrábí j–tou knihu [hod]

4.3 Příklad – řádková omezení modelu

- Výkonnostní koeficienty (k_{ij})

	Dětská	*Román*	*Kapacity*
Stroj 1	20 ks/hod	5 ks/hod	100 hod
Stroj 2	10 ks/hod	20 ks/hod	100 hod
Požadavky	1500	1500	

- Proměnné (x_{ij}) – počet hodin, po které i−tý stroj vyrábí j−tou knihu [hod]
- Omezení pro Stroj 1:

$$x_{11} + x_{12} \leq 100\ [hod]$$

- Omezení pro Stroj 2:

$$x_{21} + x_{22} \leq 100\ [hod]$$

4.3 ObDP – řádková omezení

- Proměnné x_{ij} udávají počet časových jednotek, po které $i-$tý stroj vyrábí $j-$tý výrobek
- **Řádková omezení** se formulují stejně jako v DP:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

- Na levé straně omezení je skutečné čerpání kapacity zdroje
- Na pravé straně je celková kapacita zdroje
- Jednotky vlevo i vpravo jsou stejné (např. hodiny), přepočet není třeba

4.3 Příklad – sloupcová omezení modelu

- Výkonnostní koeficienty (k_{ij})

	Dětská	*Román*	*Kapacity*
Stroj 1	20 ks/hod	5 ks/hod	100 hod
Stroj 2	10 ks/hod	20 ks/hod	100 hod
Požadavky	1500	1500	

- Proměnné (x_{ij}) – počet hodin, po které i–tý stroj vyrábí j–tou knihu [hod]
- Omezení pro Dětské knihy:

$$20x_{11} + 10x_{21} = 1500\ [ks]$$

- Omezení pro Romány pro dospělé:

$$5x_{12} + 20x_{22} = 1500\ [ks]$$

4.3 ObDP – sloupcová omezení

- **Sloupcová omezení** zabezpečují splnění požadavků:

$$\sum_{i=1}^{m} k_{ij} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\boldsymbol{\frac{ks}{hod} \cdot hod = ks}$$

kde k_{ij} je **koeficient výkonnosti**

- Proměnné x_{ij} jsou v tomto modelu vyjádřeny v časových jednotkách
- Pravá strana sloupcového omezení b_j vyjadřuje požadavek na množství výrobku, tj. množství např. v kusech, kg apod.
- Koeficient výkonnosti umožní přepočet na shodné jednotky

4.3 ObDP – účelová funkce

- Účelovou funkci většinou **minimalizujeme** stejně jako u DP:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\boldsymbol{K\check{c}} = \frac{\boldsymbol{K\check{c}}}{\boldsymbol{hod}} \cdot \boldsymbol{hod}$$

- Na rozdíl od DP není možno určit před výpočtem, zda je problém vyrovnaný nebo ne
- Vlastní omezení proto na rozdíl od DP neformulujeme všechna jako rovnice, ale podle EM volíme buď v řádkových nebo sloupcových omezeních nerovnice

4.3 ObDP – obecný model

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} k_{ij} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

4.3 ObDP – optimální řešení

- $x_{11} = 75$ $\rightarrow$ Stroj 1 bude 75 hodin tisknout dětské knihy
- $x_{22} = 75$ $\rightarrow$ Stroj 2 bude 75 hodin tisknout romány
- $x_{12} = x_{21} = 0$ $\rightarrow$ Stroj 1 nebude tisknout žádné romány a stroj 2 žádné dětské knihy
- $x_3 = x_4 = 25$ $\rightarrow$ Na každém stroji zbude 25 volných hodin
- $y_1 = y_2 = 0$ $\rightarrow$ Vytiskne se přesně 1500 knih každého druhu

$$75\,[hod] \cdot 20 \left[\frac{ks}{hod}\right] = 1500\,[ks]$$

- $z = 4500$ $\rightarrow$ Minimální náklady činí 4500 Kč

$$10 \left[\frac{Kč}{hod}\right] \cdot 75\,[hod] + 50 \left[\frac{Kč}{hod}\right] \cdot 75\,[hod] = 4500\,[Kč]$$

4.3 ObDP – koeficienty modelu 2

- Výkonnostní (k_{ij}) a cenové (c_{ij}) koeficienty mohou být dány dvěma způsoby (podle toho se pak také volí proměnná):
- **Způsob 2**
  - k_{ij} - spotřeba kapacity zdroje na jednu jednotku výrobku $j-$tého druhu vyrobeného na $i-$tém zařízení
    - Např. jak dlouho trvá trvá výroba jednoho výrobku na daném stroji [hod/ks])
  - c_{ij} - „cena“ za jednotku výrobku $j-$tého druhu vyrobeného na $i-$tém zařízení
    - Např. kolik stojí jeden výrobek [Kč/ks]
  - x_{ij} - počet jednotek $j-$tého výrobku vyrobených $i-$tým zařízením
    - Např. kolik výrobků vyrobí daný stroj [ks]

4.3 ObDP – obecný model 2

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_{ij} \leq a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

4.4 Přiřazovací problém (PP)

- Jedná se o vzájemně jednoznačné přiřazení dvojice jednotek ze dvou skupin (párování)
- Např. může jít o auta a garáže, stavby a rypadla, pracovníci a pracovní místa apod.
- Toto přiřazení má přinést co nejvyšší efekt
- Můžeme minimalizovat ujetou vzdálenost, náklady, maximalizovat pracovní výkon apod.

4.4 Příklad - zadání

- Nově otevřený obchodní dům testoval ve zkušebním provozu výkonnost pracovních skupin prodavačů na jednotlivých odděleních (v procentech průměrné tržby – viz tabulku)
- Určete, jak rozmístit skupiny pracovníků na jednotlivá oddělení tak, aby celková výkonnost (měřená v % tržby) byla maximální

Tržba [%]	*Potraviny*	*Porcelán*	*Textil*
Pracovní skupina č. 1	101	97	91
Pracovní skupina č. 2	87	96	99
Pracovní skupina č. 3	98	110	102

4.4 Přiřazovací problém (PP)

- Předpokládáme, že obě skupiny mají stejný počet prvků
- Pokud nemají, lze jednu ze skupin doplnit fiktivními jednotkami
- Řeší se speciálními metodami pro bivalentní úlohy nebo heuristickými metodami, které dávají přibližné výsledky (maďarská metoda, metoda větví a mezí)

4.4 Přiřazovací problém (PP)

- Jsou dány:
  - Jednotky první skupiny (n) … $A_i, i = 1, 2, \dots, n$
  - Jednotky druhé skupiny (n) … $B_j, j = 1, 2, \dots, n$
  - Cenové koeficienty c_{ij} určující „cenu“ přiřazení každé dvojice jednotek A_i a B_j
  - Proměnné x_{ij} určující, zda $i-$tá jednotka z první skupiny bude přiřazena $j-$té jednotce ze skupiny druhé $(A_i$ k $B_j)$
  - Proměnné x_{ij} jsou bivalentní, mohou nabývat pouze dvou hodnot – nula (0) nebo jedna (1)

4.4 Příklad – matematický model

maximalizovat

$$z = 101x_{11} + 97x_{12} + \cdots + 102x_{33}$$

za podmínek:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

c_{ij}	O1	O2	O3
P1	101	97	91
P2	87	96	99
P3	98	110	102

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

x_{ij}	O1	O2	O3
P1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
P2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
P3	x_{31}	x_{32}	x_{33}

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1,2,3, j = 1,2,3$$

4.4 PP – formulace MM

- Hodnoty proměnných x_{ij} jsou omezeny jednoznačným přiřazením jednotek první skupiny jednotkám druhé skupiny a naopak
- Počet těchto omezení je tedy $n + n = 2n$
  - n pro jednotky první skupiny A_i (řádková omezení)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

  - n pro jednotky druhé skupiny B_j (sloupcová omezení)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

4.4 PP – formulace MM

- Podmínky nezápornosti a bivalence:
  - Podmínky nezápornosti jsou díky bivalenci splněny automaticky

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud je } A_i \text{ přiřazeno k } B_j, \\ 0, & \text{pokud není } A_i \text{ přiřazeno k } B_j, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

- Účelová funkce:

maximalizovat (min) $\quad z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{nn}x_{nn}$

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

4.4 PP – obecný model

Maximalizovat (minimalizovat)

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

4.4 Příklad – přípustné řešení

c_{ij}	O1	O2	O3
P1	101	97	91
P2	87	96	99
P3	98	110	102

B_j

A_i | c_{ij} / x_{ij}

	O_1	O_2	O_3	a_i
P_1	101 1	97	91	1
P_2	87	96	99 1	1
P_3	98	110 1	102	1
b_j	1	1	1	

4.4 Příklad – optimální řešení

- Řešení v předchozí tabulce je nejen přípustné, ale i optimální.
- První pracovní skupina (P1) bude umístěna v oddělení potravin (O1)
- Druhá skupina (P2) v oddělení textilu (O3)
- Třetí (P3) v oddělení porcelánu (O2)

4.5 Okružní dopravní problém (OkDP)

- Historický název tohoto typu úlohy LP je „problém obchodního cestujícího“(anglicky Travelling Salesman Problem – TSP):
  - obchodní cestující má vyjít z místa M1
  - obejít stanovený počet míst tak, aby do každého jednou vešel a jednou z něj vyšel
  - cestu musí absolvovat najednou
  - celková délka cesty musí být minimální
- Na rozdíl od DP nejde o určení přepravovaných množství, ale o stanovení dopravní cesty

4.5 Okružní dopravní problém (OkDP)

- Je dán:
  - Počet míst … n
  - Výchozí místo cesty … M_1
  - Ostatní místa … $M_2, M_3, \dots, M_n$
  - „Cenové koeficienty“ c_{ij} určující vzdálenost mezi místy M_i a M_j
- Proměnné x_{ij} určují, zda z i–tého místa povede přímá cesta do j–tého místa (z M_i se jde přímo do M_j)
- Proměnné x_{ij} jsou bivalentní, mohou nabývat pouze dvou hodnot – nula (0) nebo jedna (1)

4.5 Okružní dopravní problém (OkDP)

- Podmínky nezápornosti a bivalence:
  - Podmínky nezápornosti jsou díky bivalenci splněny automaticky

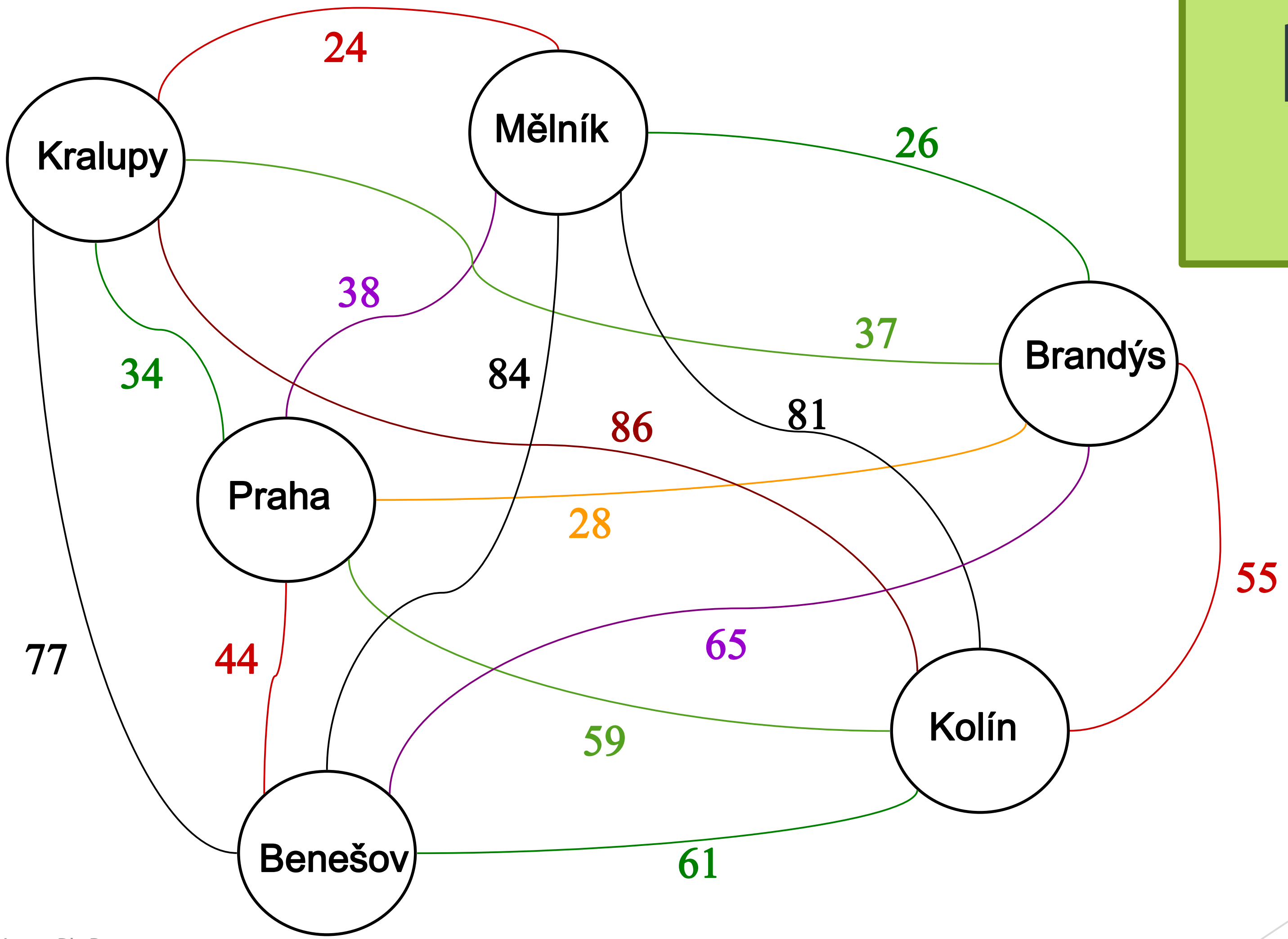
$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pokud z } M_i \text{ vede cesta přímo do } M_j, \\ 0, & \text{pokud z } M_i \text{ nevede cesta přímo do } M_j, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

- Úkolem je najít nejkratší cestu, která vychází z M_1, zahrnuje všechna ostatní místa a vrací se do M_1 v jediném okruhu
- Cesta se tedy nesmí skládat ze dvou nebo více samostatných okruhů

4.5 Příklad - zadání

Problém bankovního lupiče



4.5 Okružní dopravní problém (OkDP)

- Jedná se v celé své podstatě o přiřazovací problém
- Z každého města M_i je potřeba odjet (řádková omezení)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

- Do každého města M_j je třeba vjet (sloupcová omezení)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

$\boldsymbol{x_{ij}}$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
M_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
M_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}
M_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}
M_4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	x_{46}
M_5	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}	x_{56}
M_6	x_{61}	x_{62}	x_{63}	x_{64}	x_{65}	x_{66}

4.5 OkDP – okruhy v řešení

- $M_1 \to M_5 \to M_3 \to M_4 \to M_2 \to M_6 \to M_1$
- Řešení v tabulce obsahuje jediný okruh
- Je tedy přípustné

x_{ij}	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
M_1					1	
M_2						1
M_3				1		
M_4		1				
M_5			1			
M_6	1					

4.5 OkDP – okruhy v řešení

- $M_1 \rightarrow M_3 \rightarrow M_2 \rightarrow M_4 \rightarrow M_1$
- $M_5 \rightarrow M_6 \rightarrow M_5$
- Řešení v tabulce obsahuje dva dílčí okruhy
- Není tedy přípustné

x_{ij}	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
M_1			1			
M_2				1		
M_3		1				
M_4	1					
M_5						1
M_6					1	

4.5 OkDP – okruhy v řešení

- (Anti)smyčkové podmínky:
  - zamezují vytvoření většího množství okruhů
  - $\delta_i - \delta_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1,$
  - $i = 1, 2, \dots, n,$
  - $j = 2, 3, \dots, n$

4.5 Příklad – okruhy

x_{ij}	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
M_1			1			
M_2				1		
M_3		1				
M_4	1					
M_5						1
M_6					1	

- $\delta_i - \delta_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1$
- $\delta_1 - \delta_3 + 6 \cdot x_{13} \leq 5$
- $\delta_2 - \delta_4 + 6 \cdot x_{24} \leq 5$
- $\delta_3 - \delta_2 + 6 \cdot x_{32} \leq 5$
- $\delta_5 - \delta_6 + 6 \cdot x_{56} \leq 5 \quad \rightarrow \cancel{\delta_5} - \cancel{\delta_6} + 6 \cdot 1 \leq 5$
- $\delta_6 - \delta_5 + 6 \cdot x_{65} \leq 5 \quad \rightarrow \cancel{\delta_6} - \cancel{\delta_5} + 6 \cdot 1 \leq 5$

$$12 \leq 10$$

4.5 OkDP – obecný model

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha_i - \alpha_j + n \cdot x_{ij} \le n - 1, \qquad i = 1, 2, \dots, n, j = 2, 3, \dots, n$$

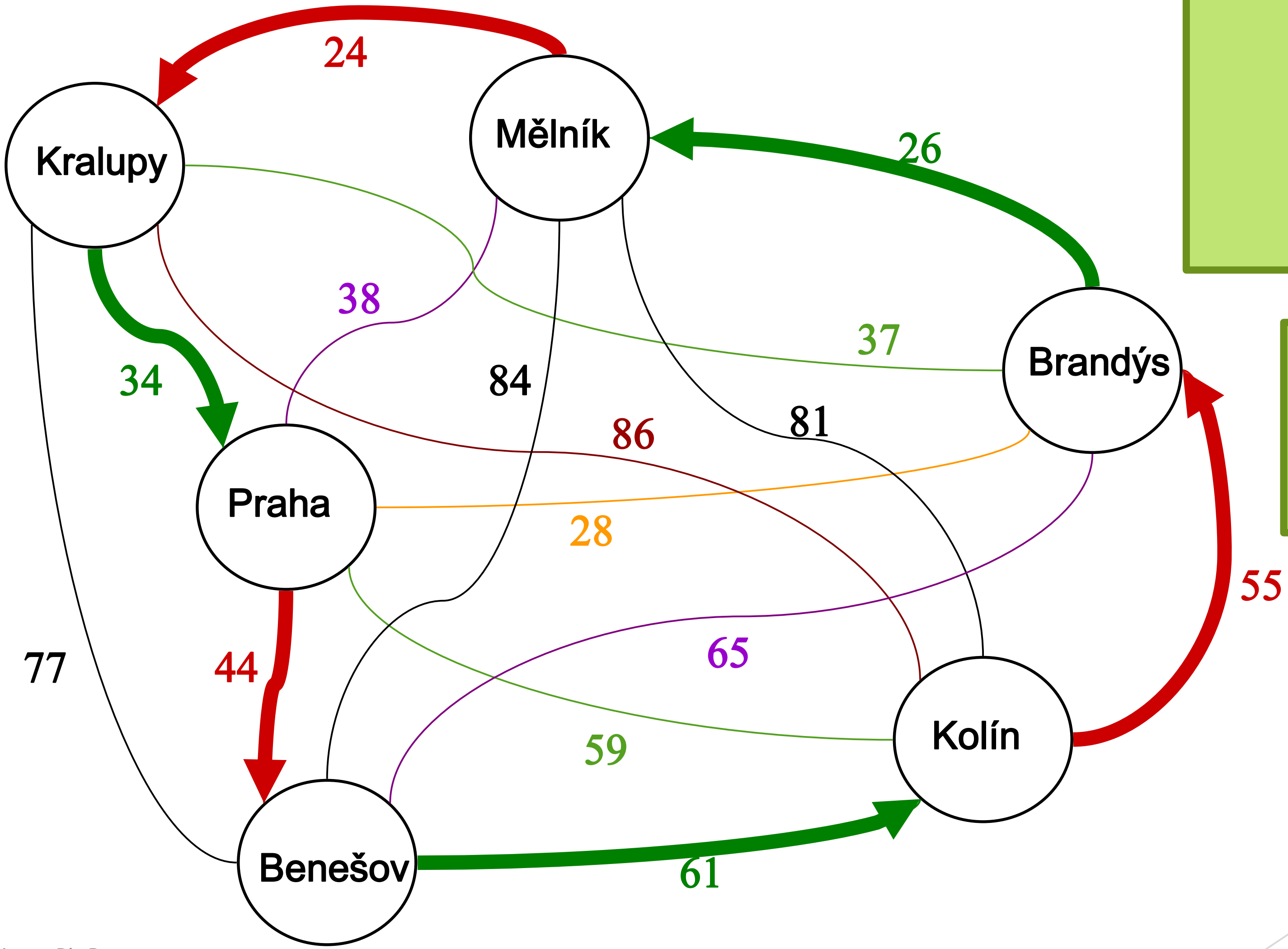
$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

4.5 OkDP – řešení modelu

- Vzhledem k tomu, že proměnné modelu jsou bivalentní, není vhodné použít simplexovou metodu
- Problém obchodního cestujícího řešíme jednou z variant metody větví a mezí
- Je také možné využít k jeho řešení metod známých z teorie grafů a sítí
  - Města, která mají být navštívena, jsou uzly grafu
  - Cesty mezi nimi jsou hrany grafu

4.5 Příklad - řešení

Problém bankovního lupiče



z = 244

	Kr	Mě	Pr	Br	Be	Ko	δ_i
Kralupy	0	0	1	0	0	0	0
Mělník	1	0	0	0	0	0	5
Praha	0	0	0	0	1	0	1
Brandýs	0	1	0	0	0	0	4
Benešov	0	0	0	0	0	1	2
Kolín	0	0	0	1	0	0	3

4.6 Úloha o pokrytí (ÚoP)

- Jde o jednu z variant přiřazovacího problému
- Je třeba rozhodnout o umístění K obslužných stanic (hasičská stanice, první pomoc atd.)
- Území působnosti těchto stanic je rozděleno do n obvodů ($n > K$)
- Každý obvod je obsluhován jednou stanicí
- Je třeba určit, do kterých obvodů bude umístěna určitá obslužná stanice
- Současně je třeba určit území působnosti této stanice

4.6 Příklad - zadání

- Ve dvou z šesti městských obvodů O1, O2, ..., O6 se má postavit stanice rychlé pomoci a určit, které obvody budou mít zřízené stanice na starosti
- V tabulce je:
  - průměrný čas, který potřebuje stanice zřízená v obvodě O_i pro příjezd k pacientovi v obvodě O_j (v minutách)
  - průměrná frekvence zásahů rychlé pomoci v jednotlivých obvodech
- Cílem je navrhnout, kde zřídit stanice a které obvody jim přiřadit tak, aby celková průměrná doba obsluhy byla minimální

4.6 Příklad - zadání

Obvody	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
O_1	4	12	14	17	11	9
O_2	20	7	10	19	24	16
O_3	21	13	5	8	11	15
O_4	9	12	14	3	8	18
O_5	17	25	13	10	6	16
O_6	13	8	9	15	10	5
Četnosti	30	50	42	36	24	28

Obvody	Stanice
O_1	y_1
O_2	y_2
O_3	y_3
O_4	y_4
O_5	y_5
O_6	y_6
Celkem	2

4.6 Úloha o pokrytí (ÚoP)

- Je dán:
  - n … počet obvodů (míst)
  - $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ … obvody území
  - K … počet obslužných stanic ($K < n$)
  - c_{ij} … „cenové koeficienty“ určující průměrnou dobu potřebnou k „obsloužení“ obvodu O_j obslužnou stanicí z obvodu O_i (např. doba dojezdu), $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$
  - f_j … průměrné frekvence služeb potřebných v obvodě $O_j, j = 1, 2, \dots, n$

4.6 Úloha o pokrytí (ÚoP) - proměnné

- V úloze se vyskytují dva typy bivalentních proměnných:

$$y_i \in \{0,1\}$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

Obvody	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
O_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
O_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}
O_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}
O_4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	x_{45}	x_{46}
O_5	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}	x_{56}
O_6	x_{61}	x_{62}	x_{63}	x_{64}	x_{65}	x_{66}

Obvody	*Stanice*
O_1	y_1
O_2	y_2
O_3	y_3
O_4	y_4
O_5	y_5
O_6	y_6
Celkem	2

- y_i … udává, zda v obvodě O_i bude či nebude vystavěna stanice
- x_{ij} … udává, zda stanice v obvodě O_i bude či nebude obsluhovat obvod O_j

4.6 ÚoP – formulace MM

- Sloupcová omezení:
  - Hodnoty proměnných y_i jsou omezeny celkovým počtem stanic, které je třeba postavit (jedno omezení):

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = K$$

  - Každý obvod musí být někým obsluhován (n sloupcových omezení)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

4.6 ÚoP – formulace MM

- Řádková omezení:
  - Pokud v obvodě O_i není vybudována stanice ($y_i = 0$), nemůže obvod nikoho obsluhovat.
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0$$
  - Pokud v obvodě O_i je vybudována stanice ($y_i = 1$), může obsluhovat maximálně n obvodů.
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq n, i = 1, 2, \dots, n$$
  - Obě omezení lze zapsat jednou podmínkou:
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq n y_i, i = 1, 2, \dots, n$$

4.6 ÚoP – formulace MM

- Zpřísnění: každá vybudovaná stanice musí obsluhovat alespoň jeden obvod.
  - Vybudujeme-li K stanic (a každá musí obsloužit alespoň jeden obvod), zbývá přiřadit zbylých $n-K$ obvodů.
  - Každá stanice tedy může obsluhovat těchto $n-K$ obvodů a ten původní jeden, tj. maximálně $n-K+1$ obvod

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq (n-K+1)y_i, i = 1, 2, \dots, n$$

4.6 ÚoP – formulace MM

- Účelová funkce:
  - minimalizovat celkovou průměrnou dobu „obsluhy“ na území:
  - Doba jedné obsluhy obvodu O_j stanicí z obvodu O_i je $c_{ij}x_{ij}$
  - Frekvence f_j udává, kolikrát k této obsluze průměrně dojde
  - Celková doba obsluhy obvodu O_j stanicí z obvodu O_i je tedy $c_{ij}x_{ij}f_j$
  - Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} f_j$$

Obvody	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
O_1	4	12	14	17	11	9
O_2	20	7	10	19	24	16
O_3	21	13	5	8	11	15
O_4	9	12	14	3	8	18
O_5	17	25	13	10	6	16
O_6	13	8	9	15	10	5
Četnosti	30	50	42	36	24	28

4.6 ÚoP – obecný model

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} f_j$$

za podmínek:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq (n - K + 1) y_i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = K,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n$$

4.6 Příklad - řešení

Obvody	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5	o_6
o_1	0	0	0	0	0	0
o_2	0	0	0	0	0	0
o_3	0	0	0	0	0	0
o_4	1	0	0	1	1	0
o_5	0	0	0	0	0	0
o_6	0	1	1	0	0	1

Obvody	*Stanice*
o_1	0
o_2	0
o_3	0
o_4	1
o_5	0
o_6	1

4.6 Příklad – optimální řešení

- Řešení v předchozí tabulce je nejen přípustné, ale i optimální.
- Jedna stanice rychlé pomoci bude umístěna v obvodu O_4
  - Bude obsluhovat obvody O_1, O_4, O_5
- Druhá stanice rychlé pomoci bude umístěna v obvodu O_6
  - bude obsluhovat obvody O_2, O_3, O_6
- Plánované zásahy budou trvat přibližně 1488 minut
- Průměrná doba zásahu je odtud 7,09 minut

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 3 (kap. 3, 3.1 a 3.2)

KONEC