4EK311 – Operační výzkum

5. Teorie grafů

5. Teorie grafů – definice grafu

- Graf G = uspořádaná dvojice (V, E), kde
  - V označuje množinu n uzlů $u_1, u_2, \dots, u_n$ $(u_i, i = 1, 2, \dots, n)$ a
  - E označuje množinu hran h_{ij}, kde h_{ij} je hrana mezi uzlem u_i a u_j

- Příklad:
  - G – Distribuční síť (V – centra, E – spojnice mezi centry)
  - G – Silniční síť (V – křižovatky, E – silnice)
  - G – Říční, kanalizační síť (V – soutoky, E – řeky)

5. Teorie grafů - hrana

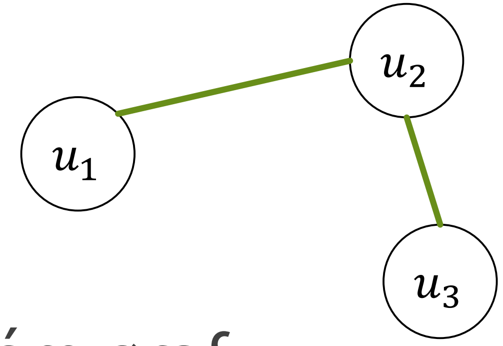
- **Neorientovaná hrana** h_{ij} = pohyb, průtok hranou je povolen oběma směry

  - Neorientovaný graf = obsahuje pouze neorientované hrany
- **Orientovaná hrana** h_{ij} = pohyb, průtok hranou je povolen jen v jednom směru

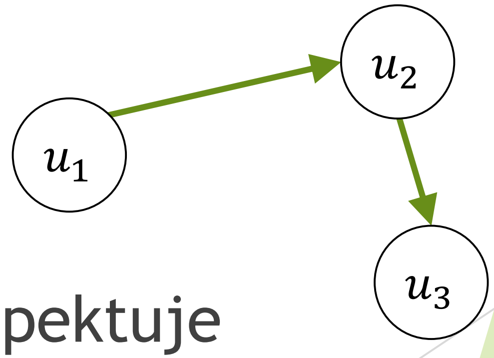
  - Orientovaný graf = obsahuje alespoň jednu orientovanou hranu

5. Teorie grafů - cesta

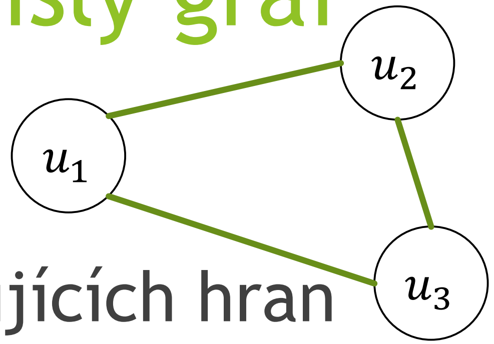
- **Cesta** z uzlu u_i do uzlu u_j = posloupnost hran
  - Hrany na sebe navzájem navazují
  - Posloupnost začíná v uzlu u_i
  - Posloupnost končí v uzlu u_j



- **Orientovaná cesta** = cesta v orientovaném grafu, která respektuje povolenou orientaci
- **Neorientovaná cesta**
  - = cesta v neorientovaném grafu nebo
  - = cesta v orientovaném grafu, která nerespektuje povolenou orientaci

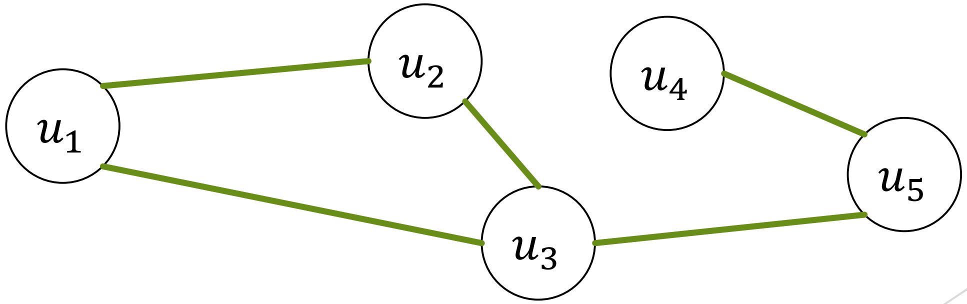


5. Teorie grafů – cyklus, souvislý graf



- **Cyklus** = speciální případ cesty
  - Posloupnost na sebe navzájem navazujících hran
  - Posloupnost začíná v uzlu u_i
  - Posloupnost končí ve stejném uzlu u_i, kde začala

- **Souvislý graf** = graf, ve kterém mezi každou dvojicí uzlů existuje nějaká neorientovaná cesta



5. Teorie grafů – ohodnocení

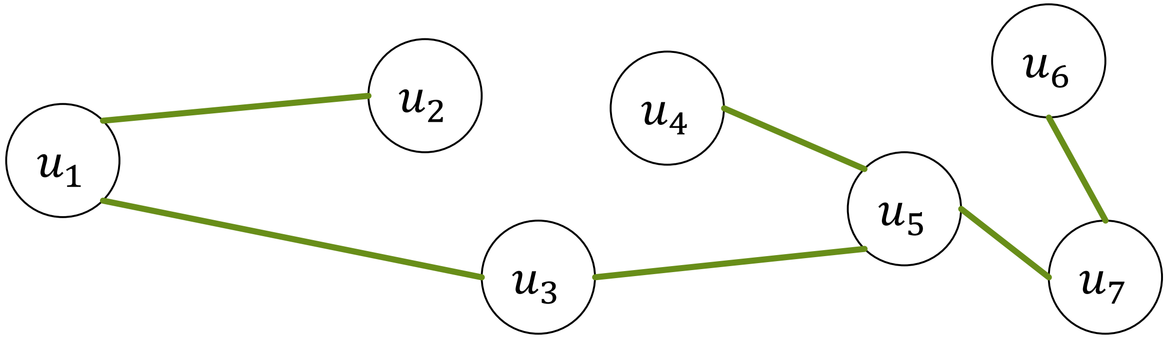
- Hrana h_{ij} je grafickým zobrazením pro spojení uzlů
  - Např. silnice, řeka, kanalizace, el. vedení apod.
  - Činnost (řízení projektů)

- Hranu můžeme ohodnotit
  - Např. délka, průtok, doba trvání, náklady, apod.
- Takovou charakteristiku nazveme ohodnocení hrany
- Hranově ohodnocený graf = graf, ve kterém jsou všechny hrany ohodnoceny

- Podobně můžeme ohodnotit uzly
- Uzlově ohodnocený graf = graf, ve kterém jsou všechny uzly ohodnoceny

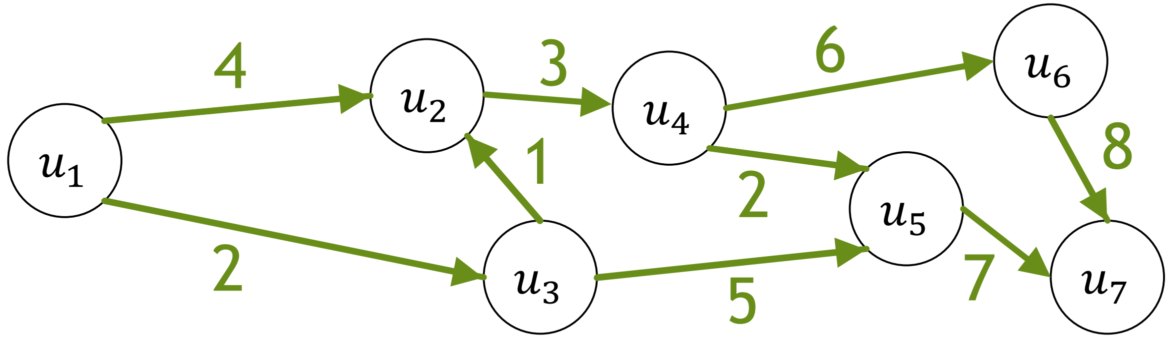
5. Teorie grafů – strom

- Strom = souvislý, neorientovaný graf, který neobsahuje žádný cyklus
  - Obsahuje n uzlů
  - Obsahuje $n - 1$ hran
  - Mezi každými dvěma uzly existuje právě jedna cesta

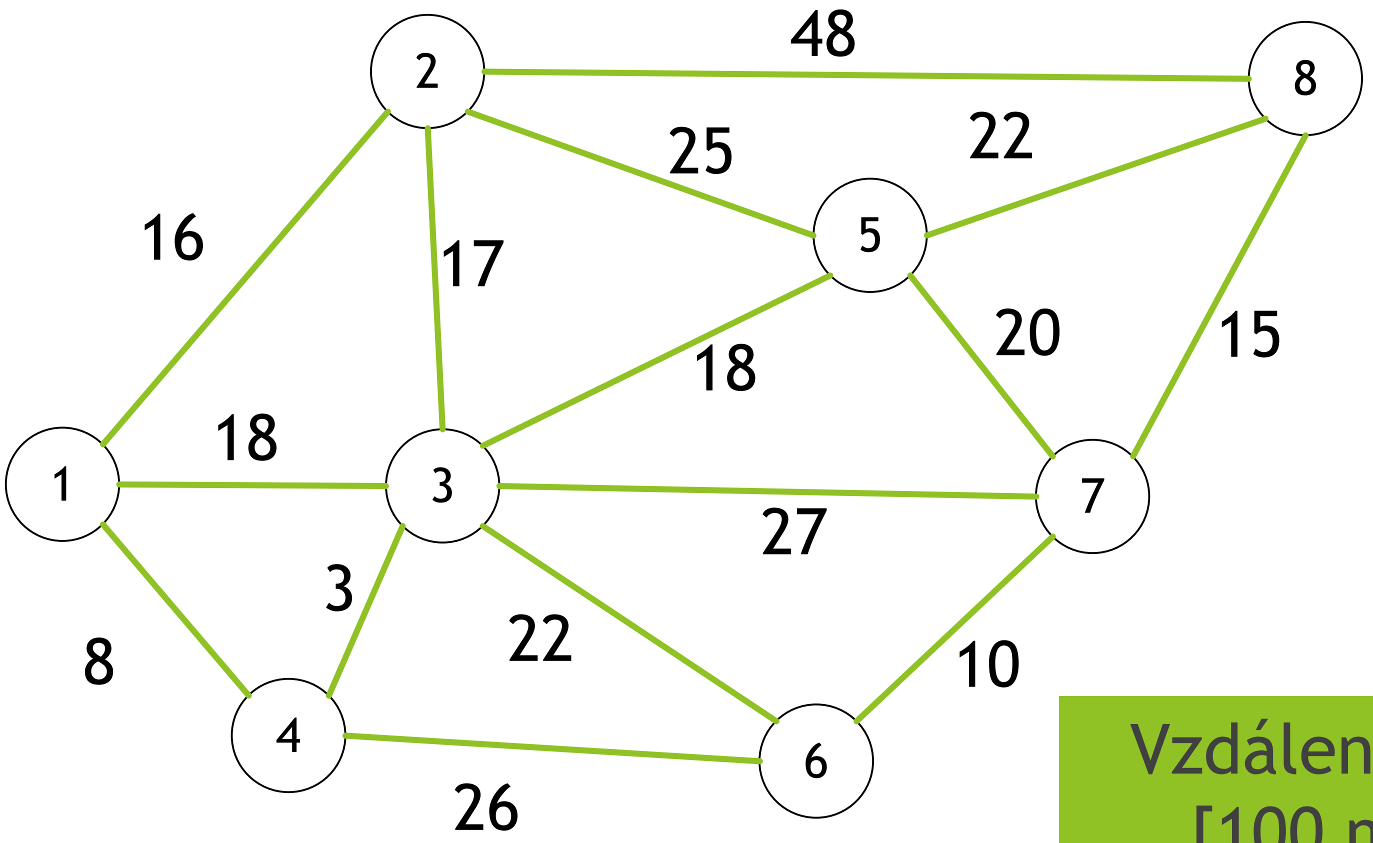


5. Teorie grafů – síť (síťový graf)

- Síť = souvislý, orientovaný a nezáporně (hranově či uzlově) ohodnocený graf, který obsahuje dva speciální uzly (vstup a výstup)
  - Vstup = uzel, ze kterého hrany pouze vystupují
  - Výstup = uzel, do kterého hrany pouze vstupují



5.1 Nejkratší cesta



Vzdálenosti
[100 m]

5.1 Nejkratší cesta [100 m]

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i								
$j\ (y_{ij})$	2 (16)	~~1 (16)~~	~~1 (18)~~	~~1 (8)~~	~~2 (25)~~	~~3 (22)~~	~~3 (27)~~	~~2 (48)~~
	~~3 (18)~~	~~3 (17)~~	~~2 (17)~~	3 (3)	~~3 (18)~~	~~4 (26)~~	~~5 (20)~~	~~5 (22)~~
	4 (8)	~~5 (25)~~	~~4 (3)~~	~~6 (26)~~	~~7 (20)~~	~~7 (10)~~	~~6 (10)~~	~~7 (15)~~
		~~8 (48)~~	5 (18)		8 (22)		~~8 (15)~~	
			6 (22)					
			7 (27)					

Nejkratší cesta z u_1 do u_8	5100 m = 5,1 km

5.1 Algoritmus nejkratší cesty

- Hledáme nejkratší cestu mezi výchozím uzlem (např. u_1) a uzlem u_n
- Počítáme hodnoty t_i pro každý uzel u_i označující délku nejkratší cesty z uzlu u_1:

1. Hodnotu výchozího uzlu položíme nulovou, $t_1 = 0$
2. Spočítáme hodnoty $t_i + y_{ij}$ (délku cesty z uzlu u_i

   do uzlu u_j), kde
   - i jsou indexy uzlů, pro které je t_i již známé,
   - j jsou indexy uzlů, pro které ještě t_j neznáme, a z uzlu u_i vede do uzlu u_j hrana h_{ij} s ohodnocením y_{ij}

5.1 Algoritmus nejkratší cesty

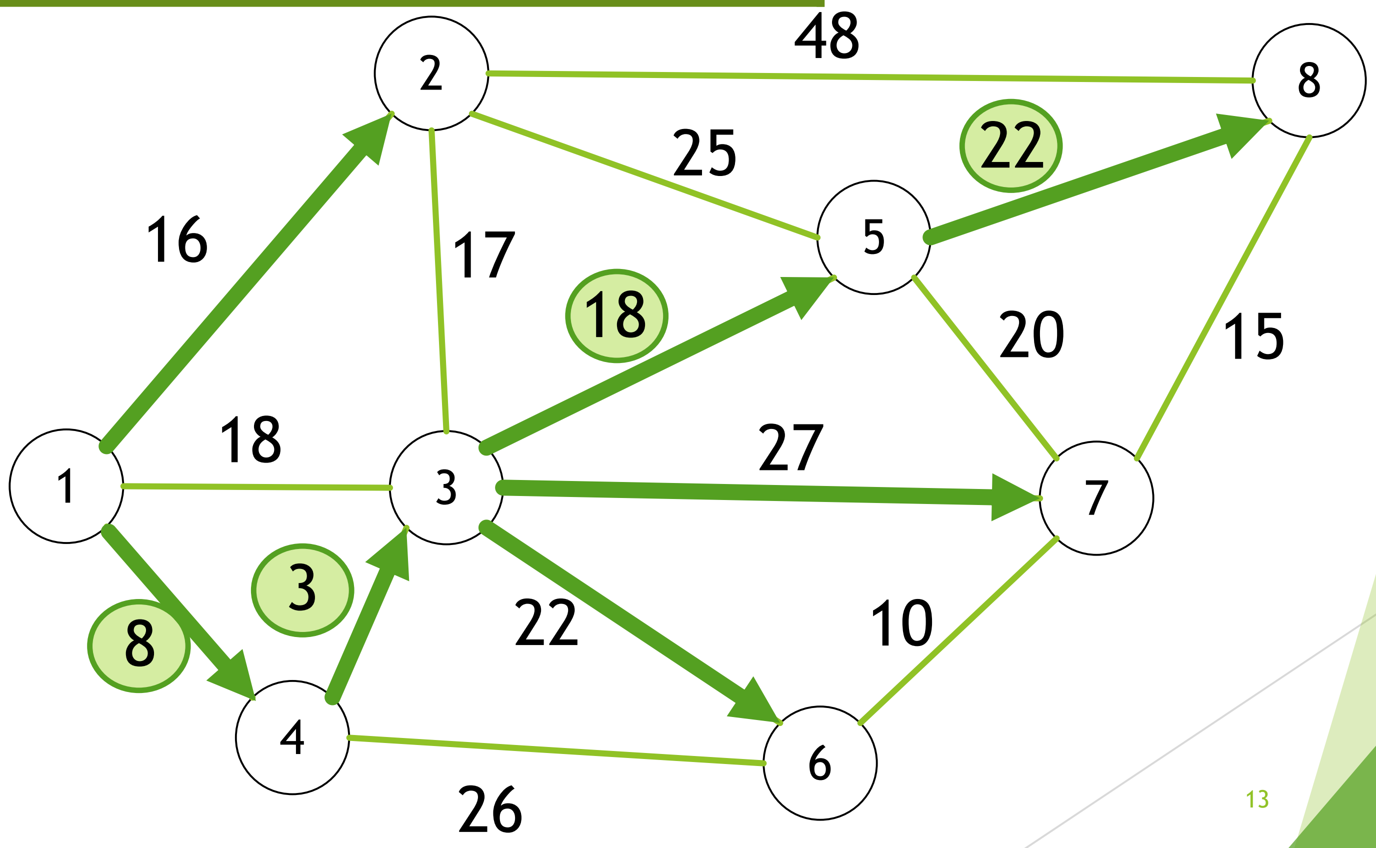
2. Spočítáme hodnoty $t_i + y_{ij}$
3. Vybereme minimum, tedy $t_k = \min_{ij} t_i + y_{ij}$

   kde $k = j$ a ij je argument minima (tedy u_j je uzel do kterého vede hrana, pro níž jsme našli toto minimum)
4. Doplníme vypočtenou hodnotu t_k a bod 2 a 3 opakujeme, dokud nenajdeme t_n, případně všechna t_i.
5. Hodnoty t_i představují délku nejkratší cesty z u_1 do u_i, nejkratší cesta je tvořena hranami, pro které platí

$$y_{ij} = t_j - t_i$$

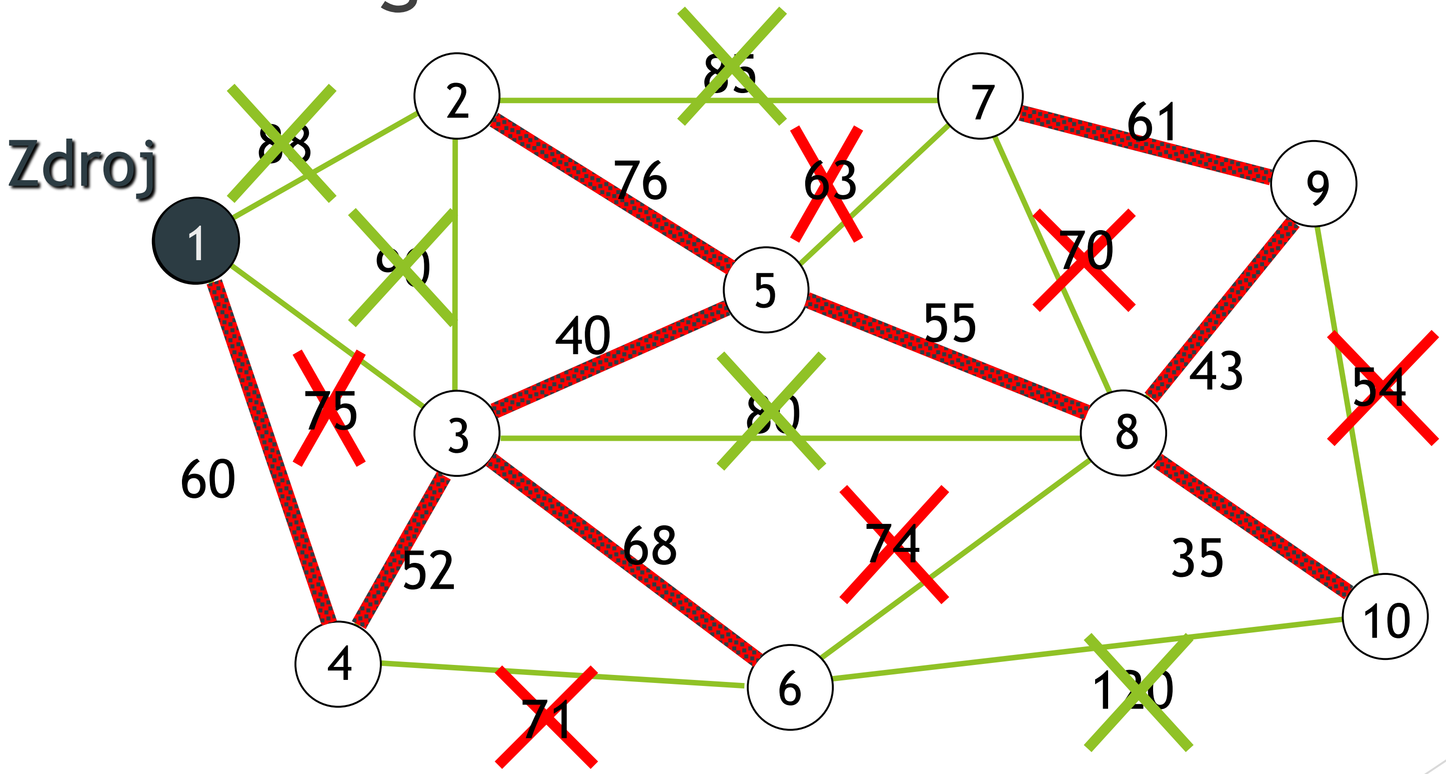
i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	0	16	11	8	29	33	38	51
$j\ (y_{ij})$	2 (16)		5 (18)	3 (3)	8 (22)			
	4 (8)		6 (22)					
			7 (27)					

Nejkratší cesta	5,1 km



5.2 Optimální spojení míst

- Minimální kostra grafu



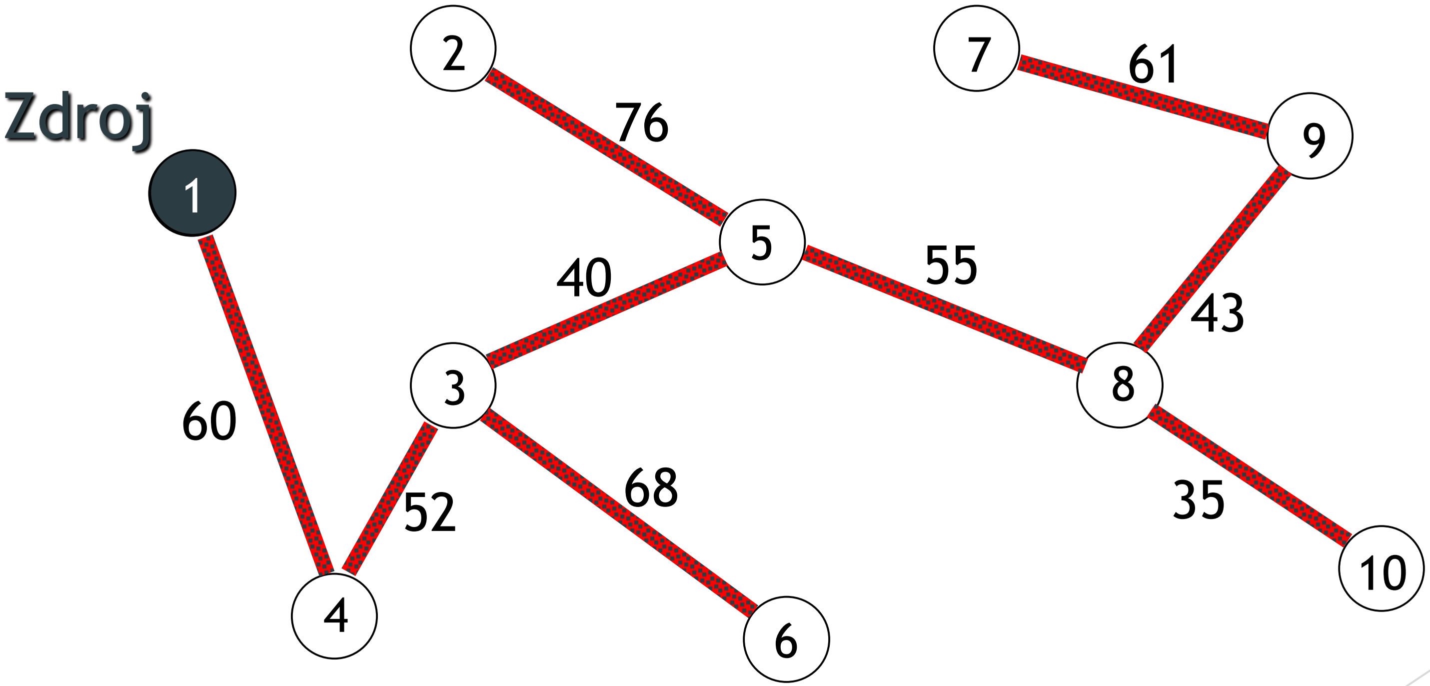
5.2 Algoritmus minimální kostry

- Hledáme minimální kostru, čili podstrom, obsahující všech n uzlů a takových $n-1$ hran, které mají nejmenší ohodnocení

1. Vybereme dvě hrany s nejnižším ohodnocením a dáme do kostry
2. Vyberme ze zbylých hran tu, která má nejmenší ohodnocení a netvoří s ostatními vybranými cyklus
   - Pokud tvoří cyklus, zahodíme ji
   - Pokud cyklus netvoří, přidáme ji do kostry
3. Krok 2 opakujeme, dokud není vybráno $n-1$ hran, které tvoří minimální kostru grafu

5.2 Optimální spojení míst

- Minimální kostra grafu



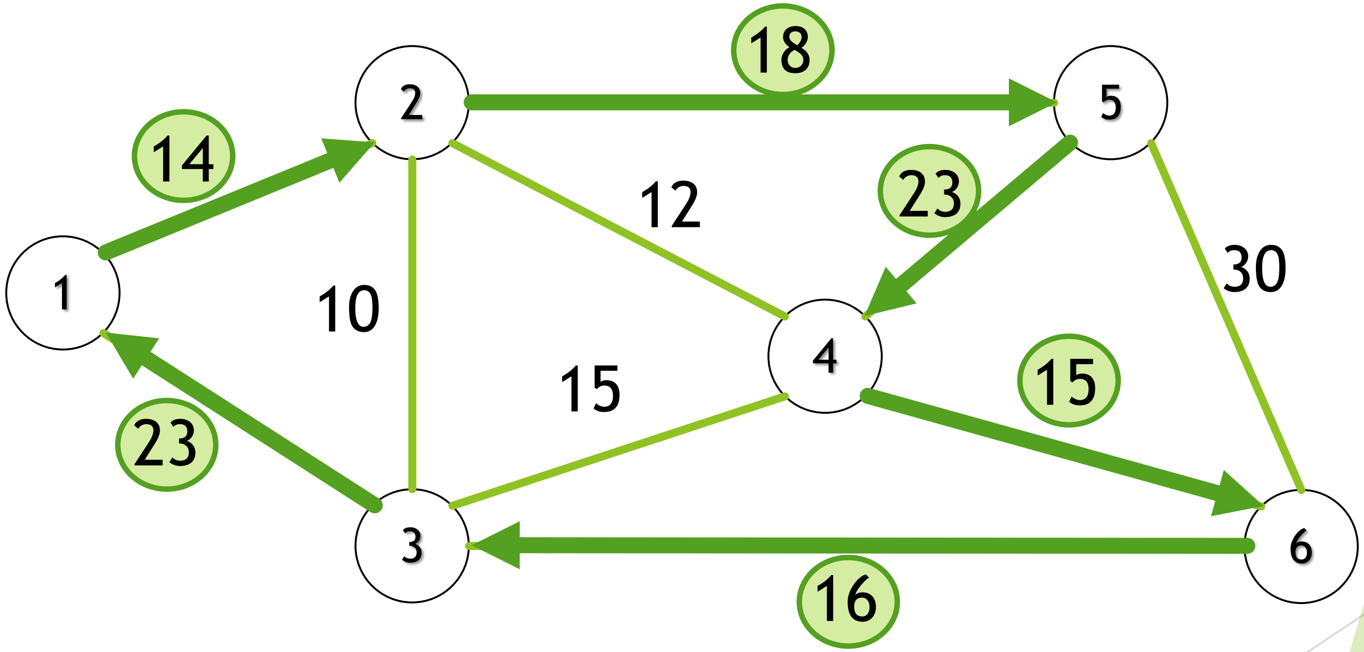
Minimální kostra	490 m

5.3 Maximální tok

- Předpokládejme, že máme jezero, ze kterého chceme napustit nádrž.
- K dispozici je severní a jižní kanál.
- Graf zobrazuje příslušná řečiště a hodnoty udávají maximální hodinový průtok v m^3.
- Jaký je maximální hodinový průtok severním kanálem?
- Jaký je maximální hodinový průtok jižním kanálem?
- Který kanál je vhodné provozovat pro napouštění nádrže?

5.4 Nejkratší okruh

- Úloha obchodního cestujícího, okružní dopravní problém



Nejkratší okruh	109 km

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 5

KONEC