4EK311 – Operační výzkum

7. Modely řízení zásob

7. Charakter poptávky

Poptávka

Deterministická → Deterministické modely zásob

Stochastická → Stochastické modely zásob

7.4 Stochastický model se spojitou poptávkou

- Předpoklady:
  - **Stochastická** poptávka Q – známé pravděpodobnostní rozdělení
  - Pořizovací lhůta dodávky d je známá a konstantní
  - Čerpání zásob ze skladu **odpovídá aktuální poptávce**
  - Velikost všech objednávek (dodávek) q je konstantní
  - Bez rabatů – nákupní cena c_n nezávisí na velikosti objednávky q
  - K doplňování skladu dochází v jednom časovém okamžiku
  - ~~K doplňování skladu dochází přesně v okamžiku, kdy je vyčerpán (žádný nedostatek)~~

7.4 Stochastický model se spojitou poptávkou

- Objednávka je vystavena v okamžiku, kdy je množství zásob na skladě rovno bodu znovuobjednávky, tedy r
- Pořizovací lhůta je d a během této lhůty je skutečná poptávka po zboží rovna Q_d
- Během zásobovacího cyklu (vzhledem k náhodnosti poptávky) mohou nastat dvě možné situace:
  - 1. $Q_d < r$
  - 2. $Q_d > r$

7.4 Stochastický model se spojitou poptávkou

- 1. $Q_d < r$
  - Poptávka během pořizovací lhůty Q_d bude nižší než bod znovuobjednávky r
  - Nová dodávka přijde na sklad v okamžiku, kdy tam je ještě zboží
  - Přebytek zásob na skladě
  - Cyklus I na obrázku

7.4 Stochastický model se spojitou poptávkou

- 2. $Q_d > r$
  - Poptávka během pořizovací lhůty Q_d bude vyšší než bod znovuobjednávky r
  - Nová dodávka přijde na sklad v okamžiku, kdy již byly zásoby vyčerpány a došlo k neuspokojení požadavků
  - Nedostatek zásob na skladě
  - Cyklus II na obrázku

7.4 Stochastický model se spojitou poptávkou

- Poptávka Q je popsána
  - Typem rozdělení (rovnoměrné, normální, apod.)
  - Svou střední hodnotou μ_Q
  - Svou směrodatnou odchylkou σ_Q (nebo rozptylem σ_Q^2)
- Poptávka během pořizovací lhůty Q_d má pak
  - Střední hodnotu $\mu_d = d \cdot \mu_Q$
  - Směrodatnou odchylku $\sigma_d = d \cdot \sigma_Q$

7.4 Stochastický model se spojitou poptávkou

- Pro výpočty použijeme vztahy z EOQ modelu (kde $Q = \mu_Q$)

- $N = c_s \cdot \frac{q}{2} + c_d \cdot \frac{\mu_Q}{q}$
- $N_s^* = N_d^* = \sqrt{\frac{\mu_Q \cdot c_s \cdot c_d}{2}}$
- $N^* = \sqrt{2 \cdot \mu_Q \cdot c_s \cdot c_d}$

- $q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_Q \cdot c_d}{c_s}}$
- $t_d^* = \frac{q^*}{\mu_Q}$
- $r^* = d \cdot \mu_Q = \mu_d$

7.4 Stochastický model se spojitou poptávkou

Předpoklad:

- Poptávka během pořizovací lhůty Q_d má (normální) rozdělení
  - Se střední hodnotou $\mu_d = d \cdot \mu_Q$
  - Se směrodatnou odchylkou $\sigma_d = d \cdot \sigma_Q$

- Vystavíme-li objednávku v okamžiku, který odpovídá bodu znovuobjednávky $r^* = \mu_d$
  - S pravděpodobností 50 % dojde k přebytku zásob a
  - S pravděpodobností 50 % dojde k nedostatku zásob

7.4 Stochastický model se spojitou poptávkou

- Úroveň obsluhy γ = pravděpodobnost, že v rámci jednoho cyklu nedojde k neuspokojení požadavků
  - pravděpodobnost, že nedojde k nedostatku zásob

- Pro $r = r^*$ je $\gamma = 0{,}5$.
- Pro zvýšení γ je třeba vystavit objednávku dříve:
  - v okamžiku, kdy je na skladě více zásob,
  - tedy $r > r^*$,
  - označme tento bod znovuobjednávky r_γ

7.4 Stochastický model se spojitou poptávkou

- Úroveň obsluhy γ = pravděpodobnost, že v rámci jednoho cyklu nedojde k neuspokojení požadavků
- Bod znovuobjednávky pro úroveň obsluhy γ:

$$r_\gamma = r^* + w$$

- kde w představuje pojistnou zásobu
  - = dodatečná zásoba, která umožňuje pokrýt převis poptávky v průběhu pořizovací lhůty
  - Vyšší pojistná zásoba však zvyšuje skladovací náklady N_s
  - Střední hodnota celkových nákladů

$$\mu_N = \sqrt{2 \cdot \mu_Q \cdot c_s \cdot c_d} + c_s \cdot w$$

Skladovací náklady pojistné zásoby

7.4 Stochastický model se spojitou poptávkou

- Hledáme w takové, že
$$P(Q_d \leq r^* + w) \geq \gamma$$
  - Poptávka během pořizovací lhůty nepřesáhne stav zásob (nedojde k nedostatku)
- Dle předpokladu má $Q_d \sim N(\mu_d, \sigma_d^2) = N(r^*, \sigma_d^2)$
- Transformovaná veličina (hodnoty tabelovány)
$$z = \frac{Q_d - r^*}{\sigma_d} \sim N(0,1)$$
- Odtud $Q_d = r^* + z_\gamma \cdot \sigma_d$
- A tedy $w \geq z_\gamma \cdot \sigma_d$

7.4 Spojitá poptávka – Příklad

- $Q \sim N(2\,500; 400)$ ks/měsíc
- $c_s = 40$ Kč/ks
- $c_d = 2\,000$ Kč/dodávku
- $d = \frac{1}{10} = 0{,}1$ měsíce
- $\mu_Q = 2\,500$
- $\sigma_Q = 20$
- $\mu_d = d \cdot \mu_Q = 250$
- $\sigma_d = d \cdot \sigma_Q = 2$

$\boxed{q^* = 500}$

- $q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_Q \cdot c_d}{c_s}}$

$\boxed{N_s^* = 10\,000}$

- $N_s^* = \sqrt{\frac{\mu_Q \cdot c_d \cdot c_s}{2}}$

$\boxed{N_s^* = 10\,000}$

- $N_d^* = \sqrt{\frac{\mu_Q \cdot c_d \cdot c_s}{2}}$

$\boxed{N^* = 20\,000}$

- $N^* = \sqrt{2 \cdot \mu_Q \cdot c_d \cdot c_s}$

$\boxed{t_d^* = 1 / 5}$

- $t_d^* = \frac{q^*}{\mu_Q}$

$\boxed{r^* = 250}$

- $r^* = d \cdot \mu_Q = \mu_d$

7.4 Spojitá poptávka – Příklad

- Objednáme tedy $q^* = 500$ ks v okamžiku, kdy je na skladě posledních $r^* = 250$ ks
- Jaká bude úroveň obsluhy? $\boxed{\gamma = 0{,}5}$
- Jaká je ekonomická interpretace této hodnoty?
- Co musíme udělat, aby se úroveň obsluhy zvedla na 90 %?

$$w \geq z_{0,9} \cdot \sigma_d$$

- $w \geq z_{0,9} \cdot \sigma_d = 1{,}282 \cdot 2 = 2{,}564$
- A tedy $r = r^* + w \geq 250 + 2{,}564 = 252{,}564$
- Objednávku vystavíme v okamžiku, kdy je na skladě 253 ks zboží.

$$\boxed{q^* = 500}$$

$$\boxed{r^* = 250}$$

$$\boxed{w \geq z_\gamma \cdot \sigma_d}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\mu_d = 250 \\ \sigma_d = 2\end{gathered}}$$

7.4 Spojitá poptávka – Příklad

- Co se změní, pokud chceme úroveň obsluhy zvedla na 95 %?

$$w \geq z_{0,95} \cdot \sigma_d$$

- $w \geq z_{0,95} \cdot \sigma_d = 1{,}645 \cdot 2 = 3{,}290$
- A tedy $r = r^* + w \geq 250 + 3{,}290 = 253{,}290$
- Co se změní, pokud chceme úroveň obsluhy zvedla na 99 %?
- $w \geq z_{0,99} \cdot \sigma_d = 2{,}326 \cdot 2 = 4{,}652$
- A tedy $r = r^* + w \geq 250 + 4{,}652 = 254{,}652$

7.4 Spojitá poptávka – Příklad

$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{r^*}$	$\mathbf{min}\ \boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{N_s}$	$\boldsymbol{N_d}$	$\boldsymbol{N_w}$
0,5	250	0	0	250	10 000	10 000	**0**
0,9	250	2,564	3	253	10 000	10 000	**120**
0,95	250	3,290	4	254	10 000	10 000	**160**
0,99	250	4,652	5	255	10 000	10 000	**200**

$$N = N_s + N_d + N_w = c_s \cdot \frac{q}{2} + c_d \cdot \frac{Q}{q} + c_s \cdot w$$

$\mu_Q = 2\,500$ ks

$c_s = 40$ Kč/ks a měsíc

$c_d = 2\,000$ Kč/dodávku

7.5 Stochastický model s jednorázovou zásobou

- Stochastický model
- Předpoklady:
  - Velikost poptávky je náhodná veličina se známým rozdělením
  - Před začátkem období je uskutečněna jediná objednávka a dodávka (zásoby nelze doplňovat)
- Příklad:
  - Sezónní zboží (vánoční stromky, pomlázky apod.)
  - Rychle se kazící zboží (ovoce, zelenina, květiny, …)

7.5 Stochastický model s jednorázovou zásobou

- Tři možné situace:

- 1.) Firma objedná více zboží než prodá

$$q > Q$$

  - Přebytečné zboží $(q - Q)$ firma prodá se slevou za zůstatkovou cenu c_z
  - $ML = \frac{dL}{dq}$ (mezní ztráta, marginal loss)

$$ML = c_n - c_z \text{ (ve skriptech } c_1\text{)}$$

  - Firma utrpí celkovou ztrátu: $L = (c_n - c_z)(q - Q)$

7.5 Stochastický model s jednorázovou zásobou

- Tři možné situace:

- 2.) Firma objedná méně zboží než by prodala

$$q < Q$$

  - Chybějící zboží $(Q - q)$ způsobí firmě ztrátu na ušlém zisku
    - $MPL = -\frac{dPL}{dq}$ (mezní ušlý zisk, marginal profit loss)

$$MPL = c_p - c_n \text{ (ve skriptech } c_2\text{)}$$

    - Firma má celkový ušlý zisk: $PL = (c_p - c_n)(Q - q)$

7.5 Stochastický model s jednorázovou zásobou

- Tři možné situace:

- 3.) Firma objedná právě tolik zboží kolik prodá

$$q = Q$$

  - Nedojde k žádným ztrátám ani ušlému zisku
  - Hypotetický případ
  - Vzhledem k nulovým ztrátám není třeba se tímto případem zabývat

7.5 Stochastický model s jednorázovou zásobou

- Předpokládejme, že
- první případ $q > Q$ nastane s pravděpodobností p
- a druhý případ $q < Q$ s pravděpodobností $(1 - p)$

- Celkové očekávané náklady související s přebytkem a nedostatkem zásob jsou

$$N = pL + (1-p)PL$$
$$= p(c_n - c_z)(q - Q) + (1-p)(c_p - c_n)(Q - q)$$

7.5 Stochastický model s jednorázovou zásobou

- Cílem je stanovit takové q, aby celkové náklady N byly minimální
- Minimalizace (podmínky prvního řádu – derivace):

$$\frac{dN}{dq} = 0$$

$$\frac{dN}{dq} = \frac{d\left(p(c_n - c_z)(q - Q) + (1 - p)(c_p - c_n)(Q - q)\right)}{dq}$$

7.5 Stochastický model s jednorázovou zásobou

$$\frac{dN}{dq} = \frac{d\big(p(c_n - c_z)(q - Q) + (1-p)(c_p - c_n)(Q - q)\ \big)}{dq}$$

$$= \frac{d\big(p(c_n - c_z)q - p(c_n - c_z)Q + (1-p)\big(c_p - c_n\big)Q - (1-p)\big(c_p - c_n\big)q\big)}{dq}$$

$$= p(c_n - c_z) - (1-p)\big(c_p - c_n\big) = pML - (1-p)MPL$$

$$\frac{dN}{dq} = pML - (1-p)MPL = 0$$

$$pML = (1-p)MPL$$

$$pML = MPL - pMPL$$

$$pML + pMPL = MPL$$

$$p(ML + MPL) = MPL$$

$$p = \frac{MPL}{ML + MPL}$$

7.5 Stochastický model s jednorázovou zásobou

- Dokázali jsme (po ověření podmínek druhého řádu), že minimální náklady související s přebytkem a nedostatkem zásob jsou v případě, že

$$p = \frac{MPL}{ML + MPL}$$

- Pravděpodobnost nedostatku zásob nazýváme úroveň obsluhy a tedy $p = \gamma$

$$\gamma = \frac{MPL}{ML + MPL} = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

7.5 Stochastický model s jednorázovou zásobou

$$\gamma = \frac{MPL}{ML + MPL} = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

- Optimální počáteční zásoba q^*:

$$P(q^* \geq Q) \geq \gamma$$

- Postup:
  - Spočítáme optimální úroveň obsluhy γ
  - Najdeme tabulkovou hodnotu pro příslušné rozdělení
  - Dopočítáme q^*(zpětnou transformací tabulkové veličiny)
    - $Q \sim N\left(\mu_Q, \sigma_Q^2\right) \;\rightarrow\; z = \frac{Q-\mu_Q}{\sigma_Q} \sim N(0,1) \;\rightarrow\; q^* = \mu_Q + z_\gamma \cdot \sigma_Q$

7.5 Jednorázová zásoba – Příklad

- Firma v letní sezóně prodá 75 až 225 ks dámských plavek za 930 Kč za kus
- Tyto plavky nakupuje za 670 Kč za kus (tato cena obsahuje i dodatečné jednotkové náklady např. na skladování)
- Pokud plavky v letní sezóně neprodá, vyprodává je v podzimním výprodeji za cenu 550 Kč za kus
- Jaké množství dámských plavek má objednat, aby minimalizovala celkové náklady?
- Předpokládejme, že poptávka po plavkách má normální rozdělení.

$c_p = 930$ Kč/ks

$c_n = 670$ Kč/ks

$c_z = 550$ Kč/ks

$$Q \sim N(150{,}1875) = N(150, 43{,}3^2)$$

7.5 Jednorázová zásoba – Příklad

- $c_p = 930$ Kč/ks
- $c_n = 670$ Kč/ks
- $c_z = 550$ Kč/ks
- $ML = 670 - 550 = 120$ Kč/ks
- $MPL = 930 - 670 = 260$ Kč/ks
- S jakou pravděpodobností dojde k přebytku zásob?
  - $p = \gamma = \frac{260}{120+260} = \frac{260}{380} = \frac{13}{19} \doteq 0{,}6842 = 68{,}42\ \%$

$$\boxed{ML = c_n - c_z}$$

$$\boxed{MPL = c_p - c_n}$$

$$\boxed{p = \frac{MPL}{ML + MPL}}$$

7.5 Jednorázová zásoba – Příklad

- S jakou pravděpodobností dojde k přebytku zásob?
  - $\gamma = \frac{260}{120+260} = \frac{260}{380} = \frac{13}{19} \doteq 0{,}6842 = 68{,}42\ \%$
- $Q \sim N(150, 43{,}3^2)$
- $z = \frac{Q-\mu_Q}{\sigma_Q} \sim N(0{,}1) \;\rightarrow Q = \mu_Q + z_\gamma \cdot \sigma_Q$
- $z_{0{,}6842} = 0{,}479$

$$q^* = 150 + 0{,}479 \cdot 43{,}3 = 150 + 20{,}7407 = 170{,}7407 \doteq 171$$

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 7

KONEC