4EK311 – Operační výzkum

8. Modely hromadné obsluhy

8. Modely hromadné obsluhy

- Systém, ve kterém dochází k realizaci obsluhy příchozích požadavků = systém hromadné obsluhy
- Vědní disciplína zkoumající tyto systémy = teorie hromadné obsluhy
- Požadavky se mohou hromadit a čekat ve frontě na obsluhu … modely front, teorie front

8.1 Základní pojmy

- **Požadavek**
  - = jednotka, která přichází do systému
  - za účelem obsluhy
  - postupně systémem prochází
  - a nakonec systém opustí
  - může jím být: člověk, stroj, událost, informace
- <u>Příklad:</u>
  - Pacient (u lékaře), auto (v servisu či na benzínce), hovor (v telef. ústředně), cestující (na nádraží), tisková úloha (tiskárna), packet (PC)

8.1 Základní pojmy

- **Zdroj požadavků**
  - Může být konečný
    - auta v půjčovně, prasklé žárovky v budově, …
  - Může být nekonečný
    - dopravní nehody, hosté v restauraci, pacienti, …
    - i v těchto případech je počet konečný, ale vzhledem k počtu a faktu, že nepředpokládáme opakovaný vstup požadavku do systému, ho lze považovat za nekonečný

8.1 Základní pojmy

- **Příchod požadavků do systému**
  - 1. Počet požadavků, které přijdou do systému
    - Deterministický (fixní) nebo stochastický
    - Ve většině případů diskrétní (celočíselný)
    - Průměrný počet požadavků, které přijdou do systému za časovou jednotku se nazývá

      Intenzita příchodů (λ)
    - Často $\lambda \sim Po(\lambda)$

8.1 Základní pojmy

- **Příklad: Příchod požadavků do systému**
  - Ke studijní referentce přichází v průměru 5 studentů za hodinu.
  - Jaká je intenzita příchodů?
    - Intenzita příchodů = Průměrný počet požadavků, které přijdou do systému za časovou jednotku
  - $\lambda = 5\ [st/hod]$

8.1 Základní pojmy

- **Příchod požadavků do systému**
  - 2. Interval mezi dvěma po sobě přicházejícími jednotkami
    - Deterministický nebo stochastický
    - Spojitá veličina
    - Často má exponenciální rozdělení $Exp(\lambda)$
    - Průměrná doba mezi příchody dvou po sobě přicházejících požadavků je

$$EV = \frac{1}{\lambda}$$

8.1 Základní pojmy

- Exponenciální rozdělení $Exp(\lambda)$
  - Střední hodnota $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
  - Pravděpodobnost $P(X \leq x) = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

- Pravděpodobnost, že interval mezi příchody nebude delší než t:

$$P(X \leq t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

8.1 Základní pojmy

- **Příklad: Příchod požadavků do systému**
  - Ke studijní referentce přichází v průměru 5 studentů za hodinu.
  - $\lambda = 5\ [st/hod]$
  - Jaká je průměrná doba mezi příchody?
  - $\lambda = \frac{5\ st}{hod} = \frac{5\ st}{60\ min} = \frac{1\ st}{12\ min}$
  - 12 minut = $\frac{1}{5}$ hod.

8.1 Základní pojmy

- **Příklad: Příchod požadavků do systému**
  - Ke studijní referentce přichází v průměru 5 studentů za hodinu.
  - $\lambda = 5\ [st/hod]$
  - Jaká je pravděpodobnost, že následující student přijde do 5 minut (po předchozím)?
  - $P\left(X \leq \frac{1}{12}\right) = F\left(\frac{1}{12}\right) = F(0{,}08\overline{3}) = 1 - e^{-\lambda t} =$

$= 1 - e^{-5 \cdot \frac{1}{12}} = 1 - e^{-\frac{5}{12}} = 1 - e^{-0{,}41\overline{6}} \doteq 1 - 0{,}65924$
$= 0{,}34076 \doteq 34\ \%$

8.1 Základní pojmy

- **Obslužné zařízení (obslužná linka)**
  - = jednotka, která v systému zajišťuje obsluhu
  - Jsou-li všechna obslužná zařízení obsazena
    - další požadavky čekají ve **frontě**
    - dokud se některé zařízení neuvolní
- <u>Příklad:</u>
  - Lékař, mechanik, operátor, pokladna, prodavač

8.1 Základní pojmy

- **Obsluha požadavků v systému**
  - 1. Počet požadavků, které jsou obslouženy systémem
    - Deterministický nebo stochastický
    - Ve většině případů diskrétní (celočíselný)
    - Průměrný počet požadavků, které jsou obslouženy za časovou jednotku se nazývá

      Intenzita obsluhy (μ)
    - Často $\mu \sim Po(\mu)$

8.1 Základní pojmy

- **Příklad: Obsluha požadavků v systému**
  - Studijní referentka vyřídí v průměru 6 studentů za hodinu.
  - Jaká je intenzita obsluhy?
    - Intenzita obsluhy = Průměrný počet požadavků, které jsou obslouženy za časovou jednotku
  - $\mu = 6\ [st/hod]$

8.1 Základní pojmy

- **Obsluha požadavků v systému**
  - 2. Doba obsluhy jedné jednotky
    - Deterministický nebo stochastický
    - Spojitá veličina
    - Často má exponenciální rozdělení $Exp(\mu)$
    - Průměrná doba obsluhy je

$$EV = \frac{1}{\mu}$$

8.1 Základní pojmy

- **Příklad: Obsluha požadavků v systému**
  - Studijní referentka vyřídí v průměru 6 studentů za hodinu.
  - $\mu = 6\ [st/hod]$
  - Jaká je průměrná doba obsluhy?
  - $\mu = \frac{6\ st}{hod} = \frac{6\ st}{60\ min} = \frac{1\ st}{10\ min}$
  - 10 minut = $\frac{1}{6}$ hod.

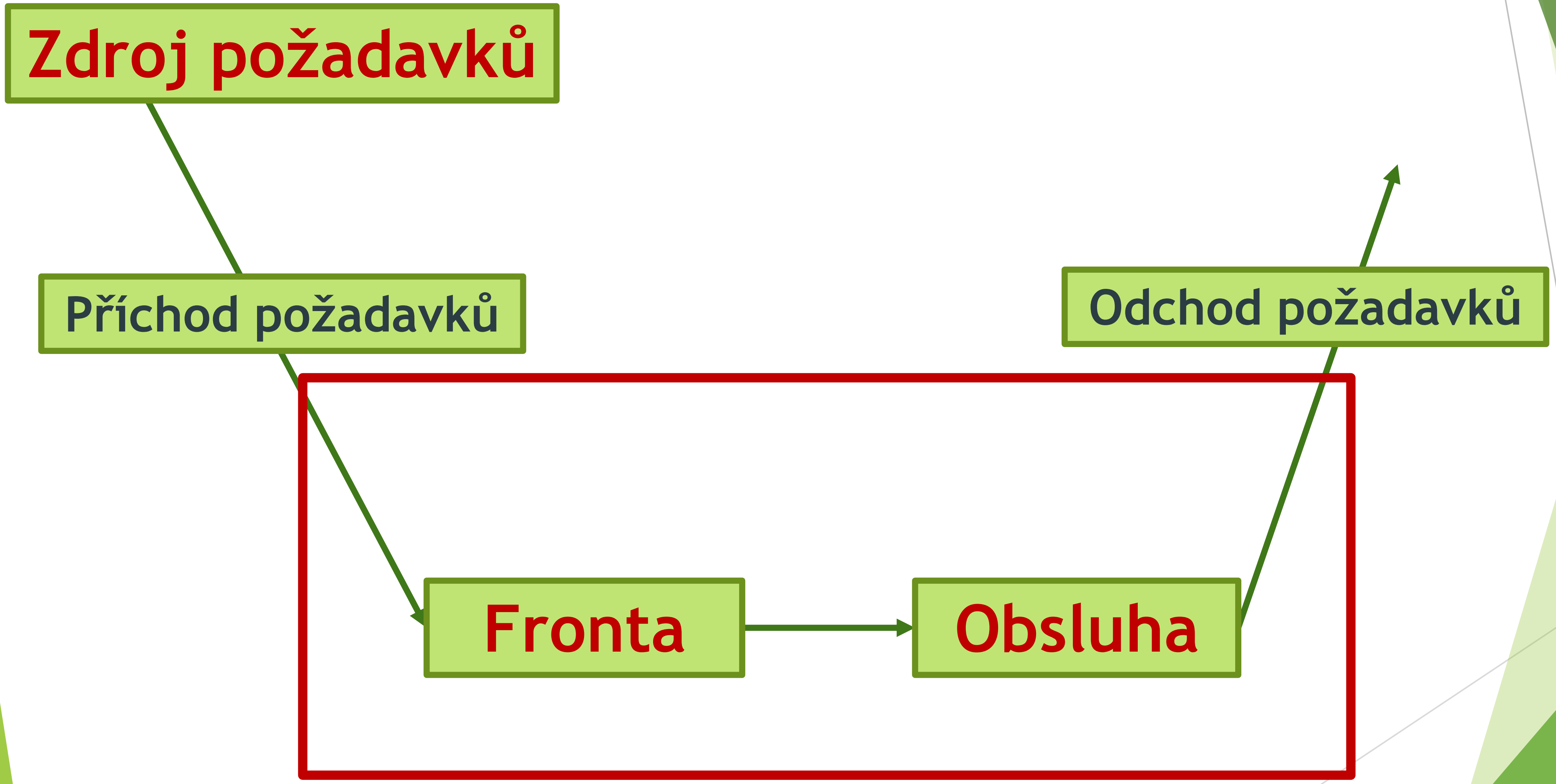
8.1 Základní pojmy

- <u>Příklad:</u>
  - Stanice záchranné služby vysílá sanitky k dopravním nehodám
  - Co jsou v tomto systému požadavky?
    - Dopravní nehody (statické)
  - Co jsou v tomto systému obslužná zařízení?
    - Sanitky (dynamické)
- Ne vždy se tedy fyzicky pohybují požadavky (návštěvy lékaře u pacientů, výměna prasklých žárovek apod.)

8.1 Základní pojmy

Systém hromadné obsluhy	Požadavek	Obslužné zařízení
Lékařská ordinace	Pacient	Lékař
Benzínová stanice	Auto	Čerpací stojan
Obchod	Zákazník	Prodavač (pokladna)
Servis (autoservis)	Zařízení (auto)	Mechanik
Kadeřnictví	Zákazník (host)	Křeslo, sedadlo, kadeřník
Síťová tiskárna	Tisková úloha	Řídicí jednotka
Telefonní ústředna	Hovor	Operátor
Nádraží (letiště)	Cestující	Pokladna (pasová kontrola)

8.1 Základní pojmy – schéma



8.1 Základní pojmy

- **Systém je závislý na**
  - <u>Počtu obslužných zařízení</u>
    - Jedno
    - Více
  - <u>Typu obslužných zařízení</u>
    - Identické obslužné linky
    - Neidentické obslužné linky
  - <u>Uspořádání obslužných zařízení</u>
    - Paralelní
    - Sériové

8.1 Základní pojmy

- **Jednoduchý systém hromadné obsluhy**
  - Jedna obslužná linka
  - Jedna fronta
  - Příklad:
    - bankomat
    - stánek s hotdogy

8.1 Základní pojmy

- **Paralelní systém hromadné obsluhy s jednou frontou**
  - Několik identických obslužných linek
  - Jedna fronta
  - Příklad:
    - pošta (lístky s čísly)
    - zkoušení oblečení v kabinkách

8.1 Základní pojmy

- **Paralelní systém hromadné obsluhy s vlastními frontami**
  - Několik identických obslužných linek
  - Každá linka má vlastní frontu
  - Příklad:
    - pokladny v supermarketech
    - odbavení zavazadel na letišti

8.1 Základní pojmy

- **Paralelní systém hromadné obsluhy s různými obslužnými linkami**
  - Několik neidentických obslužných linek
  - Každá linka má vlastní frontu
  - Příklad:
    - přepážky na poště (listovní, balíkové, peněžní)
    - automaty (nápojové, jídelní)

8.1 Základní pojmy

- **Sériový systém hromadné obsluhy**
  - Několik neidentických obslužných linek
  - Každá linka má vlastní frontu
  - Příklad:
    - montážní linka

8.1 Základní pojmy

- **Kombinovaný systém hromadné obsluhy**
  - Kombinace paralelního a sériového uspořádání linek
  - Složitý systém
  - Příklad:
    - nemocnice
    - letiště

8.1 Základní pojmy – Fronta

- **Fronta**
  - Omezená nebo neomezená kapacita
  - Režim fronty
    - FIFO – First In, First Out – klasická fronta
    - LIFO – Last In, First Out – zásobník (palety, bedny)
    - PRI – Priority – těhotné, objednaní, urgentní případy
    - SIRO – Selection In Random Order – východ z kina, součástky (naházené do bedny)

8.2 Klasifikace modelů hromadné obsluhy

- **Systém hromadné obsluhy**

  A / B / C / D / E / F

- *A*: Typ rozdělení intervalu mezi příchody požadavků do systému
  - *M – exponenciální rozdělení*
  - *U – rovnoměrné rozdělení*
  - *N – normální rozdělení*
  - *D – deterministická hodnota (konstanta)*
  - *G – nespecifikované rozdělení* $(EX, varX)$

8.2 Klasifikace modelů hromadné obsluhy

- **Systém hromadné obsluhy**

  A / B / C / D / E / F

- *B*: Typ rozdělení doby obsluhy
  - *M - exponenciální rozdělení*
  - *U - rovnoměrné rozdělení*
  - *N - normální rozdělení*
  - *D - deterministická hodnota (konstanta)*
  - *G - nespecifikované rozdělení (se EX a $varX$)*

8.2 Klasifikace modelů hromadné obsluhy

- **Systém hromadné obsluhy**

  A / B / C / D / E / F

- *C*: Počet paralelně uspořádaných linek
- *D*: Kapacita systému (fronty) – pro neomezenou „∞“
- *E*: Kapacita zdroje požadavků – pro neomezený zdroj „∞“
- *F*: Režim fronty – FIFO, LIFO, PRI, SIRO

- *D/E/F → ∞/∞/FIFO … používá se pouze kód A/B/C*

8.2 Klasifikace modelů hromadné obsluhy

- **Příklad 1: Lyžařské středisko**
  - V zimním středisku fungují vleky a vyváží lyžaře na svah.
  - Identifikujte model s notací: $M/D/5/4000/\infty/FIFO$
- **Příklad 2: Výrobní dílna**
  - Stroj lisuje součástky a sype je do krabice. Zaměstnanci si z krabice součástky berou a montují je na výrobky.
  - Identifikujte model s notací: $D/N/20/300/\infty/SIRO$

8.3 Analýza modelů hromadné obsluhy

- **Časové charakteristiky**
  - Průměrná doba čekání ve frontě T_f
  - Průměrná doba, kterou stráví požadavek v systému T
- **Charakteristiky počtu požadavků**
  - Průměrná délka fronty N_f
  - Průměrný počet požadavků v systému N

8.3 Analýza modelů hromadné obsluhy

- **Pravděpodobnostní charakteristiky**
  - Pravděpodobnost, že obslužné zařízení nepracuje (v systému není žádný požadavek) či pracuje
  - Pravděpodobnost, že všechna obslužná zařízení pracují (další požadavek bude muset čekat ve frontě)
  - Pravděpodobnost, že v systému (či ve frontě) se nachází přesně n požadavků
  - Pravděpodobnost, že v systému je více než n požadavků
  - Pravděpodobnost, že požadavek bude muset čekat ve frontě déle než t časových jednotek

8.3 Analýza modelů hromadné obsluhy

- **Nákladové charakteristiky**
  - Minimální náklady související s fungováním systému po dobu jedné časové jednotky
  - Optimální počet obslužných linek zajišťující minimální náklady

8.3 Analýza modelů hromadné obsluhy

- **Řešení modelů**
  - Analytické
    - Známe nebo umíme odvodit vzorce
    - Bohužel pouze u nejjednodušších modelů
  - Simulační
    - Pomocí programových produktů
    - Napodobí se chod reálného systému
    - Po sběru dat se spočítají požadované charakteristiky
    - Výhodou: rychlost, lze použít i pro komplikované systémy

8.4 M/M/1 model

- **Systém hromadné obsluhy**

$$M/M/1/\infty/\infty/FIFO$$

- *A*: Intervaly mezi příchody mají exponenciální rozdělení s parametrem λ
- *B*: Doba obsluhy má exponenciální rozdělení s parametrem μ
- *C*: Jedna (paralelní) obslužná linka
- *D*: Neomezená kapacita systému (fronty)
- *E*: Neomezený zdroj požadavků
- *F*: Fronta typu FIFO

8.4 M/M/1 – Příklad

- Banka provozuje v obchodním centru s otvírací dobou 9:00 – 21:00 bankomat.
- Vzhledem ke skutečnosti, že se u bankomatu tvoří nepřiměřeně velké fronty, zákazníci často odchází bez obsloužení.
- Banka tak přichází nejen o klienty, ale také o ušlý zisk z neprovedených operací.
- Zvažuje proto výměnu bankomatu za novější a také rychlejší typ.

8.4 M/M/1 – Příklad

- Na základě pozorování bylo zjištěno, že k bankomatu přijde v průměru 240 zákazníků za den a zákazník u bankomatu stráví v průměru 2,5 minuty.
- **Intenzita příchodů:**

$$\lambda = \frac{240}{\text{den}} = \frac{240}{12\ \text{hod}} = \frac{20}{\text{hod}} = \frac{20}{60\ \text{min}} = \frac{1}{3\ \text{min}}$$

- **Intenzita obsluhy:**

$$\mu = \frac{1}{2{,}5\ \text{min}} = \frac{2}{5\ \text{min}} = \frac{24}{60\ \text{min}} = \frac{24}{\text{hod}} = \frac{288}{12\ \text{hod}} = \frac{288}{\text{den}}$$

8.4 M/M/1 model

- **Intenzita provozu**

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- $\rho \geq 1$, pak $\frac{\lambda}{\mu} \geq 1$ a tedy $\lambda \geq \mu$
  - Za časovou jednotku přijde alespoň tolik požadavků, kolik jich je obslouženo
  - Délka fronty s časem roste nad všechny meze
- $\rho < 1$, pak $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ a tedy $\lambda < \mu$
  - Požadavky jsou v průměru obsluhovány rychleji než přichází
  - Systém je stabilní

Podmínka stabilizace systému:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

8.4 M/M/1 model

- **Intenzita provozu**

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

  - Pravděpodobnost, že obslužná linka je vytížená (pracuje)
  - Pravděpodobnost, že v systému je alespoň jeden požadavek
- *Pro příklad:*

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{240}{288} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} = 0{,}8\overline{3}$$

  - S pravděpodobností 83 % je zákazník u bankomatu

8.4 M/M/1 model

- **Pravděpodobnost, že obslužná linka nepracuje**
  - Pravděpodobnost, že v systému není žádný požadavek

$$P(N=0) = p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

- *Pro příklad:*

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{240}{288} = 1 - \frac{20}{24} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{7}$$

  - S pravděpodobností 17 % nikdo u bankomatu není a zákazník, který přichází, nemusí čekat

8.4 M/M/1 model

- **Pravděpodobnost, že obslužná linka pracuje**

  = pravděpodobnost, že v systému je alespoň jeden požadavek

  - Pravděpodobnost, že v systému není žádný požadavek

    $$P(N=0)=p_0=1-\rho$$

  - Pravděpodobnost, že v systému je alespoň jeden požadavek

    $$P(N\geq 1)=1-P(N=0)=1-(1-\rho)=\rho$$

- *Pro příklad:*

  $$P(N\geq 1)=\rho=\frac{240}{288}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}=0{,}8\overline{3}$$

  - S pravděpodobností 83 % je bankomat obsazen

8.4 M/M/1 model

- **Pravděpodobnost, že v systému je <u>právě</u> n požadavků**
  - Pravděpodobnost, že v systému není žádný požadavek (je právě 0 požadavků)

$$p_0 = P(N = 0) = 1 - \rho$$

  - Pravděpodobnost, že v systému je právě n požadavků

$$p_n = P(N = n) = p_0 \cdot \rho^{\,n} = (1 - \rho) \cdot \rho^{\,n}$$

- *<u>Pro příklad:</u>*

$$p_n = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \text{a např. } p_7 = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0{,}04651$$

  - S pravděpodobností 4,65 % je u bankomatu právě 7 zákazníků

8.4 M/M/1 model

- **Pravděpodobnost, že <u>v systému je právě</u> $\boldsymbol{n}$ požadavků**

$$p_n = P(N = n) = p_0 \cdot \rho^{\,n} = (1 - \rho) \cdot \rho^{\,n}$$

  - Je-li v systému s jednou obslužnou linkou právě n požadavků, kolik jich je ve frontě?

- **Pravděpodobnost, že <u>ve frontě je právě</u> $\boldsymbol{m}$ požadavků**

  = pravděpodobnost, že v systému je právě $\boldsymbol{m+1}$ požadavek

$$P(N = m + 1) = p_{m+1} = p_0 \cdot \rho^{\,m+1} = (1 - \rho) \cdot \rho^{\,m+1}$$

- <u>*Pro příklad: Určete pravděpodobnost, že ve frontě jsou právě 3 zákazníci*</u>

$$p_n = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \text{a tedy } p_4 = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}08038$$

  - S pravděpodobností 8,04 % jsou ve frontě právě 3 zákazníci

8.4 M/M/1 model

- **Pravděpodobnost, že v systému je <u>alespoň</u> n požadavků**
  - Pravděpodobnost, že v systému je alespoň jeden požadavek

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N < 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - (1 - \rho) = \rho$$

  - Pravděpodobnost, že v systému je alespoň n požadavků

$$P(N \geq n) = 1 - P(N < n) =$$
$$= 1 - [P(N = 0) + P(N = 1) + \cdots + P(N = n - 1)] =$$
$$= 1 - P(N = 0) - P(N = 1) - \cdots - P(N = n - 1) =$$
$$= 1 - p_0 - p_1 - \cdots - p_{n-1}$$

8.4 M/M/1 model

- *Pro příklad:*
- *Určete pravděpodobnost, že ve frontě jsou* ***maximálně*** *3 zákazníci*
  - $P(N \leq 4) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4$
  - $P(N \leq 4) = 0{,}59813$
  - S pravděpodobností 59,81 % jsou ve frontě maximálně 3 zákazníci
- *Určete pravděpodobnost, že ve frontě jsou* ***alespoň*** *3 zákazníci*
  - $P(N \geq n) = 1 - p_0 - p_1 - \cdots - p_{n-1}$
  - $P(N \geq 4) = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3$
  - $P(N \geq 4) = 1 - 0{,}51775 = 0{,}48225$
  - S pravděpodobností 48,23 % jsou ve frontě alespoň 3 zákazníci

8.4 M/M/1 model

- **Pravděpodobnost, že v systému je <u>alespoň</u> n požadavků**

$$P(N \geq n) = 1 - p_0 - p_1 - \cdots - p_{n-1}$$
$$= 1 - [p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1}]$$
$$= 1 - [p_0 + p_0 \cdot \rho^1 + p_0 \cdot \rho^2 + \cdots + p_0 \cdot \rho^{n-1}]$$
$$= 1 - p_0 \cdot [1 + \rho^1 + \rho^2 + \cdots + \rho^{n-1}] = 1 - (1-\rho) \cdot \frac{1-\rho^n}{1-\rho}$$
$$= 1 - (1 - \rho^n) = \rho^n$$

- *Určete pravděpodobnost, že ve frontě jsou <u>alespoň</u> 3 zákazníci*
  - $P(N \geq 4) = \rho^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}48225$

$$\boldsymbol{P(N \geq n) = \rho^n}$$

8.4 M/M/1 model

- **Průměrná doba strávená v systému**
  - Doba samotné obsluhy (strávená vlastní obsluhou) a
  - Doba strávená ve frontě

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

- *Pro příklad:*

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{288 - 240} = \frac{1}{48}\ dne = \frac{12}{48} hod = \frac{1}{4} hod = 15\ min$$

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{24 - 20} = \frac{1}{4}\ hod = 15\ min$$

  - Zákazník stráví v systému v průměru 15 minut

8.4 M/M/1 model

- **Průměrná doba strávená ve frontě**
  - Rozdíl mezi dobou strávenou v systému a dobou strávenou obsluhou

$$T_f = T - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu-(\mu-\lambda)}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

- *Pro příklad:*

$$T_f = \frac{1}{48} - \frac{1}{288} = \frac{6-1}{288} = \frac{5}{288} dne = \frac{60}{288} hod = 0{,}208\, hod = 12{,}5\, min$$

$$T_f = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{6-1}{24} = \frac{5}{24}\ hod = 0{,}208\, hod = 12{,}5\, min$$

  - Zákazník stráví ve frontě v průměru 12,5 minuty
  - Logické: 15 minut stráví v systému a 2,5 minuty trvá obsluha

8.4 M/M/1 model

- Průměrná doba strávená v systému T
- **Průměrný počet požadavků v systému** $N = \lambda \cdot T$

- *Pro příklad:*

$$T = \frac{1}{48}\ dne \rightarrow N = \lambda \cdot T = 240 \cdot \frac{1}{48} = 5$$

$$T = \frac{1}{4}\ hod \rightarrow N = \lambda \cdot T = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5$$

  - V systému je v průměru 5 zákazníků

8.4 M/M/1 model

- Průměrná doba strávená ve frontě T_f
- **Průměrný počet požadavků ve frontě** $N_f = \lambda \cdot T_f$

- *Pro příklad:*

$$T_f = \frac{5}{288}\ dne \rightarrow N_f = \lambda \cdot T_f = 240 \cdot \frac{5}{288} = 4{,}1\overline{6}$$

$$T_f = \frac{5}{24}\ hod \rightarrow N_f = \lambda \cdot T_f = 20 \cdot \frac{5}{24} = 4{,}1\overline{6}$$

  - Ve frontě je v průměru 4,17 zákazníků

8.4 M/M/1 model

- Průměrný počet požadavků v systému

$$N = \lambda \cdot T$$

- Průměrný počet požadavků ve frontě

$$N_f = \lambda \cdot T_f$$

Detaily k přednášce: skripta, kapitola 8

KONEC