Parametrické programování

Příklad 1 – Parametrické pravé strany

Zadání:
Firma vyrábí tři výrobky. K jejich výrobě potřebuje jednak surovinu a jednak stroje, na kterých dochází ke zpracování. Na první výrobek jsou třeba 2 kg suroviny, na druhý 3 kg a na třetí jen 1 kg. Jakýkoliv výrobek je nutno zpracovávat na stroji 1 hodinu. Každý měsíc je k dispozici 24 tun suroviny a 10 000 hod. strojového času. Při výrobě prvního výrobku má firma zisk 50 Kč, za druhý výrobek získá 60 Kč a za třetí jen 25 Kč. Strategií firmy je maximalizovat zisk.

a) Formulujte matematický model.

B) Určete, kolik je třeba vyrábět prvních, druhých a třetích výrobků, aby zisk firmy byl maximální.

c) Během následujících dvou let (24 měsíců) dojde k významné změně při výrobě. Stroje se začnou při výrobě výrazně opotřebovávat a tak každý měsíc poklesne množství použitelného strojového času o 500 hodin. Navíc se předpokládá zlevnění suroviny a tak kapacita suroviny pro výrobu poroste každý měsíc o 1 tunu. Jak se změní množství vyráběných výrobků?

Řešení:

a) Formulace matematického modelu:

$$\max\ z = 50x_1 + 60x_2 + 25x_3$$

za podmínek:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Pozn. Kapacity suroviny i strojového času budeme uvádět v tisících, abychom nemuseli pracovat s příliš velkými čísly.

b) Optimální řešení:

Běžnou metodou sestavíme výchozí simplexovou tabulku a simplexovým algoritmem vyřešíme tuto optimalizační úlohu.

Nejprve tedy doplníme omezení na rovnosti a anulujeme účelovou funkci:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 10 \\ z - 50x_1 - 60x_2 - 25x_3 &= 0 \ldots \max \end{aligned}$$

Nyní snadno sestavíme výchozí tabulku a vyřešíme úlohu:

zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$t = b_i/\alpha_{ik}$
x_4	2	3	1	1	0	24	8
x_5	1	1	1	0	1	10	10
z_j	−50	−60	−25	0	0	0	
x_2	2/3	1	1/3	1/3	0	8	12
x_5	1/3	0	2/3	−1/3	1	2	6
z_j	−10	0	−5	20	0	480	
x_2	0	1	−1	1	−2	4	
x_1	1	0	2	−1	3	6	
z_j	0	0	15	10	30	540	

Vzhledem k tomu, že v řádku účelové funkce jsou všechny koeficienty nezáporné, nalezli jsme optimální řešení: $\mathbf{x^1} = (6, 4, 0, 0, 0)^T$ s hodnotou účelové funkce 540. Nezapomeňme, že hodnoty jsou v tisících, firma tedy bude vyrábět 6000 ks prvního výrobku a 4000 ks druhého výrobku, třetí výrobek se vyrábět nebude a zisk firmy bude 540 000 Kč.

c) Parametrické pravé strany:

Podívejme se nejprve, co se v modelu změnilo. Kapacita suroviny už nebude každý měsíc 24 000 kg, ale bude postupně každý měsíc růst o 1 000 kg – během prvního měsíce tedy bude k dispozici 25 000 kg, během druhého 26 000 kg atd. Obecně tedy během t-tého období bude mít firma k dispozici $24000 + 1000t$ kg suroviny.

Navíc dochází k opotřebování strojů tak, že každý měsíc kapacita strojového času klesne o 500 hod. – během prvního měsíce bude k dispozici $10000 - 500 = 9500$ hod., druhý měsíc 9000 hod., třetí měsíc 8500. Obecně tedy během t-tého období bude mít firma k dispozici $10000 - 500t$ hod. strojového času.

Převeďme nyní obě pravé strany do tisíců (abychom nepočítali s velkými čísly) a sestavme matematický model:

$$\max z = 50x_1 + 60x_2 + 25x_3$$

za podmínek:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 24 + t \\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10 - \frac{1}{2}t \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\
t &\in < 0, 24 >
\end{aligned}$$

Parametrickou pravou stranu lze obecně napsat ve tvaru $\mathbf{b} = \beta_0 + \beta_1 t$.

Podmínky, stejně jako v předchozí části, doplníme na rovnosti. Dále budeme hledat optimální řešení běžnou simplexovou metodou, jediná změna bude při dosazování pravých stran do výchozí simplexové tabulky. Na místo pravé strany dosadíme hodnotu pravé strany pro t rovno dolní hodnotě intervalu. V našem případě tedy za t dosadíme nulu a vektor pravých stran bude stejný jako v předchozím kroku. Kdyby však $t \in < 2, 8 >$, dosadili bychom za $t = 2$ a vektor pravých stran by pak byl $\mathbf{b} = (26, 9)^T$.

Vzhledem k tomu, že je důležité, jak se mění jednotlivé složky (β_0, β_1) vektoru $\mathbf{b}$, přidáme do výchozí simplexové tabulky ještě dva "pomocné" sloupce β_0 a β_1. Koeficienty v těchto sloupcích jsou dány pravými stranami $\mathbf{b} = \beta_0 + \beta_1 t$.

Výchozí simplexová tabulka tedy bude vypadat následovně:

zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	β_{0i}	β_{1i}
x_4	2	3	1	1	0	24	24	1
x_5	1	1	1	0	1	10	10	$-1/2$
z_j	-50	-60	-25	0	0	0	0	0

Po sestavení výchozí simplexové tabulky již jednoduše najdeme optimální řešení běžnou simplexovou metodou. Oba "pomocné" sloupce upravujeme běžným způsobem.

zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	β_{0i}	β_{1i}	$t = b_i/\alpha_{ik}$
x_4	2	3	1	1	0	24	24	1	8
x_5	1	1	1	0	1	10	10	$-1/2$	10
z_j	-50	-60	-25	0	0	0	0	0	
x_2	$2/3$	1	$1/3$	$1/3$	0	8	8	$1/3$	12
x_5	$1/3$	0	$2/3$	$-1/3$	1	2	2	$-5/6$	6
z_j	-10	0	-5	20	0	480	480	20	
x_2	0	1	-1	1	-2	4	4	2	
x_1	1	0	2	-1	3	6	6	$-5/2$	
z_j	0	0	15	10	30	540	540	-5	

V řádku účelové funkce jsou všechny koeficienty nezáporné, řešení je tedy duálně přípustné. Otázkou ale je, pro které hodnoty parametru t, je nalezené řešení přípustné taky primárně (a tedy optimální). To spočítáme snadno. Víme totiž, že primární přípustnost řešení je dána nezáporností jednotlivých složek vektoru pravých stran. Musí tedy platit, že $\mathbf{b} \geq 0$, což jinými slovy znamená, že $\beta_0 + \beta_1 t \geq 0$ (pro každé omezení, pro každý řádek). V našem případě tedy:

x_1: $6 - \frac{5}{2}t \geq 0 \Rightarrow 6 \geq \frac{5}{2}t \Rightarrow t \leq \frac{12}{5} = 2.4$

x_2: $4 + 2t6 \geq 0 \Rightarrow 2t \geq -4 \Rightarrow t \geq -2$

Dohromady tedy $-2 \leq t \leq 2.4$ neboli $t \in < -2, 2.4 >$. My však řešíme úlohu na intervalu $t \in < 0, 24 >$. Pro nás tedy bude nalezené řešení optimální pro $t \in < 0, 2.4 >$. Nalezené optimální řešení je:

$\mathbf{x^1} = (6 - \frac{5}{2}t, 4 + 2t, 0, 0, 0)^T$ s hodnotou účelové funkce $540 - 5t$.

Pro celé hodnoty $t = 0, 1, 2$ a krajní hodnotu $t = 2.4$ bude řešení tedy vypadat takto:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
$t = 0$	6	4	0	0	0	540
$t = 1$	7/2	6	0	0	0	535
$t = 2$	1	8	0	0	0	530
$t = 2.4$	0	8.8	0	0	0	528

Podívejme se nyní, co by se stalo, kdybychom za t dosadili trojku (ta leží mimo interval: $3 > 2.4$).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
$t = 3$	-3/2	10	0	0	0	525

V tomto případě by bylo třeba vyrábět záporné množství prvního výrobku, což je nepřípustné. Pro $t > 2.4$ je třeba hledat nové optimální (přípustné) řešení.

Postup je jednoduchý. Nejprve ze simplexové tabulky vypustíme sloupec b_i, neboť ho již nebudeme potřebovat. Úlohu řešíme duálně simplexovou metodou, kde za klíčový řádek (vystupující proměnnou) volíme ten, ze kterého jsme určili horní mez parametru (v našem případě $t = 2.4$ byla podmínka pro x_1, a proto x_1 bude vystupující proměnnou).

Klíčový sloupec pak zvolíme podle standardního postupu pro duálně simplexovou metodu (nejvyšší záporná hodnota poměru $\frac{z_j}{\alpha_{ij}}, \alpha ij < 0$). Po prvním kroku získáme další optimální řešení:

zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_{0i}	β_{1i}
x_2	0	1	-1	1	-2	4	2
x_1	1	0	2	-1	3	6	$-5/2$
z_j	0	0	15	10	30	540	-5
x_2	1	1	1	0	1	10	$-1/2$
x_4	-1	0	-2	1	-3	-6	5/2
z_j	10	0	35	0	60	600	-30

Nyní postup opakujeme. Určíme, pro jaké hodnoty parametru t, je řešení přípustné a tedy i optimální:

x_4: $-6 + \frac{5}{2}t \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{2}t \geq 6 \Rightarrow t \geq \frac{12}{5} = 2.4$

x_2: $10 - \frac{1}{2}t \geq 0 \Rightarrow 10 \geq \frac{1}{2}t \Rightarrow t \leq 20$

Dohromady tedy $2.4 \leq t \leq 20$ neboli $t \in < 2.4, 20 >$. Povšimněme si, že dolní mez intervalu je totožná s horní mezí z předchozího kroku (kdyby tomu tak nebylo, nasvědčovalo by to faktu, že jsme někde udělali chybu). Nalezené řešení optimální pro $t \in < 2.4, 20 >$ je $\mathbf{x^2} = (0, 10 - \frac{1}{2}t, 0, -6 + \frac{5}{2}t, 0)^T$ s hodnotou účelové funkce $600 - 30t$.

Pro celé hodnoty $t = 3, 4, 5$ a krajní hodnoty $t = 2.4$ a $t = 20$ bude řešení tedy vypadat takto:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
$t = 2.4$	0	44/5	0	0	0	528
$t = 3$	0	17/2	0	3/2	0	510
$t = 4$	0	8	0	4	0	480
$t = 5$	0	15/2	0	13/2	0	450
$t = 20$	0	0	0	44	0	0

Povšimněme si, že hodnota účelové funkce pro $t = 2.4$ je stejná jako v předchozím případě – pamatujme si, že pro hraniční body je hodnota účelové funkce v případě obou optimálních bodů stejná.

Podívejme se opět, co by se stalo, kdybychom za t dosadili dvojku či 21 (obě leží mimo interval).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
$t=2$	0	9	0	-1	0	520
$t=21$	0	-1/2	0	93/2	0	-30

V obou případech by byla porušena přípustnost, v druhém by dokonce byl záporný zisk.

Hledáme řešení v intervalu $t \in< 0, 24 >$. Je tedy třeba hledat další optimální řešení. Postupujeme duálně simplexovou metodou, klíčový řádek je první (vystupující proměnnou je x_2, neboť odtud jsme dostali horní mez intervalu). Všechny koeficienty klíčového řádku jsou nezáporné, úloha tedy pro $t > 20$ nemá primárně přípustné řešení a tedy ani řešení optimální. Dosazením do zadání pro $t > 20$ získáme totiž zápornou pravou stranu druhého omezení – stroje jsou již zcela opotřebovány, k dispozici není žádný strojový čas a není možno nic dělat.

Příklad 2 – Parametrické pravé strany s nepřípustným výchozím řešením

Zadání:
Uvažujme úlohu lineárního programování s parametrickými pravými stranami:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

za podmínek:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 10 + 2t \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 + t \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nalezněte optimální řešení pro $t \in< -3, 4 >$.

Řešení:
Pro sestavení výchozí simplexové tabulky dosadíme na pravou stranu obou omezení za t dolní mez ($t = -3$).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq -1 \end{aligned}$$

Druhé omezení je nepřípustné (záporná pravá strana druhého omezení), a tak druhé omezení přenásobíme -1: $x_1 - 2x_2 \geq -2 - t$.
Pokud bychom teď dosadili $t = -3$, pravá strana by byla rovna $+1$ a byla by přípustná.
Nyní tedy můžeme začít počítat. Díky druhému omezení budeme muset přistoupit k dvoufázové simplexové metodě. Omezení doplníme o přídatné a pomocné proměnné:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10 + 2t \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + y_1 &= -2 - t \end{aligned}$$

Navíc budeme muset sestavit pomocnou účelovou funkci: $z = \sum_i y_i = y_1 \ldots \min$.
Z druhého omezení vyjádříme $y_1 = -2 - t - x_1 + 2x_2 + x_4$. Odtud $z = y_1 = -2 - t - x_1 + 2x_2 + x_4$. Po anulování bude pomocná účelová funkce vypadat následovně:
$z + x_1 - 2x_2 - x_4 = -2 - t$
Nyní již není obtížné sestavit výchozí simplexovou tabulku.
Parametrickou pravou stranu lze obecně napsat ve tvaru $\mathbf{b} = \beta_0 + \beta_1 t$. Na místo pravé strany dosadíme hodnotu pravé strany pro t rovno dolní mezi intervalu. V našem případě tedy za t dosadíme -3. Vektor pravých stran pak bude $\mathbf{b} = (4, 1)^T$.
Nezapomeneme přidat do výchozí simplexové tabulky ještě dva "pomocné" sloupce β_0 a β_1. Koeficienty v těchto sloupcích jsou dány pravými stranami $\mathbf{b} = \beta_0 + \beta_1 t$.
Dále pokračujeme ve výpočtu simplexovou metodou – minimalizujeme pomocnou účelovou funkci z:

zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	b_i	β_{0i}	β_{1i}	$t = b_i/\alpha_{ik}$
x_3	1	1	1	0	0	4	10	2	4
y_1	1	-2	0	-1	1	1	-2	-1	1
z_j	-1	-2	0	0	0	0	0	0	
z'_j	1	-2	0	-1	0	1	-2	-1	
x_3	0	3	1	1	-1	3	12	1	
x_1	1	-2	0	-1	1	1	-2	-1	
z_j	0	-4	0	-1	1	1	-2	-1	
z'_j	0	0	0	0	-1	0	0	0	

V řádku pomocné účelové funkce jsou všechny koeficienty nekladné, hodnota této funkce je 0, podařilo se nám tedy najít přípustné výchozí řešení. V druhé fázi simplexové metody maximalizujeme účelovou funkci. Řádek s pomocnou účelovou funkcí i sloupec s pomocnou proměnnou y_1 můžeme vypustit, protože je již nebudeme potřebovat.

Další postup je identický s postupem v předchozím příkladě.

zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	β_{0i}	β_{1i}	$t = b_i/\alpha_{ik}$
x_3	0	3	1	1	3	12	1	1
x_1	1	-2	0	-1	1	-2	-1	xxx
z_j	0	-4	0	-1	1	-2	-1	
x_2	0	1	1/3	1/3	1	4	1/3	
x_1	1	0	2/3	$-1/3$	3	6	$-1/3$	
z_j	0	0	4/3	1/3	5	14	1/3	

Vzhledem k tomu, že v řádku účelové funkce jsou pro všechny proměnné koeficienty nezáporné, nalezli jsme optimální řešení $\mathbf{x} = (6 - \frac{1}{3}t, 4 + \frac{1}{3}t, 0, 0)^T$ s hodnotou účelové funkce $14 + \frac{1}{3}t$. Otázkou zůstává, pro jaká t je řešení optimální. Z podmínek optimality pro pravé strany $\beta_0 + \beta_1 t \geq 0$ získáváme:

x_2:$4 + \frac{1}{3}t \geq 0 \Rightarrow t \geq -12$

x_1:$6 - \frac{1}{3}t \geq 0 \Rightarrow t \leq 18$

Řešení je tedy přípustné pro $-12 \leq t \leq 18$, neboli $t \in < -12, 18 >$. Nás zajímalo řešení na intervalu $< -3, 4 >$. Na tomto intervalu je nalezené řešení optimální.

Příklad 3 – Parametrické ceny

Zadání:
Uvažujme úlohu lineárního programování s parametrickými cenami:

$$\max z = (70 + 2t)x_1 + (80 - t)x_2$$

za podmínek:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 19 \\ x_1 + x_2 &\leq 14 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nalezněte optimální řešení pro $t \geq 2$.

Řešení:
Pro parametrickou cenu platí $z_j = g_{0j} + g_{1j}t$. Jinak se jedná o běžnou úlohu lineárního programování a jako takovou ji také budeme řešit.
Nejprve anulujeme účelovou funkci: $z + (-70 - 2t)x_1 + (-80 + t)x_2 = 0$. Nyní sestavíme výchozí simplexovou tabulku tak, jak jsme zvyklí. V řádku účelové funkce budou hodnoty, získané z cen, dosazením dolní meze intervalu za parametr t, v našem případě tedy $t = 2$ – výsledný cenový vektor je (-74,-78,0,0). Do tabulky navíc přidáme dva "pomocné" řádky g_0, g_1 – koeficienty v těchto řádcích jsou dány cenami $z_j = g_{0j} + g_{1j}t$. Další postup je pak identický se simplexovým algoritmem pro maximalizaci účelové funkce.

zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$t = b_i/\alpha_{ik}$
x_3	2	1	1	0	0	19	19
x_4	1	1	0	1	0	14	14
x_5	1	2	0	0	1	20	10
g_{0j}	-70	-80	0	0	0	0	
g_{1j}	-2	1	0	0	0	0	
z_j	-74	-78	0	0	0	0	
x_3	3/2	0	1	0	$-1/2$	9	6
x_4	1/2	0	0	1	$-1/2$	4	8
x_2	1/2	1	0	0	1/2	10	20
g_{0j}	-30	0	0	0	40	800	
g_{1j}	$-5/2$	0	0	0	$-1/2$	-10	
z_j	-35	0	0	0	39	780	
x_1	1	0	2/3	0	$-1/3$	6	
x_4	0	0	$-1/3$	1	$-1/3$	1	
x_2	0	1	$-1/3$	0	2/3	7	
g_{0j}	0	0	20	0	30	980	
g_{1j}	0	0	5/3	0	$-4/3$	5	
z_j	0	0	70/3	0	82/3	990	

V řádku účelové funkce jsou všechny koeficienty nezáporné, nalezli jsme tedy optimální řešení. Otázkou je, pro které hodnoty parametru t je toto řešení optimální. Aby řešení bylo duálně přípustné (a tedy optimální), musí být hodnoty $z_j \geq 0$. Protože $z_j = g_{0j} + g_{1j}t$, musí platit $g_{0j} + g_{1j}t \geq 0$. To je pro základní proměnné zřejmé. Pro nezákladní proměnné řešením nerovností získáme omezení na t.
V našem případě tedy:
x_3: $20 + \frac{5}{3}t \geq 0 \Rightarrow t \geq -12$
x_5: $30 - \frac{4}{3}t \geq 0 \Rightarrow t \leq 22.5$
Dohromady tedy $-12 \leq t \leq 22.5$. Nás ovšem zajímá jen $t \geq 2$. Pro $t \in < 2, 22.5 >$ je optimálním řešením $\mathbf{x^1} = (6, 7, 0, 1, 0)^T$ s hodnotou účelové funkce $980 + 5t$.

Nyní budeme hledat optimální řešení pro $t \geq 22.5$. Postup je analogický postupu pro parametrické pravé strany. Řádek z_j můžeme vypustit, neboť ho již nebudeme potřebovat. Postupovat budeme standardním simplexovým algoritmem, za klíčový sloupec (vstupující proměnnou) zvolíme ten, ze kterého jsme určili horní mez parametru t (v našem případě $t = 22.5$ byla podmínka pro x_5, a tak x_5 bude vstupující proměnnou). Klíčový řádek určíme již standardně.

zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$t = b_i/\alpha_{ik}$
x_1	1	0	2/3	0	−1/3	6	xxx
x_4	0	0	−1/3	1	−1/3	1	xxx
x_2	0	1	−1/3	0	2/3	7	21/2
g_{0j}	0	0	20	0	30	980	
g_{1j}	0	0	5/3	0	−4/3	5	
x_1	1	1/2	1/2	0	0	19/2	
x_4	0	1/2	−1/2	1	0	9/2	
x_5	0	3/2	−1/2	0	1	21/2	
g_{0j}	0	−45	35	0	0	665	
g_{0j}	0	2	1	0	0	19	

Po prvním kroku jsme nalezli další optimální řešení a nyní určíme, pro jaká t je toto řešení optimální. Stejně jako v předchozím kroku kontrolujeme podmínku optimality pro cenové koeficienty $g_{0j} + g_{1j}t \geq 0$.
x_2: $-45 + 2t \geq 0 \Rightarrow t \geq 22.5$
x_3: $35 + t \geq 0 \Rightarrow t \geq -35$
Nalezené řešení $\mathbf{x^1} = (9.5, 0, 0, 4.5, 10.5)^T$ s hodnotou účelové funkce $665 + 19t$ je tedy optimální pro všechna $t \in < 22.5, \infty >$.

Příklad 4 – Podmínka optimality báze

Zadání:
Určete, pro které hodnoty parametru t je následující řešení maximalizační úlohy lineárního programování optimální:

zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	5	1	2	−3	4
x_1	1	−2	0	−1	2	12
g_{0j}	0	4	0	4	8	400
g_{1j}	0	6	0	3	−4	14

Řešení:
Řešení je velmi jednoduché, stačí si totiž uvědomit, kdy je řešení optimální a jaké podmínky musí být splněny. Podmínky optimality jsou dvě: Nezápornost pravých stran ($\mathbf{b} \geq 0$) a nezápornost cenových koeficientů ($z_j = g_{0j} + g_{1j}t \geq 0$). Vektor pravých stran je nezáporný, zbývá tedy ověřit, kdy jsou nezáporné redukované a stínové ceny.
x_2: $4 + 6t \geq 0 \Rightarrow t \geq -\frac{2}{3}$
x_4: $4 + 3t \geq 0 \Rightarrow t \geq -\frac{4}{3}$
x_5: $8 - 4t \geq 0 \Rightarrow t \leq 2$
Dohromady z těchto omezení dostáváme, že $t \in < -\frac{2}{3}, 2 >$. Uvedené řešení $\mathbf{x} = (12, 0, 4, 0, 0)^T$ s hodnotou účelové funkce $400 + 14t$ je tedy optimální pro všechna $t \in < -\frac{2}{3}, 2 >$.

Příklad 5 – Neomezená účelová funkce

Zadání:
Předpokládejme následující řešení úlohy lineárního programování s maximalizací účelové funkce:

zákl.prom.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b_i
x_3	0	1/8	1	−1/2	−1/4	–	3/2
x_1	1	−3/8	0	−3/2	−1/4	–	1/2
g_{0j}	0	1/4	0	−7	−3/2	–	8
g_{1j}	0	−1/8	0	−9/2	−3/4	–	3/2
z_j	0	1/4	0	−7	−3/2	–	8
z'_j	0	0	0	0	0	−1	0

Určete, pro které hodnoty parametru t je uvedené řešení optimální a pokračujte ve výpočtu dalšího optimálního řešení.

Řešení:
Pomocná účelová funkce nabývá svého minima, získané řešení je tedy výchozím řešením pro druhou fázi dvoufázové simplexové metody. Z řádku účelové funkce (z_j) vidíme, že řešení není optimální, protože jsou zde pro některé proměnné koeficienty záporné. Podle simplexového algoritmu bychom zvolili jako klíčový sloupec s proměnnou x_4. Problémem je však volba klíčového řádku, neboť v klíčovém sloupci není žádný z koeficientů základních proměnných kladný. V tomto případě nelze zvolit klíčový řádek.
Podívejme se nyní, co by muselo platit, aby řešení bylo optimální:
x_2: $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}t \geq 0 \Rightarrow t \leq 2$
x_4: $-7 - \frac{9}{2}t \geq 0 \Rightarrow t \leq -\frac{14}{9}$
x_5: $-\frac{3}{2} - \frac{3}{4}t \geq 0 \Rightarrow t \leq -2$
Vzhledem k tomu, že by musely platit všechny tři podmínky současně, muselo by $t \leq -2$. Pro taková t je řešení $\mathbf{x} = (0.5, 0, 1.5, 0, 0)^T$ optimální.
Naopak pro $t > -2$ nemá úloha optimální řešení. Účelová funkce je v tomto případě neomezená.